Correction

Partie I

1.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
$p_{n+1} = p_n + 2q_n \underset{HR}{\in} \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = p_n + q_n \underset{HR}{\in} \mathbb{N}^*$.
Récurrence établie.

1.b Pour $n = 0$: ok
Pour $n > 0$: $p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1} \geq p_{n-1} + q_{n-1} = q_n$.

2.a $u_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} = 1 + \dfrac{1}{u_n + 1}$.

2.b $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n + 2) - \sqrt{2}(u_n + 1)}{u_n + 1} = \dfrac{u_n(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{u_n + 1} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

Puisque $u_n = \dfrac{p_n}{q_n} \geq 1$ on a $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{u_n + 1}\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

2.c Par récurrence on a aisément : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^n \left|u_0 - \sqrt{2}\right|$ or $\left|\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\right| < 1$ donc $\left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^n \to 0$ puis par comparaison $u_n \to \sqrt{2}$.

3.a $p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2(p_n + q_n) = p_{n+1} + 2p_n + \left(p_{n+1} - p_n\right) = 2p_{n+1} + p_n$. $a = 2, b = 1$.

3.b (p_n) est une suite récurrente linéaire double d'équation caractéristique : $r^2 = 2r + 1$ de racines $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \lambda(1 + \sqrt{2})^n + \mu(1 - \sqrt{2})^n$.

$p_0 = 1$ et $p_1 = p_0 + 2q_0 = 3$ donne : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(1 + \sqrt{2}) + \mu(1 - \sqrt{2}) = 3 \end{cases}$.

Après résolution $\lambda = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$ et $\mu = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ d'où $p_n = \dfrac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1 - \sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$.

3.c $q_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + 2q_n + q_{n+1} = (q_{n+1} - q_n) + 2q_n + q_{n+1} = 2q_{n+1} + q_n$.
(q_n) est une suite récurrente linéaire double de même équation caractéristique que (p_n).
donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \lambda(1 + \sqrt{2})^n + \mu(1 - \sqrt{2})^n$.

$q_0 = 1$ et $q_1 = p_0 + q_0 = 2$ donne : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(1 + \sqrt{2}) + \mu(1 - \sqrt{2}) = 2 \end{cases}$.

Après résolution $\lambda = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}$ et $\mu = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$ d'où $q_n = \dfrac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1 - \sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}$.

3.d $p_n \sim \dfrac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$ et $q_n \sim \dfrac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}$ car $\left|1 - \sqrt{2}\right| < \sqrt{2} + 1$.

Par suite $u_n = \dfrac{p_n}{q_n} \sim \sqrt{2}$ et donc $u_n \to \sqrt{2}$.

Partie II

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons les trois propriétés simultanément.
Pour $n = 0$: it's good
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
Comme $v_n \in [1,2]$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right)$ est bien définie.
De plus $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{1}\right) = 2$ et $v_{n+1} \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 1$ donc $v_{n+1} \in [1,2]$.
Enfin puisque $v_n \in \mathbb{Q}$, on a $v_{n+1} \in \mathbb{Q}$ par opérations sur les nombres rationnels.
Récurrence établie

2. $v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{v_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(v_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(v_n - \sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2} - v_n}{v_n\sqrt{2}}$

donc $v_{n+1} - \sqrt{2} = \left(v_n - \sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{v_n\sqrt{2}}\right) = \left(v_n - \sqrt{2}\right)\frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n} = \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}$.

3. $\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \frac{\left|v_n - \sqrt{2}\right|}{2\left|v_n\right|}\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|v_n - \sqrt{2}\right|$ car $v_n \in [1,2]$.

Par suite $\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|v_0 - \sqrt{2}\right| \to 0$ et par comparaison $v_n \to \sqrt{2}$.

Partie III

1. $u_3 = \frac{17}{12} = 1{,}417$, $v_3 = 1{,}414$ et $\sqrt{2} = 1{,}414$ à 10^{-3} près.

2.a $t_{n+1} = \frac{v_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} - \sqrt{2}} = \frac{\frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}}{\frac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1}\left(u_n - \sqrt{2}\right)} = \frac{u_n + 1}{1 - \sqrt{2}}\frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n}t_n$.

2.b Par opérations sur les limites $\frac{u_n + 1}{1 - \sqrt{2}}\frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n} \to 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ ce terme est inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{2}$.
On obtient alors par récurrence : $\forall n \geq N, \left|t_n\right| \leq \frac{1}{2^{n-N}}\left|t_N\right|$ et puisque $\frac{1}{2^{n-N}} \to 0$ on conclut $t_n \to 0$.
Ainsi la suite (v_n) converge vers $\sqrt{2}$ plus vite que la suite (u_n).