Correction

Partie I

1.a $S_n = n$ donc (S_n) diverge.

1.b $S_n = q\dfrac{1-q^n}{1-q}$. (S_n) converge ssi (q^n) converge i.e. ssi $|q|<1$.

2.a L'étude des variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction différence $\delta : x \mapsto \ln(1+x)-x$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x)\le x$.

Pour $x = 1/n$, cela fournit $\dfrac{1}{n} \ge \ln(1+1/n) = \ln(n+1)-\ln n$.

2.b En sommant l'inégalité précédent : $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln k = \ln(n+1)-\ln 1 = \ln(n+1)$.

Puisque $\ln(n+1)\xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, on peut affirmer par comparaison que (S_n) diverge.

3.a $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n-1)} \ge \dfrac{1}{n^2}$.

3.b En sommant l'inégalité précédente : $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2} \le 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right) = 2-\dfrac{1}{n} \le 2$.

3.c $S_{n+1}-S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \ge 0$. La suite (S_n) est croissante et majorée donc convergente. On peut montrer, mais c'est difficile, que sa limite vaut $\pi^2/6$.

4.a $S_{2n+1}-S_{2n-1} = \dfrac{-1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n} \ge 0$ donc (S_{2n-1}) est croissante.

$S_{2n+2}-S_{2n} = \dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{2n+1} \le 0$ donc (S_{2n}) est décroissante.

$S_{2n}-S_{2n-1} = \dfrac{1}{2n} \to 0$ donc on peut affirmer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

4.b Les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) convergent vers une même limite. Etant exhaustives, on peut affirmer que (S_n) converge aussi vers cette limite. On peut montrer que celle-ci vaut $\ln 2$.

Partie II

1. $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc si (S_n) converge vers ℓ alors $u_n \to \ell-\ell = 0$.
Pour la suite de terme général $u_n = 1/n$ on obtient un contre exemple à la réciproque.

2. (S_n) est croissante car $S_{n+1}-S_n = u_{n+1} \ge 0$.

3.a Par sommation de l'inégalité $u_k \le v_k$ pour k allant de n_0 à n : $S_n - S_{n_0-1} = T_n - T_{n_0-1}$.

Ainsi $S_n \le T_n + k$ avec $k = S_{n_0-1}-T_{n_0-1}$.

3.b Si (T_n) converge alors (T_n) est majorée et donc (S_n) aussi. Cette suite étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

3.c Si $n^2u_n \to \ell$ alors pour n assez grand $n^2u_n \le \ell+1$ et donc $u_n \le \dfrac{\ell+1}{n^2}$.

On conclut en appliquant l'étude précédente à $v_n = \dfrac{\ell+1}{n^2}$ pour laquelle (T_n) converge compte tenu des résultats de la partie I.

4.a $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

4.b $S_n^+, S_n^- \leq T_n$ avec $T_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$.

Comme vu à la question II.3, la convergence de (T_n) entraîne celle de (S_n^+) et (S_n^-).

4.c $S_n = S_n^+ - S_n^-$ converge par opération.

5. Si $(n^2 u_n)$ converge alors $(n^2 |u_n|)$ aussi et on peut conclure.