Homographies conservant U

Notations

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
On introduit les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants :
$U = \left\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\right\} = \left\{\mathrm{e}^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\right\}$, $P = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

Définition

Soit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

On appelle homographie définie par la relation $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ l'application h à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui à tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $cz + d \neq 0$ associe par $\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Partie I - Exemple

Soit h l'homographie définie par $h(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$.

1.a Montrer que $\forall z \in U$ tel que $z \neq 1$, $h(z) \in \mathbb{R}$.

1.b Observer que $\forall z \in D, h(z) \in P$.

2.a Déterminer les complexes z tels que $h(z) = z$.

2.b Pour quel(s) $Z \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = Z$ d'inconnue $z \neq 1$ possède-t-elle une solution ?

Soit g l'homographie définie par $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

3.a Montrer que $\forall z \in \mathbb{R}, g(z) \in U$.

3.b Observer que $\forall z \in P, g(z) \in D$.

Partie II - Homographies conservant U

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}$.

   Montrer que $\forall z \in U, h(z) \in U$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin U$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$.

2.a Montrer que h est bien une homographie et que h est définie sur U.

2.b Montrer que $\forall z \in U, h(z) \in U$.

3. Inversement, nous allons démontrer que seules les homographies h précédentes sont telles que $\forall z \in U, h(z) \in U$. Avant cela, nous avons néanmoins besoin de deux résultats techniques :

3.a Etablir que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{\alpha}\beta)$.

3.b Soit $a,b \in \mathbb{C}$. Etablir : $\left(\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\,\mathrm{Re}(b\mathrm{e}^{-i\theta}) = 0\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

4. Soit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et h définie par $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie définie sur U telle que $\forall z \in U, h(z) \in U$.

4.a Etablir $\forall \theta \in \mathbb{R}, |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{a} b \mathrm{e}^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{c} d \mathrm{e}^{-i\theta})$.

4.b En déduire : $\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \\ \overline{a} b = \overline{c} d \end{cases}$.

4.c Si $a = 0$: montrer que l'homographie h est du type présenté en II.1.

4.d Si $a \neq 0$: établir que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

4.e Observer que le cas $|a| = |c|$ est impossible de part la condition $ad - bc \neq 0$.

4.f Observer que le cas $|a| = |d|$ conduit à une homographie h du type présenté en II.2.

Correction

Partie I

1.a Soit $z \in U \setminus \{1\}$. On peut écrire $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ et alors avec $\theta \in]0, 2\pi[$.

$h(z) = i\dfrac{1 + \mathrm{e}^{i\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}} = i\dfrac{2\cos(\theta/2)\mathrm{e}^{i\theta/2}}{-2i\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{i\theta/2}} = -\cot \theta/2 \in \mathbb{R}$.

1.b Soit $z \in D$. $h(z) = i\dfrac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} = -\dfrac{2\operatorname{Im}(z)}{|1-z|^2} + i\dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \in P$ car $|z| < 1$.

2.a $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 + (i-1)z + i = 0$. $\Delta = (i-1)^2 - 4i = -6i = \left(\sqrt{3}(1-i)\right)^2$.

Les solutions sont $(1-i)\dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

2.b Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. $h(z) = Z \Leftrightarrow (1+z) = iZ(z-1) \Leftrightarrow z = \dfrac{-1-iZ}{1-iZ} = \dfrac{Z-i}{Z+i}$

3.a Soit $z \in \mathbb{R}$. $|g(z)| = \dfrac{|z-i|}{|z+i|} = \sqrt{\dfrac{z^2+1}{z^2+1}} = 1$ donc $z \in U$.

2.b Soit $z \in P$. $|g(z)| = \dfrac{|z-i|}{|z+i|}$ or $|z-i|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z)-1)^2$ et $|z+i|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z)+1)^2$ donc $|z-i| < |z+i|$ car $\operatorname{Im}(z) > 0$ et par suite $g(z) \in D$.

Partie II

1. $\forall z \in U$, on a $|h(z)| = \left|\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}\right| = 1$ donc $h(z) \in U$.

2.a La condition $ad - bc \neq 0$ impose $\mathrm{e}^{i\theta} \times 1 - \alpha \mathrm{e}^{i\theta}\overline{\alpha} \neq 0$ i.e. $|\alpha| \neq 1$ d'où $\alpha \notin U$.
De plus $\forall z \in U$, $z \neq -1/\overline{\alpha}$ donc h est définie sur U.

2.b $h(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$. On a $|h(z)| = \left|\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}\right| \times \dfrac{|\overline{z}|}{|\overline{z}|} = \dfrac{|z+\alpha||\overline{z}|}{|\overline{\alpha}+\overline{z}|} = 1$.

3.a $|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)} = \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)$ car $\alpha\overline{\beta} = \overline{\overline{\alpha}\beta}$.

3.b Supposons $\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\operatorname{Re}(b\mathrm{e}^{-i\theta}) = 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b = |b|\mathrm{e}^{i\alpha}$ ($\alpha = \arg(b)$ $[2\pi]$ si $b \neq 0$, α quelconque sinon).
Pour $\theta = \alpha$: $a + 2\operatorname{Re}(b\mathrm{e}^{-i\theta}) = a + 2\operatorname{Re}(|b|) = a + 2|b| = 0$.
Pour $\theta = \alpha + \pi$: $a + 2\operatorname{Re}(b\mathrm{e}^{-i\theta}) = a + 2\operatorname{Re}(-|b|) = a - 2|b| = 0$.
Le système $\begin{cases} a + 2|b| = 0 \\ a - 2|b| = 0 \end{cases}$ implique $a = 0$ et $|b| = 0$ i.e. $b = 0$.

4.a $h(\mathrm{e}^{i\theta})=\dfrac{a\mathrm{e}^{i\theta}+b}{c\mathrm{e}^{i\theta}+d}$. $\left|h(\mathrm{e}^{i\theta})\right|=1$ implique $\left|a\mathrm{e}^{i\theta}+b\right|^2=\left|c\mathrm{e}^{i\theta}+d\right|^2$ d'où

$\forall\theta\in\mathbb{R},|a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b\mathrm{e}^{-i\theta})=|c|^2+|d|^2+2\,\mathrm{Re}(\overline{c}d\mathrm{e}^{-i\theta})$.

4.b $\forall\theta\in\mathbb{R}$, on a $\left(|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2\right)+2\,\mathrm{Re}\left((\overline{a}b-\overline{c}d)\mathrm{e}^{-i\theta}\right)=0$ d'où

$\begin{cases}|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2=0\\ \overline{a}b-\overline{c}d=0\end{cases}$ puis $\begin{cases}|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2 & (1)\\ \overline{a}b=\overline{c}d & (2)\end{cases}$.

4.c Supposons $a=0$. (2) donne $\overline{c}d=0$, or $ad-bc\neq 0$ donc $c\neq 0$ et par suite $d=0$.

(1) donne alors $|b|=|c|$ ce qui permet d'écrire $b=\mathrm{e}^{i\theta}c$ et alors $h(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}$.

4.d Supposons $a\neq 0$. (2) donne $b=\dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}}$ et $|a|^2\times(1)$ donne alors $|a|^4+|c|^2|d|^2-|a|^2|c|^2-|a|^2|d|^2=0$ d'où

$(|c|^2-|a|^2)(|d|^2-|a|^2)=0$.

4.e Supposons $|a|=|c|$. On peut alors écrire $a=c\mathrm{e}^{i\theta}$ et $b=d\mathrm{e}^{-i\theta}$ mais alors $ad-bc=0$ qui est exclu.

4.f Supposons $|a|=|d|$. On peut alors écrire $a=d\mathrm{e}^{i\theta}$ et $b=\dfrac{\overline{c}d\mathrm{e}^{i\theta}}{\overline{d}}$ et alors

$$h(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\mathrm{e}^{i\theta}\,\frac{z+\dfrac{\overline{c}}{\overline{d}}}{\dfrac{c}{d}z+1}=\mathrm{e}^{i\theta}\,\frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}\text{ avec }\alpha=\frac{\overline{c}}{\overline{d}}\in\mathbb{C}.$$

Enfin la condition $ad-bc\neq 0$ donne $d^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\dfrac{c\overline{c}d}{\overline{d}}\mathrm{e}^{i\theta}\neq 0$ donc $|c|\neq|d|$ puis $\alpha\notin U$.

Finalement h est du type annoncé.