Correction

d'après ICARE 1999

Partie I

1. I et U sont linéairement indépendant et donc forme une base de E.

2. On a $U^2 = nU$ puis $U^3 = nU^2 = n^2U$. Par récurrence : $U^p = n^{p-1}.U$.

3. $\forall A,B \in E$, $\exists \alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathbb{R}$ tels que $A = (\alpha I + \beta U)$ et $B = \alpha' I + \beta' U$. On a alors $AB = \alpha\alpha' I + (\alpha\beta' + \alpha'\beta + n\beta\beta')U \in E$.

4.a Comme αI et βU commutent :

$$A^p = (\alpha I + \beta U)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\alpha I)^{p-k} (\beta U)^k = \alpha^p I + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} \beta^k n^{k-1} U$$

donc $A^p = \alpha^p I + \dfrac{1}{n}((\alpha + n\beta)^p - \alpha^p)U$.

4.b On a $\det A = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & & \beta \\ & \ddots & \\ \beta & & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+n\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \alpha+\beta & & \beta \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha+n\beta & \beta & & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+n\beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \alpha \end{vmatrix}$

donc $\det A = \alpha^{n-1}(\alpha + n\beta)$

4.c La matrice A est inversible ssi $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -n\beta$.

En reprenant la formule du 3. avec $\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\beta' = -\dfrac{\beta}{\alpha(\alpha + n\beta)}$ on a $AB = I$ d'où $B = A^{-1}$.

Partie II

1.a $p_0^2 = p_0$ car $(\dfrac{1}{n}U)^2 = \dfrac{1}{n}U$ donc p_0 est un projecteur.

$p_1 = i - p_0$ donc p_1 est le projecteur complémentaire de p_0.

1.b Comme p_1 est le projecteur complémentaire de p_0 :

$\ker p_0 = \operatorname{Im} p_1$ et $\ker p_1 = \operatorname{Im} p_0$.

$\dim \ker p_1 = \dim \operatorname{Im} p_0 = \operatorname{rg}(p_0) = \operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(U) = 1$.

$\dim \ker p_0 = \dim \operatorname{Im} p_1 = n - \dim \ker p_1 = n - 1$.

1.c Comme p_0 est la projection vectorielle sur $\operatorname{Im} p_0$ selon la direction $\ker p_0$ on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(p_0) = \operatorname{diag}(1,0,\ldots,0)$ et comme $p_1 = i - p_0$ on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(p_1) = \operatorname{diag}(0,1,\ldots,1)$.

2. $A_0 = \dfrac{1}{n}U \in E$ et $A_1 = I - \dfrac{1}{n}U \in E$.

De plus les représentations de A_0 et A_1 permettent d'observer que ces matrices sont linéairement indépendantes, elles forment une base de E.

3.a $\lambda A_0 + \mu A_1 = \alpha I + \beta U \Leftrightarrow \lambda = \alpha + n\beta, \mu = \alpha$.

3.b A_0 et A_1 commutent puisque $A_0A_1 = A_1A_0 = O$.

$A^p = (\lambda A_0 + \mu A_1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\lambda A_0)^{p-k} (\mu A_1)^k$ donne

$$A^p = \lambda^p A_0 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} \mu^k A_0 A_1 + \mu^p A_1 = \lambda^p A_0 + \mu^p A_1 = (\alpha + n\beta)^p A_0 + \alpha^p A_1.$$

et enfin $A^p = \alpha^n I + \dfrac{1}{n}((\alpha + n\beta)^p - \alpha^p)U$.