Correction

1.a x et y sont des fonctions impaires car les fonctions intégrées sont paires.
Par suite la courbe est symétrique par rapport au point O .

1.b $\begin{cases} x'(t)=\cos(t^2) \\ y'(t)=\sin(t^2) \end{cases} \begin{cases} x''(t)=-2t\sin(t^2) \\ y''(t)=2t\cos(t^2) \end{cases}$, $\text{Det}(\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}},\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}})=2t$

Tous les points sont réguliers. Seul le point $M(O)$ n'est pas birégulier.

1.c $M(0)=0$, $\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}(0)=(1,0)$, $\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}t^3}}(0)=(0,2)$ non colinéaire à $\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}(0)$.

$p=1,q=3$, il y a un point d'inflexion avec tangente horizontale en O .

1.d Posons $I_0=\left[0,\sqrt{\pi/2}\right]$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$, $I_k=\left[\sqrt{(2k-1)\pi/2},\sqrt{(2k+1)\pi/2}\right]$

$t\mapsto x(t)$ est croissante sur I_k si k est pair et décroissante sinon.

Posons, pour $k\in\mathbb{N}$, $J_k=\left[\sqrt{k\pi},\sqrt{(k+1)\pi}\right]$.

$t\mapsto y(t)$ est croissante sur I_k si k est pair et décroissante sinon.

La courbe admet une tangente verticale (resp. horizontale) aux points de paramètre $t=\pm\sqrt{(2k+1)\pi/2}$ (resp. $t=\pm\sqrt{k\pi}$), avec $k\in\mathbb{N}$.

2.a $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left\|\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}\right\|=1$ donc $s=t+C^{te}$ puis sachant $s(0)=0$, $s(t)=t$.

2.b $d_\Gamma(M(t_0),M(t_1))=s(t_1)-s(t_0)=t_1-t_0$.

2.c $\vec{T}=\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}}=\left(\cos(t^2),\sin(t^2)\right)$, $\vec{N}=(-\sin(t^2),\cos(t^2))$.

2.d $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=\lambda\vec{N}$ donc $\lambda=2t$.

3. Notons à nouveau M le point courant de l'arc $\mathcal{C}_k$.

Soit α une détermination angulaire sur Γ , $\dfrac{d\alpha}{ds}=\lambda=ks$ donc $\alpha(s)=\dfrac{1}{2}ks^2+C^{te}$, la tangente étant horizontale à l'origine, $\alpha(s)=\dfrac{1}{2}ks^2$.

$\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}}=(x',y')=\vec{T}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ et $x(0)=0,y(0)=0$ donc

$x(s)=\displaystyle\int_0^s\cos\left(\frac{1}{2}kv^2\right)\mathrm{d}v$ et $y(s)=\displaystyle\int_0^s\sin\left(\frac{1}{2}kv^2\right)\mathrm{d}v$.

3.b Via $u=\sqrt{k/2}v$, $x(s)=\sqrt{\dfrac{2}{k}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{k/2}s}\cos(u^2)du$ et $y(s)=\sqrt{\dfrac{2}{k}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{k/2}s}\sin(u^2)du$.

$\mathcal{C}_k$ est l l'image de Γ par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2/k}$.