DL et étude d'une solution d'équation différentielle

Dans tout ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie I

On considère l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

On désigne désormais par f l'une de ses solutions sur $\mathbb{R}$, que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.

2.a Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

2.b Quelle est la valeur de $f'(0)$?

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.

4.a Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre p (p entier naturel).
Ecrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + o(x^p).$$

Exprimer a_n en fonction $f^{(n)}(0)$.

4.b A l'aide du résultat de la question 3, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \dfrac{(-4)^k.k!}{(2k+1)!}$.

4.c Obtenir également l'expression des termes a_{2k}, à l'aide de $f(0)$ (k entier naturel).

Partie II

On considère la fonction de la variable réelle : $D : x \mapsto D(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt$.

1. Justifier le fait que D est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et vérifier que D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

2. Etudier la parité de D.

3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x\mathrm{e}^{-x^2} \leq D(x) \leq x$.

4.a Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{4x^3} - \frac{3\mathrm{e}}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t$.

4.b Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}$. Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$.

En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[, \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t \leq h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

et qu'au voisinage de $+\infty$: $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t = o\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)$.

4.c En déduire qu'au voisinage de $+\infty$: $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$.

En déduire enfin un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.

5.a Prouver que D admet un maximum, atteint en un point .

5.b Montrer que ce maximum est égal à $\dfrac{1}{2b}$.

5.c En déduire l'unicité du point où la maximum est atteint.

Partie III

1. Déterminer à l'aide de D l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.