Fonctions harmoniques

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur U.
Une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ est dite harmonique ssi celle-ci est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution sur U de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. On note $H(U)$ l'ensemble de ces fonctions.

Partie I-Généralités

1. Montrer que $H(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

2. Premiers exemples

2.a Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $a,b,c\in\mathbb{R}$ pour que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ soit harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

2.b Montrer que $f:(x,y)\mapsto \arctan\left(y/x\right)$ est harmonique sur $U=\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.

3. Soit $f:U\to\mathbb{R}$.

3.a Montrer que si f est harmonique et de classe $\mathcal{C}^3$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont, elles aussi, harmoniques.

3.b En déduire que si f est harmonique de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ (avec $n\in\mathbb{N}$), alors ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n sont harmoniques.

4. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

4.a Montrer g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

4.b Etablir que si f est harmonique alors $\forall(r,\theta)\in\mathrm{R}^2, r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=0$

Partie II – Exemples de fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2$

Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1. *Fonctions harmoniques à variables séparables*
Une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite à variables séparables ssi il existe deux fonctions $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$.

1.a On considère f une fonction harmonique non nulle de la forme ci-dessus.
Montrer qu'il existe $k\in\mathrm{R}$ telle que φ et ψ soit respectivement solutions des équations différentielles :
$E_k: z''(t)+k.z(t)=0$ et $E_{-k}: z''(t)-k.z(t)=0$.

1.b Résoudre, selon le signe de $k\in\mathbb{R}$, l'équation E_k.

1.c On exige de plus que $f(0,0)=1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
Donner, en fonction k, l'expression de $f(x,y)$.

2. *Fonctions harmoniques radiales*
Une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite radiale ssi il existe $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$\forall x,y\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=g(x^2+y^2)$.

2.a On considère f une fonction harmonique de la forme ci-dessus.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle $tz''(t)+z'(t)=0$.

2.b Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2.c Quelles sont les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2$ radiales ?

3. *Fonctions harmoniques à variables polaires séparables*

Une fonction $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite à variables polaires séparables ssi il existe deux fonctions $u:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $v:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, f(r\cos\theta, r\sin\theta) = u(r)v(\theta)$.

3.a On considère f une fonction non nulle de la forme ci-dessus.
Montrer que l'application v est 2π périodique.

3.b On suppose de plus que f est harmonique.
En exploitant I.4.b, établir l'existence d'une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que :
u est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $E_r : r^2 z''(r) + rz'(r) - kz(r) = 0$
et v solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $F_\theta : z''(\theta) + kz(\theta) = 0$.

3.c On suppose dans cette question que $k = 0$.
Résoudre F_θ sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les solutions 2π périodiques ?
Résoudre E_r sur $\mathbb{R}^{+*}$. Quelles sont les solutions se prolongeant pas continuité en 0 ?

3.d On suppose désormais $k \neq 0$.
Etablir une condition nécessaire et suffisante sur $k \in \mathbb{R}^*$ pour que l'équation F_θ possède une solution 2π périodique non nulle.
On suppose désormais que cette condition est remplie et on pose $n = \sqrt{k}$.

3.e Résoudre F_θ .

3.f Résoudre E_r sur E^{+*} en réalisant le changement de variable $r = \mathrm{e}^t$.
Parmi les solutions, lesquelles peuvent être prolongées par continuité en 0 ?

Partie III – Propriétés de la moyenne et principe du maximum

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique.

1.a Justifier qu'il existe une fonction $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

1.b Montrer que g est harmonique.

2. Soit $a = (x_0, y_0) \in U$ et $R > 0$. On note $D(a,r)$ le disque de centre a et de rayon R .
On définit deux applications $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par :
$\forall r \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \tilde{f}(r,\theta) = f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$ et $\tilde{g}(r,\theta) = g(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$.

2.a Justifier que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2.b Etablir que $r\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)$ pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}$.

3. Pour tout $r \in \mathbb{R}$ on pose $\varphi(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{f}(r,\theta)\mathrm{d}\theta$.

On admet que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\mathrm{d}\theta$.

3.a Montrer que φ est une fonction constante et préciser sa valeur.

3.b En déduire que $f(a) = \dfrac{1}{\pi R^2} \displaystyle\iint_{D(a,R)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Ainsi la valeur de f en a est égale à la moyenne de f sur tout disque de centre a .

4. On suppose que f admet un extremum en a .
Montrer que f est alors constante sur $\mathbb{R}^2$.
Ce résultat est connu sous le nom de principe du maximum.