Correction

Partie I

1.a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

1.b $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

1.c (u_n) ne peut par converger car $u_n \to \ell \in \mathrm{R}$ donne $u_{2n} - u_n \to 0$ or $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Par suite (u_n) diverge, et puisque (u_n) est croissante, $u_n \to +\infty$.

2.a Soit $f : \left]-1, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

f est décroissante sur $\left]-1, 0\right]$ et croissante sur $\left[0, +\infty\right[$.

Or $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, f(x) \geq 0$.

2.b $\ln\dfrac{n+2}{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$.

$-\ln\dfrac{n+1}{n} = \ln\dfrac{n}{n+1} = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leq -\dfrac{1}{n+1}$ puis $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln\dfrac{n+1}{n}$.

2.c $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+2}{n+1} \geq 0$, donc (a_n) est croissante.

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+1}{n} \leq 0$, donc (b_n) est décroissante.

$b_n - a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\dfrac{n+1}{n} \to 0$.

Ainsi (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

2.d On a $b_n \to \gamma$ donc $b_n = u_n - \ln n = \gamma + o(1)$.

Partie II

1.a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3v_n + \frac{n(3n+5)}{2}$

1.b $v_n = \dfrac{1}{3}(n+1)^3 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{n(3n+5)}{6} = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.a $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$.

2.b $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = u_{2n+1} - \frac{1}{2}u_n - 1$.

2.c $S_n = 6u_n + 6(u_{n+1} - 1) - 24(u_{2n+1} - \dfrac{1}{2}u_n - 1) = 18u_n + 6u_{n+1} - 24u_{2n+1} + 18$

3. $S_n = 18\ln n + 18\gamma + 6\ln(n+1) + 6\gamma - 24\ln(2n+1) - 24\gamma + 18 + o(1)$

donne $S_n = \ln\dfrac{n^{18}(n+1)^6}{(2n+1)^{24}} + 18 + o(1) \to 18 - 24\ln 2$.