Equation aux dérivées partielles

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur Ω.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation aux dérivées partielles $E_\lambda : x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda f(x,y)$.

On note $F_\lambda(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies et solutions de E_λ sur Ω.

Partie I – Etude générale

1.a Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Etablir que $F_\lambda(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$.

1.b Observer que les applications $p_x : (x,y)\mapsto x$ et $p_y : (x,y)\mapsto y$ appartiennent à $F_1(\Omega)$.

2.a Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in F_\lambda(\Omega)$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ appartiennent à $F_{\lambda-1}(\Omega)$.

2.b Soit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
Observer que si $f \in F_\lambda(\Omega)$ et $g \in F_\mu(\Omega)$ alors $fg \in F_\theta(\Omega)$ pour un réel θ que l'on précisera en fonction λ et μ.

2.c Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in F_\lambda(\Omega)$ telle que $\forall (x,y)\in\Omega, f(x,y)>0$.
Montrer que la fonction $f^\alpha : (x,y)\mapsto \big(f(x,y)\big)^\alpha$ appartient à $F_{\alpha\lambda}(\Omega)$.

3. Dans cette question $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.
Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on note $r_\lambda : \Omega\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $r_\lambda(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda$.

3.a Justifier que $r_\lambda \in F_\lambda(\Omega)$.

3.b A quelle condition sur λ, peut-on prolonger r_λ par continuité en $(0,0)$?

Partie II – Résolution sur $\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$.

Dans cette partie $\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$.

1.a Justifier que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1.b Justifier que l'application $\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(u,v)=(uv,v)$ réalise une bijection de Ω sur lui-même. Exprimer l'application réciproque de Φ.

2. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $g:\Omega\to\mathbb{R}$ définie par $g=f\circ\Phi$.

2.a Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2.b Justifier que $f\in F_\lambda(\Omega)$ ssi g est solution sur Ω de l'équation : $v\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\lambda g(u,v)$.

2.c Résoudre cette dernière et décrire $f\in F_0(\Omega)$.

Partie III – Résolution de E_λ sur $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Dans cette partie $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

1. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$.

1.a Soit $(x,y)\in\Omega$ fixé. Pour $t\in\mathbb{R}^{+*}$, on pose $\varphi(t)=f(tx,ty)$.

Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\varphi'(t)$.

1.b Etablir : $f\in F_0(\Omega)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in\Omega,\forall t>0, f(tx,ty)=f(x,y)$.

1.c En déduire que les solutions de E_0 sur Ω sont les fonctions de la forme :

$(x,y)\mapsto\varphi\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ où $\varphi\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$.

2. Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Notons $g:\Omega\to\mathbb{R}$ définie par $g(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda}$.

2.a Montrer que $f\in F_\lambda(\Omega)\Leftrightarrow g\in F_0(\Omega)$.

2.b Déterminer les fonctions solutions de E_λ sur Ω.