Etude d'une courbe en coordonnées polaires

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de son repère orthonormé direct canonique $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$ les vecteurs de la base polaire d'angle θ .

Soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta) = \cos^3(\theta/3)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ i.e. la courbe de point courant $M(\theta)$ défini par $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$.

1.a Comparer $M(\theta)$ et $M(\theta + 3\pi)$.

1.b Comparer $M(\theta)$ et $M(-\theta)$.
On limite désormais l'étude de Γ à $\theta \in [0,3\pi/2]$

1.c Dresser le tableau de variation de $\theta \mapsto \rho(\theta) = \cos^3(\theta/3)$ sur $[0,3\pi/2]$.

1.d Donner l'allure de la courbe Γ autour du point de paramètre $\theta = 3\pi/2$.
On y précisera le sens de parcours des θ croissants.

2.a Obtenir une détermination angulaire $\alpha(\theta)$ en tout point de paramètre $\theta \in [0,3\pi/2[$.

2.b Calculer la courbure de Γ en tout point de paramètre $\theta \in [0,3\pi/2[$

3.a Tracer l'intégralité de la courbe Γ en prenant une unité égale à 5 cm.
On précisera les tangentes aux points de paramètres $\theta = 0, \pi/2$ et π .

3.b Calculer la longueur de la courbe Γ .