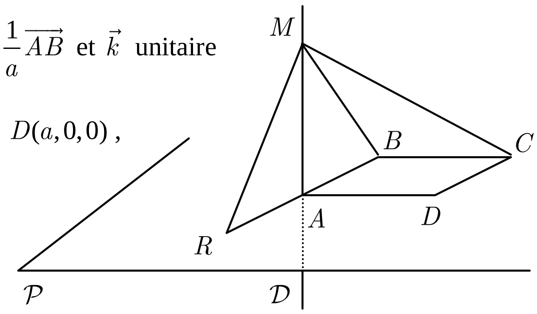
Correction

d'après ENSAIS 2002

1.ab Considérons $\mathcal{R}=(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec $\vec{i}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$, $\vec{j}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{k}$ unitaire dirgeant et orientant $\mathcal{D}$.



$\mathcal{R}$ est un repère orthonormé dans lequel $A(0,0,0)$, $D(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(a,a,0)$, $M(0,0,d)$.

$\overrightarrow{MR}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}(0,-ad,-a^2)$

or $R=M+\lambda\overrightarrow{MR}$ donc $R(0,-\lambda ad,d-\lambda a^2)$

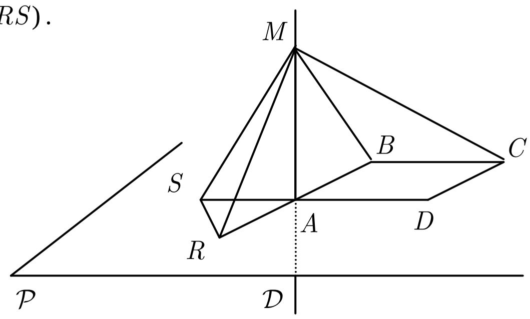
Puisque $R\in\mathcal{P}$, $\lambda=d/a^2$ puis

$R(0,-d^2/a,0)\in(AB)$.

2.a Considérons le plan Π médiateur du segment $[B,D]$. Clairement $A,C,M\in\Pi$.
La réflexion de plan Π transforme le triangle (MBC) en (MCD), le plan $\mathcal{P}$ en lui-même donc le point R en le point S.

2.b La réflexion proposée transforme (AB) en (AD) donc $S\in(AD)$.
De plus, par isométrie $AS=AR$ donc (ARS) est isocèle en A.

2.c La droite (MC) est orthogonale à (MR) et (MS)
donc (MC) est orthogonale au plan du triangle (MRS).



3.a $R(0,-d^2/a,0)$ et $S(-d^2/a,0,0)$ donc

$K(-\frac{d^2}{2a},-\frac{d^2}{2a},0)$.

Lorsque M décrit $\mathcal{D}\backslash\{a\}$, K décrit la demi-droite d'origine ouverte A et dirigée par $\overrightarrow{CA}$.

3.b (AH) est orthogonale à la droite (MK).
La réflexion de plan Π conserve le triangle (AMK) donc aussi la droite (AH).
La réflexion de plan Π échange R et S donc la droite (RS) est orthogonale à Π et donc à (AH).
Finalement (AH) étant orthogonale aux droites (MK) et (RS) est orthogonale au plan (MRS).
Ainsi H est la hauteur issue de A au tétraèdre $(ARMS)$.

3.c Montrons que (SH) est orthogonale à (MR).

$\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{MR}$

Or $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{MR}=0$ en vertu de 3.b et $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{MR}=0$ car $\overrightarrow{SA}$ est un vecteur de la droite (AD), $\overrightarrow{MR}$ un vecteur du plan (MAB) et cette droite et ce plan sont orthogonaux.

Ainsi (SH) est une hauteur de (MRS), aussi $(MH)=(MK)$ et donc H est l'orthocentre de (MRS).