

Somme de nombres impairs

On pose $s(1) = 1$, $s(2) = 3 + 5$, $s(3) = 7 + 9 + 11, \dots$ de sorte que $s(n)$ corresponde à la somme des n premiers nombres impairs non encore écrits.

1. Calculer $s(i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- 3.a On note $I(k)$ le $k^{\text{ème}}$ entier naturel impair (avec $k \in \mathbb{N}^*$)
Exprimer $I(k)$ en fonction de k .
- 3.b On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S(N) = \sum_{k=1}^N I(k)$. Calculer $S(N)$.
- 3.c Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $T(n) = \sum_{i=1}^n s(i)$.
- 3.d En déduire la valeur de $s(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. A l'aide des résultats précédents, donner la valeur de $\sum_{i=1}^n i^3$ en fonction de n .