Correction

1.a $\begin{cases} x(-t)=x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{cases}$ donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

$\begin{cases} x(\pi-t)=-x(t) \\ y(\pi-t)=y(t) \end{cases}$ donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$\begin{cases} x(\pi/2-t)=y(t) \\ y(\pi/2-t)=x(t) \end{cases}$ donc la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice.

1.b $\begin{cases} x(t+2\pi)=x(t) \\ y(t+2\pi)=y(t) \end{cases}$, on peut donc restreindre l'étude à $t\in[-\pi,\pi]$.

On obtient alors directement l'intégralité de la courbe.

Les symétries précédentes permettent de réduire l'étude à $[0,\pi],[0,\pi/2]$ puis $[0,\pi/4]$.

On obtiendra l'intégralité de la courbe en complétant par les symétries proposées.

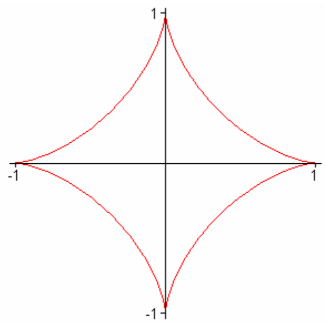
$t\mapsto M(t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi/4]$.

$\begin{cases} x'(t)=-3\sin t\cos^2 t \\ y'(t)=3\cos t\sin^2 t \end{cases}$, $\begin{cases} x'(t)=0\Leftrightarrow t=0 \\ y'(t)=0\Leftrightarrow t=0 \end{cases}$.

t	0		$\pi/4$
$x(t)$	1	$\searrow$	$1/(\sqrt{2})^3$

,

t	0		$\pi/4$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$1/(\sqrt{2})^3$



En $t=0$, $M(0)\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ est un point singulier.

$\begin{cases} x''(t)=-3\cos^3 t+6\sin^2 t\cos t \\ y''(t)=-3\sin^3 t+6\cos^2\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x''(0)=-3 \\ y''(0)=0 \end{cases}$.

En $M(0)$ il y a une tangente horizontale qui est l'axe des abscisses.

Puisque $M(-t)$ est symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

En $t=\pi/4$, $M(\pi/4)\begin{vmatrix}1/(\sqrt{2})^3\\1/(\sqrt{2})^3\end{vmatrix}$ admet une tangente de pente -1.

1.c $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=3|\sin t\cos t|$.

$L=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}3|\sin t\cos t|\mathrm{d}t=12\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=3[-\cos 2t]_0^{\pi/2}=6$.

2.a $\vec{T}(t)=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\sin\alpha\cdot\vec{j}$ et $\vec{N}(t)=-\sin\alpha\cdot\vec{i}+\cos\alpha\cdot\vec{j}$ avec

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{\sin t\cos^2 t}{|\sin t\cos t|} \\ \sin\alpha=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\cos t\sin^2 t}{|\sin t\cos t|} \end{cases}.$$

2.b Si $\sin t\cos t>0$ alors $\begin{cases}\cos\alpha=-\cos t\\ \sin\alpha=\sin t\end{cases}$, $\alpha=\pi-t$ est une détermination angulaire convenable.

Si $\sin t\cos t<0$ alors $\begin{cases}\cos\alpha=\cos t\\ \sin\alpha=-\sin t\end{cases}$, $\alpha=-t$ est une détermination angulaire convenable.

Dans les deux cas : $\dfrac{1}{R(t)}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{1}{3\left|\sin t\cos t\right|}$ puis $R(t)=-3\left|\sin t\cos t\right|$.

2.c Si $M(t)$ est régulier alors :

$\overrightarrow{M(t)\Omega(t)}=R(t)\vec{N}(t)\begin{vmatrix}3\cos t\sin^2 t\\ 3\sin t\cos^2 t\end{vmatrix}$ puis $I(t)\begin{vmatrix}\cos^3 t+3\cos t\sin^2 t\\ \sin^3 t+3\sin t\cos^2 t\end{vmatrix}$.

Si $M(t)$ est irrégulier $\sin t\cos t=0$ et la formule ci-dessus est encore valable.

2.d $\overrightarrow{O\Omega(t)}=X(t)\vec{I}+Y(t)\vec{J}=(\cos^3 t+3\sin t\cos^2 t)\cdot\vec{i}+(\sin^3 t-3\cos t\sin^2 t)\cdot\vec{j}$ et $\vec{i}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{I}-\vec{J})$,

$\vec{j}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{I}+\vec{J})$ donne :

$$\begin{cases}X(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos^3 t+3\sin t\cos^2 t+3\cos t\sin^2 t+\sin^3 t\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos t+\sin t\right)^3\\ Y(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos^3 t+3\sin t\cos^2 t-3\cos t\sin^2 t+0\sin^3 t\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos t+\sin t\right)^3\end{cases}.$$

2.e $\cos t+\sin t=\sqrt{2}(\cos(t-\pi/4))$ et $-\cos t+\sin t=\sqrt{2}(\sin(t-\pi/4))$ donc $\begin{cases}X(t)=2\cos^3\tau\\ Y(t)=2\sin^3\tau\end{cases}$.

La courbe $\mathcal{C}'$ apparaît donc comme l'image de $\mathcal{C}$ par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$ (qui transforme le repère $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$) composée avec l'homothétie de centre O et de rapport 2 (qui fait apparaître le facteur 2 dans la description du système).

3.a Si $M(t)$ est régulier alors :

$D(t):\sin t(x-\cos^3 t)+\cos t(y-\sin^3 t)=0$ ou $\sin t\cdot x+\cos t\cdot y=\sin t\cos t$.

Si $M(t)$ est irrégulier, l'expression est encore valable.

3.b $A(t)\begin{vmatrix}a\\ 0\end{vmatrix}$ et $B(t)\begin{vmatrix}0\\ b\end{vmatrix}$ avec $a=\cos t$ et $b=\sin t$. On a $A(t)B(t)=1$.

4.a $\sin t\cdot\dfrac{1}{2}\cos t+\cos t\cdot\dfrac{1}{2}\sin t=\sin t\cos t$ donc $P\in D(t)$.

Soit Q le symétrique de P par rapport à l'axe (Ox). $Q\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}\cos t\\ -\dfrac{1}{2}\sin t\end{vmatrix}$. La droite (OQ) est parallèle à $D(t)$.

Pour construire $D(t)$, on représente la parallèle à (OQ) passant par P.

4.b $H\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}$ avec $\begin{cases}\sin t\cdot x+\cos t\cdot y=\cos t\sin t & (H\in D(t))\\ -\cos t\cdot x+\sin t\cdot y=0 & (\overrightarrow{OH}\perp D(t))\end{cases}$ soit $\begin{cases}x=\cos t\sin^2 t\\ y=\cos^2 t\sin t\end{cases}$.

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OH}\begin{vmatrix}\cos t\\ \sin t\end{vmatrix}$ donc $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OP}$.

$D(t)$ étant construite ci-dessus, on détermine H puis M par la relation : $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OH}$.