Etude de l'astroïde

$\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère la courbe $\mathcal{C}$ décrite par le point $M(t)$ de coordonnées $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Cette courbe $\mathcal{C}$ est appelée astroïde.

1. *Allure :*

1.a Déterminer les axes de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

1.b Etudier et construire $\mathcal{C}$.
Pour la représentation on prendra une unité égale à 4 cm.

1.c Calculer la longueur L de la courbe $\mathcal{C}$.

2. *Etude des centres de courbures :*

En tout point régulier $M(t)$ de $\mathcal{C}$ on note $\vec{T}(t)$ et $\vec{N}(t)$ les vecteurs tangents et normaux de la base de Frénêt.

2.a Donner les composantes des vecteurs $\vec{T}(t)$ et $\vec{N}(t)$.

2.b Déterminer le rayon de courbure $R(t)$ au point $M(t)$, pour tout $t \neq 0\,[\pi/2]$.

2.c On note $\Omega(t)$ le centre de courbure au point $M(t)$ lorsque celui-ci est régulier et on pose $\Omega(t) = M(t)$ lorsque le point $M(t)$ est singulier.
Exprimer les coordonnées de $\Omega(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2.d On introduit le repère $\mathcal{R}' = (O,\vec{I},\vec{J})$ déterminé par $\vec{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ et $\vec{J} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j})$.

Déterminer les coordonnées, notées $(X(t),Y(t))$, du point $\Omega(t)$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

2.e En introduisant le paramètre $\tau = t - \dfrac{\pi}{4}$, observer que la courbe $\mathcal{C}'$ décrite par les points $\Omega(t)$ se déduit de la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide de transformations géométriques simples à préciser.

3. *Propriété géométrique :*

3.a Ecrire une équation de la droite $D(t)$ tangente en $M(t)$ à $\mathcal{C}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3.b Soit $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection avec les axes de coordonnées de la tangente $D(t)$ à $\mathcal{C}$ en un point régulier $M(t)$. Calculer la longueur $A(t)B(t)$.

4. *Construction géométrique :*
Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. On note M au lieu de $M(t)$.

Soit P le point du cercle de centre O et de rayon $1/2$ déterminé par $(\vec{i},\overrightarrow{OP}) = t\,[2\pi]$.

4.a Montrer que la droite $D(t)$ tangente à $\mathcal{C}$ en M passe par P.
Indiquer une construction géométrique de $D(t)$ à partir du point P seul.

4.b On note H le projeté orthogonal de O sur $D(t)$.

Donner les coordonnées de H puis calculer $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OM}$.
Faire une figure précisant comment, à partir du point P on peut construire M.