Modèle compartimental SIR

Modèle SIR

On étudie le système différentiel avec conditions initiales

$$\begin{cases} x' = -\beta xy \\ y' = \beta xy - \gamma y \\ z' = \gamma y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x_0 \\ y' = y_0 \\ z' = z_0 \end{cases}$$

On supposera $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ et sans que cela influe l'étude $z_0 = 0$ (quitte à considérer $z - z_0$). On vérifie que la quantité $x(t) + y(t) + z(t)$ est constante le long des solutions : on normalise celle-ci en la prenant égale et en choisissant $x_0 = 1 - y_0$.

Étude mathématique

Un théorème hors-programme (le théorème de Cauchy-Lipshitz) permet de démontrer :

— le problème différentiel posé admet une unique solution ;

— celle-ci est définie sur $\mathbb{R}$;

— les quantités $x(t)$ et $y(t)$ sont toujours strictement positives.

On vérifie alors aisément :

— la fonction x décroît ;

— la fonction z croît ;

— les trois fonctions x, y, z convergent en $+\infty$.

On ambitionne de calculer leurs limites $x_\infty, y_\infty, z_\infty$.

Étude asymptotique

On détermine une *intégrale première* de la dynamique en intégrant la deuxième équation exprimée

$$y' = -x' + \tau\frac{x'}{x} \text{ avec } \tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

et on obtient

$$y(t) - y_0 = x_0 - x(t) + \tau \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)$$

La fonction y est donc entièrement déterminée à partir de x.

On pose $\varphi(x) = x - \tau\ln(x)$ et on peut étudiez ses variations.

L'intégrale première s'exprime

$$y(t) - y_0 = \varphi(x_0) - \varphi(x(t)) \tag{1}$$

Puisque $z' = \gamma y$ et que z converge en $+\infty$, la fonction y tend vers 0 : $y_\infty = 0$.

Grâce à l'équation 1, on obtient

$$\varphi(x_\infty) = \varphi(x_0) + y_0 \tag{2}$$

et

$$y = \varphi(x_\infty) - \varphi(x) \tag{3}$$

L'équation (2) est transcendante mais peut être résolue numériquement afin de calculer x_∞ puis $z_\infty = 1 - x_\infty$.

Allure des solutions

D'après les variations de φ, si $x_0 < \tau$ la fonction $t \mapsto \varphi(x(t))$ est croissante et donc y est décroissante : la population y s'éteint sans expansion. Cette situation est systématique dès que $\tau \geq 1$ (*i.e.* $\gamma > \beta$).

À l'inverse, si $x_0 > \tau$ alors les variations de $t \mapsto \varphi(x(t))$ assure que y est croissante avant d'être décroissante. Il y a donc un maximum à la fonction y : déterminons celui-ci t_{max}, y_{max}.

Quand $t = t_{max}$, y' s'annule et donc $x(t_{max}) = \tau$ puis

$$y_{max} = y_0 + \varphi(x_0) - \varphi(\tau) \tag{4}$$

Calculer t_{max} est plus technique...

On commence par exprimer x' en fonction de x.

$$x' = -\beta xy = -\beta x(y_0 - \varphi(x) + \varphi(x_0))$$

et l'on tire

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\beta x(\varphi(x) - \varphi(x_\infty))}$$

En intégrant

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\beta x(\varphi(x) - \varphi(x_\infty))} \tag{5}$$

En particulier, on obtient t_{max} en intégrant de x_0 à $x_{t_{max}} = \tau$

$$t_{max} = \int_{x_0}^{\tau} \frac{\mathrm{d}x}{\beta x\,(\varphi(x) - \varphi(x_\infty))} \tag{6}$$

De façon plus générale, on peut ici paramétrer la solution x en déterminant le t qui correspond à une valeur de x donnée... Évidemment c'est l'inverse de l'usage où l'on préfère exprimer x en fonction de t.

Date moyenne de contamination

Dans le système exprimant la dynamique

$$\begin{cases} x' = -\beta xy \\ y' = \beta xy - \gamma y \\ z' = \gamma y \end{cases}$$

la quantité $\beta x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ peut se comprendre comme le nombre d'individus sains devenant malades entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$. On a alors naturellement

$$\int_0^{+\infty} \beta x(t)y(t)\,\mathrm{d}t = x_0 - x_\infty$$

qui est le nombre total d'individus tombant malades. Pour déterminer l'instant moyen où ils tombent en maladie, il suffit de calculer

$$T = \frac{\int_0^{+\infty} t\beta x(t)y(t)\,\mathrm{d}t}{x_0 - x_\infty}$$

On peut exprimer différemment l'intégrale par intégration par parties et changement de variable

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \beta tx(t)y(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} -tx'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t(x_\infty - x(t))\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x_\infty - x(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_\infty}^{x_0} \frac{x_\infty - x}{\beta x(\varphi(x) - \varphi(x_\infty))}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On notera que le crochet converge vers 0 car (5) fournit

$$t \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta x_\infty \varphi'(x_\infty)} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x - x_\infty} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x(t) - x_\infty)}{\beta x_\infty \varphi'(x_\infty)}$$

Finalement,

$$T = \frac{1}{x_0 - x_\infty} \int_{x_\infty}^{x_0} \frac{x - x_\infty}{\beta x(\varphi(x_\infty) - \varphi(x))} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{x_0 - x_\infty} \int_{x_\infty}^{x_0} \frac{x - x_\infty}{\beta x y} \,\mathrm{d}x$$

Modélisation probabiliste

Étude de la survie d'une communauté

On suppose une population de N individus définissant des variables aléatoires $X_i(t)$ pour $i \in [\![1\,;N]\!]$ et $t \in [0\,;+\infty[$ avec

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est en vie à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose

$$\forall i \in [\![1\,;N]\!], X_i(0) = 1 \text{ et } X_i \text{ est une fonction décroissante de } t$$

On suppose aussi qu'il existe un réel $\alpha \in]0\,;1[$ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}\left(X_i(t+h) = 1 \mid X_i(t) = 1\right)}{h} = 1 - \alpha$$

Le paramètre $1 - \alpha$ correspond à la probabilité instantanée de survie et, puisque

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}\left(X_i(t+h) = 0 \mid X_i(t) = 1\right)}{h} = \alpha$$

le paramètre α est la probabilité instantanée de décès.

On pose $f(t) = \mathrm{E}(X_i(t) = 1)$ l'espérance commune des variables $X_i(t)$.

On a

$$f(t) = 0 \times \mathrm{P}(X_i(t) = 0) + 1 \times \mathrm{P}(X_i(t) = 1) = \mathrm{P}(X_i(t) = 1)$$

En écrivant

$$\mathrm{P}(X_i(t + \mathrm{d}t) = 1) = (1 - \alpha)\,\mathrm{P}(X_i(t) = 1)\,\mathrm{d}t$$

on obtient

$$f(t + \mathrm{d}t) = f(t) - \alpha f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc f est solution de l'équation différentielle $y' = -\alpha y$.

Si l'on pose

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i(t)$$

on obtient la proportion d'individus vivants dans la population. Lorsque N est grand, cette quantité peut être approchée par l'espérance commune des variables aléatoires X_i : Ainsi, x est solution de l'équation différentielle

$$x' = -\alpha x$$

et vérifie la condition initiale $x(0) = 1$.

Durée de vie

Pour alléger les écritures qui suivent, n'écrivons plus l'indice i. Posons T la durée de vie de l'individu d'indice i

$$T = \sup_{t \in [0;+\infty[} \{t \mid X(t) = 1\}$$

On a

$$(t \leq T < t + \mathrm{d}t) = (X(t) = 1) \cap (X(t + \mathrm{d}t) = 0)$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(t \leq T < t + \mathrm{d}t) &= \mathrm{P}(X(t) = 1)\,\mathrm{P}\left(X(t + \mathrm{d}t) = 0 \mid X(t) = 1\right) \\ &= \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{P}(t \leq T < t + \mathrm{d}t) = \int_0^{+\infty} \alpha t\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Le paramètre α est donc aussi étroitement liée à l'espérance de vie.

Retour au modèle SIR

On suppose une population de N individus définissant des variables aléatoires $X_i(t), Y_i(t)$ et $Z_i(t)$ pour $i \in [\![1\,;N]\!]$ et $t \in [0\,;+\infty[$ avec

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est sain à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Y_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est malade à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Z_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est en rémission à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable X_i est décroissante, la variable Z_i est croissante, la somme $X_i + Y_i + Z_i$ est constante.

On suppose encore que la population est suffisamment grande pour que

$$x(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i(t), y(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i(t) \text{ et } z(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i(t)$$

correspondent à de bonnes approximations de $\mathrm{E}(X_i(t)), \mathrm{E}(Y_i(t))$ et $\mathrm{E}(Z_i(t))$.

On suppose qu'un individu sain peut devenir malade entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ avec une probabilité proportionnelle avec l'effectif des individus malades :

$$\mathrm{P}\left(X_i(t + \mathrm{d}t) = 0 \mid X_i(t) = 1\right) = \beta y(t) dt$$

On en déduit l'équation

$$x'(t) = -\beta x(t) y(t)$$

On suppose qu'un individu malade entre en rémission avec une probabilité instantanée γ.

$$\mathrm{P}\left(Z_i(t + \mathrm{d}t) = 1 \mid Y_i(t) = 1\right) = \gamma$$

On en déduit l'équation

$$z'(t) = \gamma y(t)$$

Enfin, la somme $x + y + z$ étant constante, on obtient l'équation

$$y' = \beta x(t) y(t) - \gamma y(t)$$

Interprétation des paramètres

Au final :

— le paramètre β est lié à la probabilité instantanée de contamination d'un individu sain par les individus malades ;

— le paramètre $1/\gamma$ se comprend comme la durée moyenne pendant laquelle l'individu est malade.

Renouvellement de la population

On suppose que la population à une espérance de vie égale à $1/\alpha$. La maladie étudiée est supposée ne pas influer sur l'espérance de vie des individus. La population totale reste constante de sorte que toute disparition d'un individu, quelle que soit sa classe d'appartenance, est automatiquement compensée par l'apparition d'un individu sain.

Le système différentiel associé à cette étude est le suivant

$$\begin{cases} x' = -\beta xy + \alpha(y+z) \\ y' = \beta xy - (\alpha+\gamma)y \\ z' = \gamma y - \alpha z \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} x' = -\beta xy + \alpha(1-x) \\ y' = \beta xy - (\alpha+\gamma)y \\ z' = \gamma y - \alpha z \end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipshitz, on peut montrer :

- pour une condition initiale donnée, il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$;
- si la solution est amorcée avec $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ et $z(0) = 1 - x(0) - y(0) \geq 0$, la solution vérifie $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ et $z(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Lorsque $\beta \geq \alpha + \gamma$, il semble que la solution converge rapidement vers $x_\infty, y_\infty, z_\infty$ avec

$$x_\infty = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}, y_\infty = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} - \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } z_\infty = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} - \frac{\gamma}{\beta}$$

Malheureusement, je ne parviens pas à la démontrer pour le moment...

Âge de contamination

On suppose être « en régime stationnaire » :

- les individus, sains, malades et remis sont en proportion x_∞, y_∞ et z_∞ ;
- un individus naissant à la probabilité de devenir malade durant sa vie égale à $y_\infty + z_\infty$;

On suppose qu'un individu i apparaît à l'instant t_0 et qu'il tombera malade : déterminons l'âge moyen auquel il tombe malade. Pour $t \geq t_0$, la probabilité que l'individu tombe malade entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ est

$$\mathrm{P}\left(Y_i(t+\mathrm{d}t) = 1 \mid X_i(t) = 1\right) = \beta y_\infty \,\mathrm{d}t$$

et celle que l'individu décède entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ (sans donc être tombé malade) est

$$\mathrm{P}\left(X_i(t+\mathrm{d}t) = 0, Y_i(t+\mathrm{d}t) = 0 \mid X_i(t) = 1\right) = \alpha \,\mathrm{d}t$$

On déduit, pour $t \geq 0$

$$\mathrm{P}(X_i(t_0+t)=1) = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta y_\infty)t}$$

L'individu i tombe malade entre l'âge t et $t+\mathrm{d}t$ avec la probabilité

$$\mathrm{P}(Y_i(t_0+t+\mathrm{d}t)=1, X_i(t_0+t)=1) = \beta y_\infty\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta y_\infty)t}$$

La probabilité que l'individu i tombe malade est alors

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(Y_i(t_0+t+\mathrm{d}t)=1, X_i(t_0+t)=1) = \frac{\beta y_\infty}{\alpha+\beta y_\infty}$$

On vérifie par le calcul que cette valeur correspond à $y_\infty + z_\infty$ ce qui est rassurant…

La probabilité que l'individu tombe malade entre l'âge t et $t+\mathrm{d}t$ sachant qu'il tombera malade à terme est

$$\frac{1}{y_\infty+z_\infty}\,\mathrm{P}(Y_i(t_0+t+\mathrm{d}t)=1, X_i(t_0+t)=1)$$

L'âge moyen auquel l'individu tombe malade est alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_\infty+z_\infty}\int_0^{+\infty} t\times \mathrm{P}(Y_i(t_0+t+\mathrm{d}t)=1, X_i(t_0+t)=1)\\ = \frac{\beta y_\infty}{(y_\infty+z_\infty)(\alpha+\beta y_\infty)^2} = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha\beta}\end{aligned}$$

(tout ceci sous réserve de respect de la condition $\beta \geq \alpha+\gamma$, sinon, les malades finissent par disparaître).