Correction

Partie I

1. Clairement $F = \mathrm{Vect}(I,A,B)$, donc F est un sous-espace vectoriel et (I,A,B) en est une famille génératrice. Puisque $\lambda I + \mu A + \nu B = O_3 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$, la famille (I,A,B) est aussi libre et forme donc une base de F. Par suite $\dim F = 3$.

2.a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + B$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

2.b $MM' = (aa' + bb' + cc')I + (ab' + a'b + bc' + b'c)A + (ac' + bb' + a'c)B$

2.c $F \subset M_3(\mathbb{R})$, $I \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall M, M' \in F$ on a $\lambda M + \mu M' \in F$ et $MM' \in F$ donc F est une sous-algèbre de $M_3(\mathbb{R})$. Comme de plus en 2.b, on observe $MM' = M'M$, F est commutative.

2.d $\det A = 0$ donc A n'est pas inversible. Or $A \neq 0$ et $A \in F$ donc F n'est pas un corps.

3.a $\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b & c \\ 0 & a+c & b \\ c-a & b & a \end{vmatrix} = (a-c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a+c & b \\ -1 & b & a \end{vmatrix} = (a-c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a+c & b \\ 0 & 2b & c+a \end{vmatrix}$

donne $\det M = (a-c)\begin{vmatrix} a+c & b \\ 2b & c+a \end{vmatrix} = (a-c)((a+c)^2 - 2b^2) = (a-c)(a - \sqrt{2}b + c)(a + \sqrt{2}b + c)$

3.b $MM' = I \Leftrightarrow \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 1 \\ ab' + a'b + bc' + b'c = 0 \\ ac' + bb' + a'c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 1 \\ ba' + (a+c)b' + bc' = 0 \\ ca' + bb' + ac' = 0 \end{cases}$

Ceci est un système (en l'inconnue (a',b',c')) de déterminant :

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{vmatrix} = (a-c)(a + \sqrt{2}b + c)(a - \sqrt{2}b + c) = \delta$.

Ce système est de Cramer ssi M est inversible et sa solution est alors :

$a' = \dfrac{a^2 + ac - b^2}{\delta}, b' = \dfrac{b(c-a)}{\delta}, c' = \dfrac{b^2 - ac - c^2}{\delta}$.

3.c M est inversible ssi $\delta \neq 0$. (La question paraît mal positionnée, mais l'énoncé était ainsi…)

Partie II

1.a $T(a,b,c) \in O(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \\ (C_1 \mid C_2) = (C_2 \mid C_3) = (C_3 \mid C_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ (a+c)^2 + 2b^2 = 1 \\ 2b(a+c) = 0 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \\ b(a+c) = 0 \end{cases}$

1.b Si $b = 0$ alors $ac = 0$ d'où $c = 0$ (et $a = \pm 1$) ou $a = 0$ (et $c = \pm 1$).
Les matrices ainsi obtenues sont $I, -I, B$ et $-B$.
I et $-B$ sont les seules parmi ces quatre de déterminant positif.
Si $b \neq 0$ alors $c = -a$, $b^2 = 2a^2$ puis $4a^2 = 1$ d'où

$(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ ou $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$.

Les triplets conduisant à des déterminants positifs sont les deux derniers.

2. $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u)\in O(3)$.

Soit $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$. On a $u(x)=x\Leftrightarrow x_1-x_3=0$.

Donc u est une réflexion par rapport à l'hyperplan d'équation $x_1-x_3=0$.

3. $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(v)\in O(3)$

Soit $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$. On a $v(x)=x\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_1+\sqrt{2}x_2+x_3=0\\x_1-\sqrt{2}x_2+x_3=0\\x_1+\sqrt{2}x_2-3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=\sqrt{2}x_3\end{cases}$.

v est donc une rotation vectorielle autour de l'axe $D=\mathrm{Vect}(\omega)$ avec $\omega=e_1+\sqrt{2}e_2+e_3$.

Orientons D par le vecteur w est déterminons θ angle de cette rotation.

$2\cos\theta+1=\mathrm{tr}(C)=-1$ donne $\cos\theta=-1$.

Par suite v est un demi-tour d'axe D.

Partie III

1. $K^2=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}$, $K^3=K$. Par récurrence, $K^n=K^2$ si n est pair et $K^n=K$ pour n impair.

2. $M=I+2K$. Puisque I et K commutent, $M^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^kK^k=I+a_nK+b_nK^2$.

3. $1+a_n+b_n=(1+2)^n=3^n$ et $1-a_n+b_n=(1-2)^n=(-1)^n$.

Donc $a_n=\frac{3^n-(-1)^n}{2}$ et $b_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}-1$.