

## Géométrie dans l'espace

Soit  $a$  réel strictement positif.

On considère un carré  $(ABCD)$  de l'espace euclidien dont la longueur des côtés est  $a$ .

On note  $\mathcal{P}$  le plan du carré et  $\mathcal{D}$  la droite perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  en  $A$  arbitrairement orienté.

Sur  $\mathcal{D}$ , on considère un point  $M$  différent de  $A$  et on pose  $d = \overline{AM}$ .

1. La perpendiculaire en  $M$  au plan du triangle  $(MBC)$  rencontre le plan  $\mathcal{P}$  en un point  $R$ .
  - 1.a Faire une figure réunissant les données précédentes où la droite  $\mathcal{D}$  apparaît comme verticale.
  - 1.b Montrer que  $R$  appartient à la droite  $(AB)$ .
2. La perpendiculaire en  $M$  au plan du triangle  $(MCD)$  rencontre le plan  $\mathcal{P}$  en un point  $S$ .
  - 2.a Préciser le plan de réflexion échangeant  $R$  et  $S$ .
  - 2.b En déduire que  $S$  appartient à la droite  $(AD)$  et donner la nature du triangle  $(ARS)$ .
  - 2.c Etablir que la droite  $(MC)$  est perpendiculaire au plan du triangle  $(MRS)$ .
3. On note  $K$  le milieu du segment  $[RS]$ .
  - 3.a Quel est le lieu géométrique du point  $K$  lorsque  $M$  décrit la droite  $\mathcal{D}$  privée de  $A$ .
  - 3.b La hauteur issue de  $A$  du triangle  $(MAK)$  rencontre le côté  $[MK]$  en  $H$ .  
Montrer que  $(AH)$  est la hauteur issue de  $A$  du tétraèdre  $(ARMS)$ .
  - 3.c Conclure que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $(MRS)$ .