Modélisation probabiliste

Étude de la survie d'une communauté

On suppose une population de M individus définissant des variables aléatoires $X_i(t)$ pour $i \in [\![1\,;M]\!]$ et $t \in [0\,;+\infty[$ avec

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est en vie à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose

$$\forall i \in [\![1\,;M]\!], X_i(0) = 1 \text{ et } X_i \text{ est une fonction décroissante de } t$$

On suppose aussi qu'il existe un réel $\alpha \in]0\,;1[$ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}\left(X_i(t+h) = 1 \mid X_i(t) = 1\right)}{h} = 1 - \alpha$$

Le paramètre $1 - \alpha$ correspond à la probabilité instantanée de survie et, puisque

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}\left(X_i(t+h) = 0 \mid X_i(t) = 1\right)}{h} = \alpha$$

le paramètre α est la probabilité instantanée de décès.

On pose $f(t) = \mathrm{E}(X_i(t) = 1)$ l'espérance commune des variables $X_i(t)$.

On a

$$f(t) = 0 \times \mathrm{P}(X_i(t) = 0) + 1 \times \mathrm{P}(X_i(t) = 1) = \mathrm{P}(X_i(t) = 1)$$

En écrivant

$$\mathrm{P}(X_i(t + \mathrm{d}t) = 1) = (1 - \alpha)\,\mathrm{P}(X_i(t) = 1)\,\mathrm{d}t$$

on obtient

$$f(t + \mathrm{d}t) = f(t) - \alpha f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc f est solution de l'équation différentielle $y' = -\alpha y$.

Si l'on pose

$$x(t) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i(t)$$

Durée de vie

Pour alléger les écritures qui suivent, n'écrivons plus l'indice i. Posons T la durée de vie de l'individu d'indice i

$$T = \sup_{t \in [0;+\infty[} \{t \mid X(t) = 1\}$$

On a

$$(t \leq T < t + \mathrm{d}t) = (X(t) = 1) \cap (X(t + \mathrm{d}t) = 0)$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(t \leq T < t + \mathrm{d}t) &= \mathrm{P}(X(t) = 1)\, \mathrm{P}\left(X(t + \mathrm{d}t) = 0 \mid X(t) = 1\right) \\ &= \alpha\, \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^{+\infty} t\, \mathrm{P}(t \leq T < t + \mathrm{d}t) = \int_0^{+\infty} \alpha t\, \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Le paramètre α est donc aussi étroitement liée à l'espérance de vie.

Population

On pose

$$N(t) = \sum_{i=1}^{M} X_i(t)$$

la population à l'instant t. Pour $\mathrm{d}t$ petit, on peut considérer que

$$N(t + \mathrm{d}t) = N(t) \quad \text{ou} \quad N(t + \mathrm{d}t) = N(t) - 1$$

On a

$$\mathrm{P}\big(N(t + \mathrm{d}t) = N(t)\big) = \mathrm{P}\big(\forall i, X_i(t + \mathrm{d}t) = X_i(t)\big)$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}\big(N(t + \mathrm{d}t) = N(t)\big) = \prod_{i=1}^{M} \mathrm{P}\big(X_i(t + \mathrm{d}t) = X_i(t)\big)$$

Si $X_i(t) = 0$ alors $\mathrm{P}\big(X_i(t + dt) = X_i(t)\big) = 1$.
Si $X_i(t + \mathrm{d}t) = 1$ alors $\mathrm{P}\big(X_i(t + dt) = X_i(t)\big) = 1 - \alpha\, \mathrm{d}t$.

$$\mathrm{P}\big(N(t + \mathrm{d}t) = N(t)\big) = \big(1 - \alpha\, \mathrm{d}t\big)^{N(t)}$$

À l'ordre 1,
$$\mathrm{P}\big(N(t+\mathrm{d}t)=N(t)\big)=1-\alpha N(t)\,\mathrm{d}t$$
Par complément
$$\mathrm{P}\big(N(t+\mathrm{d}t)=N(t)-1\big)=\alpha N(t)\,\mathrm{d}t$$
La probabilité d'un décès dans la population dans le laps de temps dt est proportionnelle à α et au nombre de vivant $N(t)$. C'est naturel, on aurait pu en convenir dès le début. Le gain ici est la démonstration (donc le cadre hypothétique d'étude) et l'interprétation de α liée à l'espérance de vie individuelle.

On étudie $x : t \mapsto \mathrm{E}\big(N(t)\big)$ avec
$$\mathrm{E}\big(N(t)\big)=\sum_{k=0}^{M} k\,\mathrm{P}\big(N(t)=k\big)$$
Avec
$$\mathrm{P}\big(N(t+\mathrm{d}t)=k\big)=\mathrm{P}\big(N(t)=k\big)(1-\alpha N(t)\,\mathrm{d}t)+\mathrm{P}\big(N(t)=k+1\big)\alpha N(t)\,\mathrm{d}t$$
on montre par le calcul (le faire avec un glissement d'indice et l'ajout de 0 pour les termes manquant dans la somme)
$$\mathrm{E}\big(N(t+\mathrm{d}t)\big)=E(N(t))-\alpha E\big(N(t)\big)\,\mathrm{d}t$$
Cet espérance est donc solution de l'équation différentielle $x'=-\alpha x$.

Naissance

Oublions les décès...

« Inspiré » par ce qui précède, on peut estimer la probabilité d'une naissance comme égale à
$$\beta N(t)\,\mathrm{d}t$$
avec β un facteur de fécondité :
$$\mathrm{P}\big(N(t+\mathrm{d}t)-N(t)=1\big)=\beta N(t)\,\mathrm{d}t$$
Si β est constant : modèle Malthusien.

Si $\beta=\rho\big(K-N(t)\big)^{+}$: la fécondité devient nulle lorsqu'on s'approche d'un seuil critique K.

Si $\beta=\rho\frac{M}{M+F}$: la fécondité est proportionnelle à la probabilité de rencontre pour une femelle d'une personne de sexe opposé.