Correction

Partie I

1.a Pas de difficultés.

1.b Idem, sans oublier de signaler que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$.

2.a Puisque f est $\mathcal{C}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

En dérivant $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda f(x,y)$ par rapport à x on obtient :

$x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=(\lambda-1)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ce qui permet de voir $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ solution de $E_{\lambda-1}$.

Même démarche pour étudier $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2.b fg est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $x\dfrac{\partial (fg)}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial (fg)}{\partial y}(x,y)=\ldots=(\lambda+\mu)f(x,y)g(x,y)$.

Donc $fg\in F_{\lambda+\mu}(\Omega)$.

2.c $(f^\alpha)(x,y)=\mathrm{e}^{\alpha\ln(f(x,y))}$ donc f^α est $\mathcal{C}^1$ par opération sur les fonctions $\mathcal{C}^1$.

$x\dfrac{\partial (f^\alpha)}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial (f^\alpha)}{\partial y}(x,y)=\ldots=(\alpha\lambda)(f^\alpha)(x,y)g(x,y)$ d'où $f^\alpha\in F_{\alpha\lambda}(\Omega)$.

3.a $r_\lambda=(p_x^2+p_y^2)^{\lambda/2}$ appartient à $F_\lambda(\Omega)$ compte tenu des études précédentes.

3.b $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} r_\lambda(x,y)=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad \lambda<0\\ 1 & \text{si} \quad \lambda=0\\ 0 & \text{si} \quad \lambda>0\end{cases}$.

Un prolongement par continuité en $(0,0)$ est possible seulement pour $\lambda\geq 0$.

Partie II

1.a $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y>0\right\}$ est ouvert car défini à partir d'une inégalité stricte.

1.b L'application Φ est bien définie sur Ω et est à valeurs dans Ω.

Considérons $\Psi:(x,y)\mapsto\left(\dfrac{x}{y},y\right)$, elle aussi est définie sur Ω et à valeurs dans Ω.

Puisque $\Phi\circ\Psi=\Psi\circ\Phi=\mathrm{Id}_\Omega$, on peut affirmer Φ bijective et $\Phi^{-1}=\Psi$.

2.a Puisque f et Φ sont $\mathcal{C}^1$, g l'est aussi par composition.

$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial}{\partial u}\big(f(uv,v)\big)=\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial x}(uv,v)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\dfrac{\partial}{\partial v}\big(f(uv,v)\big)=u\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(uv,v\big)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(uv,v)$.

2.b

$$\begin{aligned}f\in F_\lambda(\Omega)&\Leftrightarrow\forall(x,y)\in\Omega, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda f(x,y)\\&\Leftrightarrow\forall(u,v)\in\Omega, uv\frac{\partial f}{\partial x}(uv,v)+v\frac{\partial f}{\partial y}(uv,v)=\lambda f(uv,v)\\&\Leftrightarrow\forall(u,v)\in\Omega, v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\lambda g(u,v)\end{aligned}$$

2.c Résolvons l'équation $v\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\lambda g(u,v)$.

Soit g une solution sur Ω de cette équation.

Pour u fixé, l'application partielle $v\mapsto g(u,v)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $xy'=\lambda y$

dont les solutions sont $y(x) = Cx^\lambda$.

Par suite, $\exists C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(u,v) = C(u)v^\lambda$.

Or puisque g est $\mathcal{C}^1$, $C : u \mapsto \dfrac{g(u,v)}{v^\lambda}$ l'est aussi et donc C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Ainsi g est de la forme $g(u,v) = C(u)v^\lambda$ avec C fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

La réciproque est immédiate.

Par suite $F_\lambda(\Omega) = \left\{(x,y) \mapsto C\left(\dfrac{x}{y}\right) y^\lambda \,/\, C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$.

Partie III

1.a $t \mapsto (tx, ty)$ est $\mathcal{C}^1$ et donc φ l'est par composition. $\varphi'(t) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$.

1.b Si $f \in F_0(\Omega)$ alors $\forall t > 0, t\varphi'(t) = 0$ et donc $\varphi'(t) = 0$.

Par suite φ est constante égale à $\varphi(1)$ ce qui permet d'écrire $\forall t > 0, f(tx,ty) = f(x,y)$.

Inversement si $\forall (x,y) \in \Omega, \forall t > 0, f(tx,ty) = f(x,y)$ alors, en dérivant cette relation par rapport à t :

$x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = 0$ puis en évaluant en $t = 1$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Ainsi $f \in F_0(\Omega)$.

1.c Si f est solution de E_0 sur Ω alors $f(x,y) = f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ (en prenant $t = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$).

Donc f est de la forme proposée (avec $\varphi = f$).

Inversement, si f est de la forme : $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω par composition et satisfait au critère énoncé en 1.b. On peut donc conclure.

2.a ($\Rightarrow$) Si $f \in F_\lambda(\Omega)$ alors $g = f \times r_{-\lambda} \in F_0(\Omega)$.

($\Leftarrow$) Si $g \in F_0(\Omega)$ alors $f = g \times r_\lambda \in F_\lambda(\Omega)$.

2.b Les solutions de E_λ sur Ω sont les fonctions de la forme :

$$(x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\lambda/2} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

avec φ fonction réelle $\mathcal{C}^1$ définie sur Ω.