Exercice 1 [02961] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n > 0$,

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1})$$

Étudier la suite (u_n) puis la série de terme général u_n.

Exercice 2 [03057] [Correction]
On note $(z_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général

$$z_n = 2n \exp\left(\frac{\mathrm{i}t}{\sqrt{n}}\right)$$

Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n-1}{z_n-1}\frac{2n-2}{z_n-2}\cdots\frac{2n-n}{z_n-n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{2n-k}{z_n-k}\right|$$

Exercice 3 [02951] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

(a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

(b) Même question lorsque u_n est définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^{1+\alpha}$ (avec $\alpha > 0$).

Exercice 4 [02950] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$.
On pose

$$v_n = \frac{1}{nu_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 u_n}\left(\sum_{k=1}^{n} k u_k\right)$$

On suppose que (v_n) tend vers $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Étudier la convergence de (w_n).

Exercice 5 [02960] [Correction]
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \left]0\,;1\right]$ et que, pour un certain $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}^{\beta} = \sin u_n^{\beta}$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 6 [02962] [Correction]
Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 7 [03047] [Correction]
Soit (u_n) une suite complexe telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{pn} - u_n \to 0$. Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?

Exercice 8 [03097] [Correction]
On dit que la série de terme général u_n enveloppe le réel A si, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)| \leq |u_{n+1}|$$

On dit qu'elle enveloppe strictement le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\left]0\,;1\right[$ telle que pour tout entier naturel n :

$$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}$$

(a) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$.
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.

(b) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe strictement A, alors elle est alternée.
Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.

(c) Démontrer que, si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$
$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est du signe de u_{n+1}, alors, elle enveloppe strictement A.

(d) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe A et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement A.

Exercice 9 [02949] [Correction]
Étudier la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 10 [01335] [Correction]
Étudier la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$$

Exercice 11 [02964] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right)$$

Exercice 12 [02957] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive, décroissante, de limite nulle.
On suppose que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} u_k - nu_n$$

est bornée.
Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 13 [03207] [Correction]
Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

(a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

(b) Soient a et b deux éléments de E déterminés par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$.

(c) Calculer

$$w_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$$

(d) On pose $c_n = a_n/b_n$ lorsque l'entier n est supérieur ou égal à 1. Démontrer l'existence de

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} c_n$$

(e) Démontrer l'existence d'un unique réel r tel que

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + rb_n) = 0$$

Exercice 14 [03045] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n : x \in \left]n\,;+\infty\right[\to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}$$

Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe un unique réel, noté x_n tel que $f_n(x_n) = a$.
Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 15 [01338] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

Exercice 16 [03086] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} \mathrm{e}^{\frac{n}{k}} \right)$$

Exercice 17 [02956] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n/S_n \text{ où } S_n = u_1 + \cdots + u_n$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$.

Exercice 18 [02958] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général u_n converge.
On note le reste d'ordre n

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Étudier la nature des séries de termes généraux u_n/R_n et u_n/R_{n-1}.

Exercice 19 [01337] [Correction]
Quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}?$$

Exercice 20 [02942] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue, concave et vérifiant $f(0) = 1$. Établir

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Exercice 21 [02977] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}\right)_{n\geq 0}$$

Exercice 22 [02945] [Correction]
Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels positifs.
Montrer

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} + (y_1 \dots y_n)^{1/n} \leq ((x_1 + y_1) \times \cdots \times (x_n + y_n))^{1/n}$$

Exercice 23 [01334] [Correction]
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.
Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a + x) - f(b + x))\,\mathrm{d}x$$

Exercice 24 [02965] [Correction]
Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 25 [02968] [Correction]
Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, où Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $\deg P \leq \deg Q - 2$.
Exprimer $\int_{\mathbb{R}} P/Q$ à l'aide des coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simple de P/Q.

Exercice 26 [01333] [Correction]
Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4 + x^8}$$

Exercice 27 [02970] [Correction]
On note E l'ensemble des fonctions $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}_+$ continues.
On pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

pour toute $f \in E$.
On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Étudier la suite (f_n).

(b) Soit $f = \lim(f_n)$.
Trouvez une équation différentielle dont f est solution.
Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Exercice 28 [02972] [Correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0\,;n[\text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n$$

Étudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 29 [02971] [Correction]
Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n.
On suppose que la série de terme général $a_n(1 + |x_n|)$ converge.
On pose

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x - x_n|$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 30 [02973] [Correction]
Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [0;1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

Exercice 31 [00795] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \left\|P^{-1}AP\right\|$$

Exercice 32 [03017] [Correction]
Montrer que $\{m - \ln n \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 33 [02944] [Correction]
Soit A une partie convexe et partout dense d'un espace euclidien E.
Montrer que $A = E$.

Exercice 34 [03021] [Correction]
Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F + G$ est fermé

Exercice 35 [03020] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall (a, b) \in A^2, \sqrt{ab} \in A$$

Montrer que $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $]\inf A ; \sup A[$.

Exercice 36 [03037] [Correction]
Caractériser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices dont la classe de similitude est fermée.
Même question avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Exercice 37 [02946] [Correction]
Soit a une suite de réels telle que $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est un intervalle.

Exercice 38 [02947] [Correction]
Déterminer les suites réelles bornées telle que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)_{n \geq 0}$ converge.

Exercice 39 [02975] [Correction]
Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de carré sommable, on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n - t}$$

où la variable t est réelle.

(a) Préciser le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.

(c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2 ; 1/2]$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est identiquement nulle.

Exercice 40 [02982] [Correction]
Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x$$

Exercice 41 [03159] [Correction]
Soit F une application continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0 < h < \delta$.

(a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n = \int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right) \mathrm{d}t$$

(b) On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right)$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 42 [03650] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée.

(a) Déterminer pour $x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} n\cos t(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t$$

(b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 43 [03094] [Correction]
On note

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et T^+ le sous-ensemble de T formé des matrices de coefficients diagonaux strictement positifs.

(a) Soit $M \in T$. Déterminer les puissances de M. Calculer $\exp(M)$.

(b) L'application $\exp\colon T \to T^+$ est-elle injective ? surjective ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
La suite (u_n) est à terme strictement positifs car $u_0 > 0$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ laisse stable l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Puisque pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$, la suite (u_n) est décroissante.
Puisque décroissante et minorée, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ln(1+\ell) = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2}u_n^2}{u_n^2} \to \frac{1}{2}$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{nu_n} \to \frac{1}{2}$$

On en déduit $u_n \sim \frac{2}{n}$ et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 2 : [énoncé]
Posons

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{2n-k}{z_n-k}\right|$$

On a

$$\ln P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{|z_n-k|^2}{|2n-k|^2}$$

Puisque

$$|z_n-k|^2 = (2n)^2 - 4nk\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + k^2 = (2n-k)^2 + 8nk\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$$

on obtient

$$\ln P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)\right)$$

Sachant $\sin^2 u = u^2 + \mathrm{O}(u^4)$, on peut écrire

$$\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{t^2}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\ln P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on a

$$-2\ln(P_n) \leq \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Posons S_n le second membre de cette comparaison. D'une part

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2n-k)^2} = \sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{2(2n-\ell)}{\ell^2} = 4n\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell^2} - 2\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell}$$

avec

$$\sum_{\ell=n}^{+\infty}\frac{1}{\ell^2} \sim \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Après calculs asymptotiques, on obtient

$$S_n \to (2 - 2\ln 2)t^2$$

Sachant $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$, on a

$$-2\ln P_n \geq S_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2$$

Puisque $0 \leq \frac{k}{(2n-k)^2} \leq \frac{1}{n}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

Finalement $-2\ln P_n$ est encadré par deux quantités de limite $(2-2\ln 2)t^2$. On en déduit

$$P_n \to \exp\left((\ln 2 - 1)t^2\right)$$

Exercice 3 : [énoncé]
Dans le cas où $u_0 = 0$, la suite est nulle.
Dans le cas où $u_0 = 1$, la suite est nulle à partir du rang 1
On suppose désormais ces cas exclus.

(a) La suite (u_n) est à termes dans $]0\,;1[$ car l'application $x \mapsto x - x^2$ laisse stable cet intervalle.
La suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ et donc $\ell = 0$.
Finalement (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n^3} \to 1$$
Par le théorème de Cesaro,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \to 1$$
et donc $\frac{1}{nu_n} \to 1$.
On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge.

(b) Comme ci-dessus, on obtient que (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
$$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{(u_n u_{n+1})^\alpha} \sim \frac{\alpha u_n^\alpha}{u_{n+1}^\alpha} \to \alpha$$
Par le théorème de Cesaro, $\frac{1}{nu_n^\alpha} \to \alpha$ et donc
$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}$$
avec $\lambda > 0$.
Si $\alpha \in\,]0\,;1[$, $\sum u_n$ converge et si $\alpha \geq 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. On observe que
$$\sum_{k=1}^n ku_n = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k$$
Par suite
$$w_n = \frac{n+1}{n}v_n - \frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^n S_k \quad (*)$$
.
Puisque $\frac{S_n}{nu_n} \to a$, on a $S_n \sim anu_n$.
La série de terme général S_n est une série à termes positifs divergente donc
$$\sum_{k=1}^n S_k \sim a\sum_{k=1}^n ku_k$$
Par suite
$$\frac{1}{n^2u_n}\sum_{k=1}^n S_k \sim aw_n$$
La relation $(*)$ dévient alors
$$w_n = \frac{n+1}{n}v_n - aw_n + \mathrm{o}(w_n)$$
et en on en déduit que
$$w_n \sim \frac{1}{a+1}v_n \to \frac{a}{a+1}$$

Exercice 5 : [énoncé]
Posons $v_n = u_n^\beta$. La suite (v_n) vérifie $v_n \in\,]0\,;1]$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque la fonction sinus laisse stable l'intervalle $]0\,;1]$, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in\,]0\,;1]$.
De plus, pour $x \geq 0$, $\sin x \leq x$ donc la suite (v_n) est décroissante.
Puisque décroissante et minorée, (v_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.
Finalement (v_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
On a
$$\frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2} = \frac{(v_n - v_{n+1})(v_{n+1} + v_n)}{v_n^2 v_{n+1}^2} \sim \frac{\frac{1}{6}v_n^3 \times 2v_n}{v_n^4} \to \frac{1}{3}$$
Par le théorème de Cesaro,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}^2} - \frac{1}{v_k^2}\right) \to \frac{1}{3}$$
et donc $\frac{1}{nv_n^2} \to \frac{1}{3}$. On en déduit $v_n \sim \frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}}$ puis
$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/(2\beta)}}$$
avec $\lambda > 0$.
Pour $\beta \in\,]0\,;1/2[$, $\sum v_n$ converge et pour $\beta \geq 1/2$, $\sum v_n$ diverge.

Exercice 6 : [énoncé]
Pour
$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$$
on pose
$$u_n = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
Ceci définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de sorte que ses premiers termes sont :
$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$$
Les termes sommées tendent vers 0 et les sommes partielles oscillent entre 0 et 1.

Exercice 7 : [énoncé]
Non, en effet considérons
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$$
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{np} - u_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k\ln k}$
On en déduit
$$0 \leq u_{np} - u_n \leq \frac{np-(n+1)+1}{n\ln n} = \frac{p-1}{\ln n} \to 0$$
alors que
$$u_n \geq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{n+1} \to +\infty$$

Exercice 8 : [énoncé]
(a) Pour $u_n = (-1)^n$, la série de terme général u_n est divergente et puisque ces sommes partielles valent 0 ou 1, elle enveloppe tout réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Pour $u_n = (-1)^n/(n+1)$, la série de terme général u_n satisfait le critère spécial des séries alternées et donc elle converge et la valeur absolue de son reste est inférieure à son premier terme. Cette série enveloppe donc sa somme, à savoir $\ln 2$.
Pour $u_n = 1/2^n$, la série de terme général u_n converge. Puisque $u_n \to 0$, le seul réel qu'elle peut envelopper est sa somme, or
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$
n'est pas inférieur à u_{n+1}. Cette série convergente n'enveloppe aucun réel.

(b) Posons pour la suite de notre étude
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
On a
$$\theta_{n+2}u_{n+2} = A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}$$
Puisque $\theta_{n+2} > 0$ et $\theta_{n+1} - 1 < 0$, on peut affirmer que u_{n+2} et u_{n+1} sont de signes opposés.
Puisque $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ est du signe de u_{n+1}, les réels $A - S_n$ et $A - S_{n+1}$ sont de signes opposés et donc A est encadré par S_n et S_{n+1}.

(c) Puisque $A - S_n$ est du signe de u_{n+1}, on peut écrire $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ avec $\theta_{n+1} \in \mathbb{R}_+$.
Puisque $A - S_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}$ est du signe de u_{n+2} et puisque u_{n+1} et u_{n+2} sont de signes opposés, on a $\theta_{n+1} - 1 \leq 0$ et donc $\theta_{n+1} \in [0\,;1]$.
On ne peut rien dire de plus, sauf à savoir que $A - S_n$ est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En effet pour $u_n = (-1)^n$ et $A = 1$, la série de terme général u_n est alternée et
pour n pair : $A - S_n = 1 - 1 = 0$ est du signe de u_{n+1}.
pour n impair : $A - S_n = 1 - 0 = 1$ est du signe de u_{n+1}.
Si en revanche, on suppose $A - S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, obtenir $\theta_{n+1} \in]0\,;1[$ est désormais immédiat.

(d) Par l'absurde, supposons $u_{n+1}, u_{n+2} > 0$.
On a $A - S_n \leq u_{n+1}$ donc $A - S_{n+1} \leq 0$ puis $A - S_{n+2} \leq -u_{n+2}$ et donc $|A - S_{n+2}| \geq |u_{n+2}|$. Or $|A - S_{n+2}| \leq |u_{n+3}|$ et $|u_{n+3}| < |u_{n+2}|$, c'est absurde et donc u_{n+1} et u_{n+2} ne sont pas tous deux strictement positifs. Un raisonnement symétrique établit qu'ils ne sont pas non plus tous deux strictement négatifs et donc la série de terme général u_n est alternée à partir du rang 1 (on ne peut rien affirmer pour le rang 0).
Puisque $A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1}$, on a
$-|u_{n+1}| - u_{n+1} \leq A - S_{n+1} \leq |u_{n+1}| - u_{n+1}$.
Si $u_{n+1} > 0$ alors $A - S_{n+1} \leq 0$ et donc du signe de u_{n+2}.
Si $u_{n+1} < 0$ alors $A - S_{n+1} \geq 0$ et donc à nouveau du signe de u_{n+2}.
Enfin $A - S_{n+1}$ n'est pas nul, car sinon
$A - S_{n+3} = A - S_{n+1} - (u_{n+2} + u_{n+3}) = -(u_{n+2} + u_{n+3})$ est de signe strict opposé à u_{n+2} et n'est donc pas du signe de u_{n+4}.
On peut alors exploiter le résultat du c) et affirmer que la série de terme général u_n encadre strictement A.

Exercice 9 : [énoncé]
On peut écrire
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}u_k(n)$$
avec $u_k(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^{-k}$.
On peut alors présumer
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k}=\frac{1}{1-1/\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$
Il ne reste plus qu'à l'établir...
Puisque $\ln(1+x)\leq x$ pour tout $x>-1$, on a
$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln(1-k/n)\right)\leq\mathrm{e}^{-k}$$
et donc on a déjà
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\leq\frac{1}{1-1/\mathrm{e}}$$
De plus, pour $N\in\mathbb{N}$, on a pour tout $n\geq N$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\geq\sum_{k=0}^{N-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-k}$$
Pour $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que
$$\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-k}\geq\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}-\varepsilon$$
et pour ce N fixé, il existe $N'\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geq N'$,
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\geq\sum_{n=0}^{N-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\geq\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-k}-\varepsilon$$
On a alors pour tout $n\geq N'$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\geq\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}-2\varepsilon$$
On peut donc conclure
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\to\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

Exercice 10 : [énoncé]
Puisque $u_n\to0$, il revient au même d'étudier la nature de la série de terme général
$$v_n=u_{2n}+u_{2n+1}$$
Or
$$v_n=\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)}+\frac{\sin(\ln(2n+1))-\sin(\ln 2n)}{2n+1}$$
D'une part
$$\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
et d'autre part en vertu du théorème des accroissements finis, il existe c compris entre $\ln 2n$ et $\ln(2n+1)$ tel que
$$\frac{\sin(\ln(2n+1))-\sin(\ln 2n)}{2n+1}=\frac{\cos(c)\left(\ln(2n+1)-\ln 2n\right)}{2n+1}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
On en déduit que $v_n=\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$ et donc la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Exercice 11 : [énoncé]
$$\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{4n}-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc la série étudiée est absolument convergente.
On a
$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=\sum_{k=1}^{4N+4}\frac{1}{k}-4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2}$$
Or
$$4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2}=2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}=2\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k}$$
Par le développement
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
on parvient à
$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=\ln(4N+4)+\gamma-2\ln(2N+1)-2\gamma+\ln N+\gamma+\mathrm{o}($$

Ainsi
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=0$$
(ce qui change du $\ln 2$ traditionnel… ;-)

Exercice 12 : [énoncé]
Posons $v_n=\sum_{k=1}^n u_k-nu_n$. On a
$$v_{n+1}-v_n=n(u_n-u_{n+1})\geq 0$$
La suite (v_n) est croissante et majorée donc convergente. Posons ℓ sa limite.
On a
$$u_n-u_{n+1}=\frac{1}{n}(v_{n+1}-v_n)$$
donc
$$\sum_{k=n}^{+\infty}(u_k-u_{k+1})=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k}(v_{k+1}-v_k)\leq\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}(v_{k+1}-v_k)$$
ce qui donne
$$u_n\leq\frac{1}{n}(\ell-v_n)$$
On en déduit $0\leq nu_n\leq\ell-v_n$ et donc $nu_n\to 0$ puis $\sum_{k=1}^n u_k\to\ell$.
Finalement $\sum u_n$ converge.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Il est immédiat de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. L'application
$\varphi\colon E\to\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u)=(u_0,u_1)$ étant un isomorphisme (car un élément de E est déterminé de façon unique par la donnée de ses deux premiers termes), on peut affirmer que l'espace E est de dimension 2.

(b) Il est immédiat de vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont formés d'entiers naturels, qu'elles sont croissantes à partir du rang 1 et qu'elles sont à termes strictement positifs à partir du rang 2.
Ainsi
$$\forall n\geq 2, a_n, b_n\geq 1$$
et donc
$$a_{n+2}\geq n+1 \text{ et } b_{n+2}\geq n+1$$
Ainsi les deux suites (a_n) et (b_n) tendent vers $+\infty$ en croissant (seulement à partir du rang 1 pour la première)

(c) On a
$$w_{n+1}=((n+1)a_{n+1}+a_n)\,b_{n+1}-a_{n+1}\,((n+1)b_{n+1}+b_n)$$
Après simplification, on obtient
$$w_{n+1}=-w_n$$
et donc
$$w_n=(-1)^n w_0=(-1)^{n+1}$$

(d) On a
$$c_{n+1}-c_n=\frac{w_n}{b_nb_{n+1}}=\frac{(-1)^{n+1}}{b_nb_{n+1}}$$
Puisque la suite de terme général b_nb_{n+1} croît vers $+\infty$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et affirmer que la série numérique $\sum(c_{n+1}-c_n)$ converge. Par conséquent la suite (c_n) converge.

(e) On a
$$\ell-c_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(c_{k+1}-c_k)$$
Par le critère spécial des séries alternées, on peut borner ce reste par la valeur absolue de son premier terme
$$|\ell-c_n|\leq\frac{1}{b_nb_{n+1}}$$
On peut ainsi écrire
$$c_n=\ell+\mathrm{o}\left(\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right)$$
On a alors
$$a_n+rb_n=b_n\,(c_n+r)=b_n(\ell+r)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{b_{n+1}}\right)$$
Sachant $b_n\to+\infty$, on peut affirmer
$$a_n+rb_n\to 0\iff r=-\ell$$

Exercice 14 : [énoncé]
La fonction f_n est continue, strictement décroissante et de limites $+\infty$ et 0 en n et $+\infty$. On en déduit que f_n réalise une bijection de $]n\,;+\infty[$ vers $]0\,;+\infty[$. Ainsi, pour tout $a>0$, il existe un unique $x_n>n$ vérifiant $f_n(x_n)=a$.

On a

$$f_n(n+1+y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+y-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+y} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \ln\left(1+\frac{n}{y}\right)$$

Pour $y = \frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$,

$$f(n+1+y) \leq \ln\left(1+(\mathrm{e}^a-1)\right) = a$$

et par suite

$$x_n \leq n+1+\frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$$

Aussi

$$f(n+y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{y+k} \geq \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \ln\left(1+\frac{n}{y}\right)$$

Pour $y = \frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$, $f(n+y) \geq a$ et par suite

$$x_n \geq n+\frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$$

On en déduit

$$x_n \sim n+\frac{n}{\mathrm{e}^a-1} = \frac{\mathrm{e}^a n}{\mathrm{e}^a-1}$$

Exercice 15 : [énoncé]
Introduisons la série entière de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(4n+3)}$$

On vérifie aisément que son rayon de convergence est égale à 1 et que sa somme est définie et continue sur $[-1\,;1]$ par convergence normale.
Sur $]-1\,;1[$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+1}$$

Pour $x \neq 0$

$$\left[\frac{1}{x}S'(x)\right]' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$$

On en déduit que sur $]-1\,;1[$

$$S'(x) = x\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}$$

puis

$$S(x) = \int_0^x t\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}$$

Par intégration par parties

$$S(x) = \left[\frac{1}{2}(t^2-1)\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1-t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t$$

et ainsi

$$S(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Quand $x \to 1^-$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4} = \mathrm{O}\left(\ln(1-x)\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

donc

$$S(x) \to \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{8}$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = S(1) = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 16 : [énoncé]
On remarque

$$n\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $\varphi\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}$.
La fonction φ est décroissante en tant que produit de deux fonctions décroissantes positives. Par suite

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En sommant et en exploitant l'intégrabilité de φ au voisinage de $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{1/t}\right]_1^{+\infty} = \mathrm{e}-1 \text{ et } \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{1/t}\right]_{(n-1)/n}^{+\infty} \to \mathrm{e}-1$$

Par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right) = \mathrm{e}-1.$$

Exercice 17 : [énoncé]
Si $\sum u_n$ converge alors en notant S sa somme (strictement positive), $v_n \sim u_n/S$ et donc $\sum v_n$ converge.
Supposons désormais que $\sum u_n$ diverge et montrons qu'il en est de même de $\sum v_n$.
Par la décroissante de $t\mapsto 1/t$, on a

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \le \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_{n-1}}$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{S_1}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \le \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_{k-1}}$$

Or

$$\int_{S_1}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln S_n - \ln S_1 \to +\infty$$

car $S_n \to +\infty$ donc par comparaison$\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$ diverge.
Puisque

$$\frac{u_n}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_n - u_n} = v_n\frac{1}{1-v_n}$$

Si $v_n \not\to 0$ alors $\sum v_n$ diverge.
Si $v_n \to 0$ alors $v_n \sim \frac{u_n}{S_{n-1}}$ et à nouveau $\sum v_n$ diverge.
Finalement $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exercice 18 : [énoncé]
$u_n = R_{n-1} - R_n$ et la décroissance de $t \to 1/t$,

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \le \frac{R_{n-1}-R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}$$

On a

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln R_{n-1} - \ln R_n$$

donc la série à termes positifs $\sum \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge car $\ln R_n \to -\infty$ puisque $R_n \to 0$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n/R_n$ diverge.

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_{n-1}-u_n} = \frac{u_n}{R_{n-1}}\frac{1}{1-u_n/R_{n-1}}$$

Si $u_n/R_{n-1} \not\to 0$ alors $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.
Si $u_n/R_{n-1} \to 0$ alors $\frac{u_n}{R_{n-1}} \sim \frac{u_n}{R_n}$ et donc $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge encore.
Dans tous les cas, $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.

Exercice 19 : [énoncé]
Montrons que la série étudiée est divergente. Notons S_n la somme partielle de rang n de cette série. Nous allons construire deux suites (a_n) et (b_n) de limite $+\infty$ telles que $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend pas zéros ce qui assure la divergence de la série étudiée.
Soit $n \ge 1$ fixé. Les indices k vérifiant

$$2n\pi - \frac{\pi}{4} \le \sqrt{k} \le 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

sont tels que

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\sqrt{k}}) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Posons alors

$$a_n = E\left((2n\pi - \pi/4)^2\right) \text{ et } b_n = E\left((2n\pi + \pi/4)^2\right)$$

On a

$$S_{b_n} - S_{a_n} = \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

et donc par construction

$$\mathrm{Re}\left(S_{b_n} - S_{a_n}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_{n+1}}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est décroissante, on a la comparaison intégrale

$$\mathrm{Re}\left(S_{b_n} - S_{a_n}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1}\right)$$

Or

$$\sqrt{b_n+1}-\sqrt{a_n+1}=\frac{b_n-a_n}{\sqrt{b_n+1}+\sqrt{a_n+1}}\sim\frac{2n\pi^2}{4n\pi}\to\frac{\pi}{2}$$

donc $S_{b_n}-S_{a_n}$ ne tend par 0 et l'on peut conclure que la série étudiée diverge.

Exercice 20 : [énoncé]
Par un argument géométrique (trapèze sous la courbe) la concavité donne

$$x\frac{f(0)+f(x)}{2}\leq\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $xf(x)\leq 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x$ donc

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\leq 2\int_{x=0}^1\left(\int_{t=0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\ (1)$$

Or

$$\int_{x=0}^1\int_{t=0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_{t=0}^1\int_{x=t}^1 f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_{t=0}^1(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$$

La relation (1) donne alors

$$3\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\leq 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\ (2)$$

Enfin

$$2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$$

donne

$$2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\geq 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\ (3)$$

Les relations (2) et (3) permettent alors de conclure.

Exercice 21 : [énoncé]
On peut écrire

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}=\int_0^1(n+1)t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u=t^{n+1}$

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}=\int_0^1 f(u^{1/(n+1)})\,\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée par $\|f\|_\infty$, on obtient

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}\to f(1)$$

Exercice 22 : [énoncé]
Si l'un des x_i ou des y_i est nul, la relation est immédiate. On suppose désormais $x_i,y_i>0$.
En divisant par $(x_1\dots x_n)^{1/n}$, la propriété demandée équivaut à $1+(\alpha_1\dots\alpha_n)^{1/n}\leq((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n))^{1/n}$ pour tout $\alpha_i>0$. Établissons cette identité.
Considérons la fonction $f\colon x\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^x)$.
f est dérivable et $f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. La fonction f' est croissante donc f est convexe.
Par l'inégalité de Jensen :

$$\forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R},f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\left(f(a_1)+\dots+f(a_n)\right)$$

Pour $a_i=\ln\alpha_i$, on obtient

$$\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln\alpha_1+\dots+\alpha_n)}\right)\leq\frac{1}{n}\left(\ln(1+\alpha_1)+\dots+\ln(1+\alpha_n)\right)$$

puis

$$\ln\left(1+(\alpha_1\cdots\alpha_n)^{1/n}\right)\leq\ln\left((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)\right)^{1/n}$$

et par la croissance de la fonction exponentielle, on obtient

$$1+(\alpha_1\dots\alpha_n)^{1/n}\leq((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n))^{1/n}$$

Exercice 23 : [énoncé]
Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty}f$ converge, il en est de même de

$$\int_0^{+\infty}f(a+x)\,\mathrm{d}x\text{ et }\int_0^{+\infty}f(b+x)\,\mathrm{d}x$$

avec

$$\int_0^{+\infty} f(a+x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

On en déduit la convergence de l'intégrale suivante et sa valeur

$$\int_0^{+\infty} (f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'autre part, on a par découpage et pour tout $A \geq 0$

$$\int_{-A}^0 (f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x = \int_{-A+a}^{-A+b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or

$$(b-a)\min_{[-A+a;-A+b]} f \leq \int_{-A+a}^{-A+b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\max_{[-A+a;-A+b]} f$$

avec

$$\min_{[-A+a;-A+b]} f \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ell \text{ et } \max_{[-A+a;-A+b]} f \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ell$$

car f converge vers ℓ en $-\infty$.
On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^0 (f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x = (b-a)\ell - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et finalement on obtient la convergence et la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x = (b-a)\ell$$

Exercice 24 : [énoncé]
On procède au changement de variable

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t$$

avec $t \in [-\pi/2\,;\pi/2]$.
On obtient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$$

(avec convergence de l'intégrale) et

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 25 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto P(t)/Q(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $|t| \to +\infty$, $P(t)/Q(t) = \mathrm{O}\left(1/t^2\right)$ car $\deg(P/Q) \leq -2$.
Par suite l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q}$ converge.
Les pôles de la fraction P/Q sont complexes conjugués non réels et les parties polaires correspondantes sont deux à deux conjuguées. On en déduit que $P/Q = 2\,\mathrm{Re}(F)$ où F est la fraction rationnelle obtenue en sommant les parties polaires relatives aux pôles de partie imaginaire strictement positive.
Considérons un pôle $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.
Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{(X-a)^m}$ avec $m > 1$, on a
$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^m} = \left[-\frac{1}{m-1}\frac{1}{(t-a)^{m-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.
Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{X-a}$ on a
$\int_{-A}^A \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \int_{-A}^A \frac{t-\alpha+i\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2} = \left[\ln|t-a| + i\arctan\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\right]_{-A}^A$. Quand $A \to +\infty$, on obtient $\int_{-A}^A \frac{\mathrm{d}t}{t-a} \to i\pi$.
Puisque $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^A \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = 2\,\mathrm{Re}(\sigma)\pi$ avec σ la somme des coefficients facteurs des éléments simples $\frac{1}{X-a}$ avec a de parties imaginaires strictement positive.

Exercice 26 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{1+X^4+X^8} = \frac{1-X^4}{1-X^{12}}$$

Les pôles de cette fraction rationnelle sont les éléments de $U_{12} \setminus U_4$ et ils sont simples.
On peut donc écrire en combinant les parties polaires conjuguées

$$\frac{1}{1+X^4+X^8} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_1}{X-\omega_1}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_2}{X-\omega_2}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_4}{X-\omega_4}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_5}{X-\omega_5}\right)$$

avec $\omega_k = \exp(2ik\pi/12)$, les $\omega_1, \omega_2, \omega_4$ et ω_5 de parties imaginaires strictement positives.

$$\alpha_k = \left.\frac{1-X^4}{(1-X^{12})'}\right|_{X=\omega_k} = \frac{1}{12}\left(\omega_k^5 - \omega_k\right)$$

Soit $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. On a

$$\int_{-A}^A \frac{\mathrm{d}t}{t-\omega} = \int_{-A}^A \frac{(t-a)+ib}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\left((t-a)^2+b^2\right) + i\arctan\frac{t-a}{b}\right]_{-A}^A \xrightarrow[A\to+\infty]{} i\pi$$

la limite de l'arc tangente étant obtenue sachant $b > 0$.
Soit de plus $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} 2\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha}{t-\omega}\right)\mathrm{d}t\right) = 2\operatorname{Re}\left(\lim_{A\to+\infty}\alpha\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t-\omega}\right) = -2\pi\operatorname{Im}\alpha$$

Puisque la convergence de l'intégrale que nous étudions est assurée

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}$$

et on en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = -2\pi\operatorname{Im}\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5\right)$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \frac{\pi}{6}\operatorname{Im}\left(\omega^2-\omega^{10}+\omega^4-\omega^8\right)$$

Or

$$\omega^2-\omega^{10} = 2i\sin\frac{\pi}{3} = i\sqrt{3} \text{ et } \omega^4-\omega^8 = 2i\sin\frac{2\pi}{3} = i\sqrt{3}$$

et finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Exercice 27 : [énoncé]

(a) On vérifie sans peine que la suite (f_n) est bien définie.

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{2}{3}x^{3/2},\dots$$

Si $f(x) = \alpha x^\beta$ alors

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{\alpha}\int_0^x t^{\beta/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2}x^{\beta/2+1}$$

Ainsi $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n+2} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}+1$$

On a

$$\beta_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}} \to 2$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

On a

$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4-\frac{1}{2^n}} - \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Or $2^n \geq 2^{n-1}$ donne

$$\frac{2}{4-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc

$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1} \leq \frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\sqrt{\alpha_{n+1}}-\sqrt{\alpha_n}\right)$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_0$, on obtient alors par récurrence que la suite (α_n) est décroissante.
Étant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\alpha_n \to 1/4$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f\colon x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

De plus

$$f_n(x)-f(x) = \alpha_n\left(x^{\beta_n}-x^2\right)+\left(\alpha_n-\frac{1}{4}\right)x^2$$

Puisque $\beta_n \leq 2$, on a pour tout $x \in [0\,;1]$ et en exploitant $\mathrm{e}^u \leq 1+u$

$$\begin{aligned}0 \leq x^{\beta_n}-x^2 &= \int_{\beta_n}^{2}\left|\ln(x)\right|x^t\,\mathrm{d}t\\ &\leq (2-\beta_n)\left|\ln(x)\right|.x^{\beta_n} \leq (2-\beta_n)\left|\ln(x)\right|x\end{aligned}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x\left|\ln x\right|$ est bornée par $1/\mathrm{e}$ sur $[0\,;1]$,

$$0 \leq x^{\beta_n}-x^2 \leq 2-\beta_n$$

et ainsi

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| = \alpha_n(2-\beta_n)+\left(\alpha_n-\frac{1}{4}\right)$$

et ce majorant uniforme tend vers 0.
Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f.

(b) La relation

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

donne à la limite

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

d'où l'on tire f dérivable et $f'(x) = \sqrt{f(x)}$.
Pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y\colon x \mapsto (x/2)^2$ est justement solution.

Exercice 28 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n = \exp\left(n \ln(1 - x/n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-x}$$

La suite (f_n) converge simplement vers $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ avec $f_n \le f$.
Étudions $\delta_n = f - f_n \ge 0$.
Pour $x \in [n\,;+\infty[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \le \mathrm{e}^{-n}$.
Pour $x \in [0\,;n[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1 - x/n)^n$ et $\delta_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (1 - x/n)^{n-1}$.
Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1)\ln\left(1 - x/n\right) + x$$

On a

$$\varphi_n'(x) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{x/n - 1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1 - x$.
Par étude des variations de φ_n, on obtient l'existence de $x_n \in [0\,;n[$ tel que $\varphi_n(x) \ge 0$ pour $x \le x_n$ et $\varphi_n(x) \le 0$ pour $x \ge x_n$. On en déduit que pour $x \le x_n$, $\delta_n'(x) \ge 0$ et pour $x \ge x_n$, $\delta_n'(x) \le 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n}\mathrm{e}^{-x_n}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est bornée par un certain M sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} \le \frac{M}{n}$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;+\infty[} \le \max\left(\frac{M}{n}, \mathrm{e}^{-n}\right) \to 0$$

On peut donc affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

Exercice 29 : [énoncé]
Puisque $a_n > 0$ et $\sum a_n(1 + |x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.
Posons $f_n(x) = a_n\,|x - x_n|$.
Comme $|a_n\,|x - x_n|| \le |a_n|\,|x| + |a_n x_n|$, la série des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont continues et sur $[-M\,;M]$, $\|f_n\|_\infty \le M a_n + a_n\,|x_n|$.
Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme f est continue.
Soit $[\alpha\,;\beta] \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \notin [\alpha\,;\beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha\,;\beta]$ et $f_n'(x) = \varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon| = 1$.
Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha\,;\beta]$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]a\,;b[$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin\,]a\,;b[$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x_n = a$.
En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a\}$, on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n\in A} a_n\,|x - a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A} a_n\,|x - x_n| = \alpha\,|x - a| + g(x)$$

avec $\alpha > 0$.
Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour N assez grand, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_n \le \frac{\alpha}{2}$.
On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha\,|x - a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\ge N+1} a_n\,|x - x_n| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\le N} a_n\,|x - x_n|$$

La fonction $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\le N} a_n\,|x - x_n|$ est dérivable au voisinage de a.
Cependant, la fonction

$$\varphi\colon x \mapsto \alpha\,|x - a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\ge N+1} a_n\,|x - x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en a.
En effet, pour $h > 0$,

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(a+h) - \varphi(a)\right) \ge \alpha - \frac{\alpha}{2} \ge \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour $h < 0$,

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(a+h)-\varphi(a)\right) \leq -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

Exercice 30 : [énoncé]
Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.
Soit f une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0) = 0$.
On a

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

donc

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^{n+1})}{2^n}$$

Posons $h(x) = \sup_{[0;x]} |f|$.
Pour $x > 0$, on a $x^{n+1} \in [0\,;x^2]$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} h(x^2) = h(x^2)$$

Ainsi $h(x) \leq h(x^2)$ puis en itérant $0 \leq h(x) \leq h(x^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or pour $x \in [0\,;1[$, $x^{2^n} \to 0$ et $\lim_{0^+} h = 0$ (car $f(0) = 0$) donc $h(x) = 0$ sur $[0\,;1[$.
Finalement f est nulle sur $[0\,;1[$ puis en 1 par continuité.

Exercice 31 : [énoncé]
Cas $n = 2$
Par l'absurde supposons qu'une telle norme existe.
Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Les matrices A et B sont semblables (via $P = \operatorname{diag}(1/2, 1)$) donc $\|A\| = \|B\|$. Or $B = 2A$ donc $\|B\| = 2\|A\|$ puis $\|A\| = 0$.
C'est absurde car $A \neq O_2$.
Cas général : semblable.

Exercice 32 : [énoncé]
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n_0 \leq \varepsilon$.
Pour $a \geq \ln n_0$ et $n = E(\mathrm{e}^a) \geq n_0$, on a $\ln n \leq a \leq \ln(n+1)$.
On en déduit

$$|a - \ln n| \leq \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \leq 1/n \leq 1/n_0 \leq \varepsilon$$

Puisque $m - x \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, pour m assez grand, on a $a = m - x \geq \ln n_0$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $|a - \ln n| \leq \varepsilon$ *i.e.*

$$|m - \ln n - x| \leq \varepsilon$$

Par suite $\{m - \ln n \mid (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 33 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $A \neq E$.
Il existe un élément $a \in E$ tel que $a \notin A$. Par translation du problème, on peut supposer $a = 0$.
Posons $n = \dim E$.
Si $\operatorname{Vect}(A)$ est de dimension strictement inférieure à n alors A est inclus dans un hyperplan de E et son adhérence aussi. C'est absurde car cela contredit la densité de A.
Si $\operatorname{Vect}(A)$ est de dimension n, on peut alors considérer $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée d'éléments de A.
Puisque $0 \notin A$, pour tout $x \in A$, on remarque : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, -\lambda x \notin A$ (car sinon, par convexité, $0 \in A$).
Par convexité de A : $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \implies \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in A$ et donc :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \implies \lambda(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \notin A$.
Ainsi $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \leq 0, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \notin A$.
Or la partie $\{\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \mid \mu_i < 0\}$ est un ouvert non vide de A et donc aucun de ses éléments n'est adhérent à A. Cela contredit la densité de A.

Exercice 34 : [énoncé]
Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F + \operatorname{Vect}(u)$ fermé pour tout $u \notin F$.
Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de $F + \operatorname{Vect}(u)$ de limite x.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$.
Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée.

Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n| \to +\infty$.
Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n}x_n = \frac{1}{\lambda_n}y_n + u$.
Puisque $\|x_n\| \to \|x\|$ et $|\lambda_n| \to +\infty$, on a $\|z_n\| \to 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n}y_n \to -u$.
Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n}y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F, donc $-u \in F$ ce qui exclu.
Ainsi la suite (λ_n) est bornée et on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(n)})$ de limite $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par opérations, la suite $(y_{\varphi(n)})$ est alors convergente.
En notant y sa limite, on a $y \in F$ car l'espace F est fermé.
En passant la relation $x_n = y_n + \lambda_n u$ à la limite on obtient
$x = y + \lambda u \in F + \mathrm{Vect}(u)$.
Ainsi l'espace $F + \mathrm{Vect}(u)$ est fermé.

Exercice 35 : [énoncé]
Considérons l'ensemble $B = \ln A = \{\ln a \mid a \in A\}$.
Pour tout $x, y \in B$, $\frac{x+y}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\sqrt{ab} \in B$.
En raisonnant par récurrence, on montre que pour tout $x, y \in B$, on a la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, \frac{kx + (2^n - k)y}{2^n} \in B$$

Soit $x \in]\inf A\,; \sup A[$. Il existe $a, b \in A$ tels que $a < x < b$.
On a alors $\ln a < \ln x < \ln b$ avec $\ln a, \ln b \in B$.
On peut écrire $\ln x = \lambda \ln a + (1 - \lambda)\ln b$ avec $\lambda \in]0\,; 1[$.
Posons alors k_n la partie entière de $\lambda 2^n$ et $x_n = \exp\left(\frac{k_n}{2^n}\ln a + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right)\ln b\right)$
Il est immédiat que $x_n \to x$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$.
Si, dans cette suite, il existe une infinité d'irrationnels, alors x est limite d'une suite d'éléments de $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
Sinon, à partir d'un certain rang, les termes de la suite x_n sont tous rationnels.
Le rapport x_{n+1}/x_n est alors aussi rationnel ; mais

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n}} \text{ avec } \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = 0 \text{ ou } \frac{1}{2^{n+1}}$$

S'il existe une infinité de n tels que $\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^n}} \in \mathbb{Q}$$

et puisque l'élévation au carré d'un rationnel est un rationnel, le nombre a/b est lui-même rationnel. Or les racines carrées itérés d'un rationnel différent de 1 sont irrationnelles à partir d'un certain rang.
Il y a absurdité et donc à parti d'un certain rang $k_{n+1} = 2k_n$.
Considérons à la suite (x'_n) définie par

$$x'_n = \exp\left(\frac{k'_n}{2^n}\ln a + \left(1 - \frac{k'_n}{2^n}\right)\ln b\right) \text{ avec } k'_n = k_n + 1$$

On obtient une suite d'éléments de A, convergeant vers x et qui, en vertu du raisonnement précédent, est formée d'irrationnels à partir d'un certain rang.

Exercice 36 : [énoncé]
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
Soit (A_p) une suite convergente de matrices semblables à A.
Notons A_∞ la limite de (A_p).
Si P est un polynôme annulateur de A, P est annulateur des A_p et donc P annule A_∞. Puisque A est supposée diagonalisable, il existe un polynôme scindé simple annulant A et donc A_∞ et par suite A_∞ est diagonalisable.
De plus $\chi_A = \chi_{A_p}$ donc à la limite $\chi_A = \chi_{A_\infty}$.
On en déduit que A et A_∞ ont les mêmes valeurs propres et que celles-ci ont mêmes multiplicités. On en conclut que A et A_∞ sont semblables.
Ainsi la classe de similitude de A est fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
À titre d'exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$P_p^{-1}AP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \lambda I_2$$

qui n'est pas semblable à A.
De façon plus générale, si la matrice A n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre λ pour laquelle

$$\ker(A - \lambda I_2)^2 \neq \ker(A - \lambda I_2)$$

Pour $X_2 \in \ker(A - \lambda I_2)^2 \setminus \ker(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$. En complétant la famille libre (X_1, X_2) en une base, on obtient que la matrice A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (*) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, \dots, 1)$, on obtient

$$P_p^{-1}TP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & (*/p) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

Or cette matrice n'est pas semblable à T ni à A car $\operatorname{rg}(A_\infty - \lambda I_n) \neq \operatorname{rg}(T - \lambda I_n)$.
Ainsi, il existe une suite de matrices semblables à A qui converge vers une matrice qui n'est pas semblable à A, la classe de similitude de A n'est pas fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ alors toute limite A_∞ d'une suite de la classe de similitude de A est semblable à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = A_\infty$. On a alors $AP = PA_\infty$. En introduisant les parties réelles et imaginaires de P, on peut écrire $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'identité $AP = PA_\infty$ avec A et A_∞ réelles entraîne $AQ = QA_\infty$ et $AR = RA_\infty$.
Puisque la fonction polynôme $t \mapsto \det(Q + tR)$ n'est pas nulle (car non nulle en i), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P' = Q + tR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour cette matrice $AP' = P'A_\infty$.
Ainsi les matrices A et A_∞ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Il existe une valeur propre complexe λ pour laquelle $\ker(A - \lambda I_2)^2 \neq \ker(A - \lambda I_2)$.
Pour $X_2 \in \ker(A - \lambda I_2)^2 \setminus \ker(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de reprendre la démonstration qui précède.
Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on peut écrire $\lambda = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.
Posons $X_3 = \bar{X}_1$ et $X_4 = \bar{X}_2$.
La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre car $\lambda \neq \bar{\lambda}$.
Introduisons ensuite $Y_1 = \operatorname{Re}(X_1)$, $Y_2 = \operatorname{Re}(X_2)$, $Y_3 = \operatorname{Im}(X_1)$ et $Y_4 = \operatorname{Im}(X_2)$.
Puisque $\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(Y_1, \dots, Y_4) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(X_1, \dots, X_4)$, la famille $(Y_1, \dots, Y_4)$ est libre et peut donc être complétée en une base.
On vérifie par le calcul $AY_1 = aY_1 - bY_3$, $AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1$, $AY_3 = aY_3 + bY_1$ et $AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3$. et on obtient que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice

$$\begin{pmatrix} T & * \\ O & B \end{pmatrix}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, p, 1, \dots 1)$, on obtient

$$P_p^{-1}TP_p \to \begin{pmatrix} T_\infty & *' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Or dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A_∞ est semblable est à $\operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}, B)$ qui n'est pas semblable à A pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu.
Les matrices réelles A et A_∞ ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni *a fortiori* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que la classe de similitude de A n'est pas fermée

Exercice 37 : [énoncé]
Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a.
Nous allons établir que A est un intervalle en observant que

$$\forall \alpha < \beta \in A, [\alpha\,;\beta] \subset A$$

(caractérisation usuelle des intervalles)
Soit $\alpha < \beta \in A$ et $\gamma \in [\alpha\,;\beta]$. Si $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = \beta$ alors évidemment $\gamma \in A$.
Supposons maintenant $\gamma \in]\alpha\,;\beta[$.
Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $a_{n+1} - a_n \to 0$, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon$$

Comme α est valeur d'adhérence de a et que $\alpha < \gamma$ il existe $p \geq \max(N, N')$ tel que $a_p < \gamma$. Aussi, il existe $q \geq \max(N, N')$ tel que $a_q > \gamma$.
Si $p < q$, on introduit

$$E = \{n \in [\![p\,;q]\!], a_n < \gamma\}$$

Cet ensemble E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car$p \in E$) et majoré (par$q$). Cet ensemble admet donc un plus grand élément r. Nécessairement $r < q$ car $a_q \geq \gamma$.
Puisque $r \in E$ et $r + 1 \notin E$, $a_r < \gamma \leq a_{r+1}$ et donc $|\gamma - a_r| \leq |a_{r+1} - a_r| \leq \varepsilon$.
Si $p > q$, un raisonnement semblable conduit à la même conclusion.
Finalement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists r \geq N, |\gamma - a_r| \leq \varepsilon$$

On peut donc affirmer que γ est valeur d'adhérence de a et conclure.

Exercice 38 : [énoncé]
Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{2}{3}\ell$ de sorte que $\varepsilon_n = v_n + \frac{v_{2n}}{2} \to 0$.
Soit a une valeur d'adhérence de la suite (v_n).

Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_{\varphi(n)} \to a$.

$$v_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2a$$

donc $-2a$ est aussi valeur d'adhérence de (v_n).
En reprenant ce processus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(-2)^p a$ est valeur d'adhérence de (v_n).
Or la suite (u_n) est bornée, la suite (v_n) l'est donc aussi et ses valeurs d'adhérence le sont encore. On peut donc affirmer $a = 0$.
La suite (v_n) est bornée et 0 est sa seule valeur d'adhérence donc elle converge vers 0 (car si tel n'était pas le cas, il existerait une infinité de termes de la suite (v_n) en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon\,;\varepsilon], \varepsilon > 0$, et de ces termes bornés on pourrait extraire une suite convergente d'où l'existence d'une valeur d'adhérence non nulle).

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_n}{n-t}\right| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{(n-t)^2}\right)$$

donc $\sum \frac{a_n}{n-t}$ est absolument convergente. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

(b) Pour $|t| < 1$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1-t/n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_n t^m}{n^{m+1}}$$

Puisque la série $\sum_{m\geq 0} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}}$ converge pour tout $n \geq 1$ et puisque

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}} = \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|}{n-|t|}$$

converge, peut appliquer le théorème de Fubini pour intervertir les deux sommes.

$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{m+1}}\right) t^m$$

La fonction f apparaît alors comme développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

(c) Si $f(t) = 0$ sur $[-1/2\,;1/2]$ alors le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$ est nul et on en déduit que f est nulle sur $]-1\,;1[$.
Or

$$f(t) = \frac{a_1}{1-t} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$$

avec $t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ définie et continue au voisinage de 1. On en déduit que $a_1 = 0$.
On peut alors reprendre l'étude du b) et, sachant $a_1 = 0$, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $]-2\,;2[$. Or ce dernier développement étant nul, on obtient comme ci-dessus $a_2 = 0$ etc.
Au final, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle.

Exercice 40 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x \in [0\,;n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in\,]n\,;+\infty[$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, quand $n \to +\infty$,

$$f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - x^2/2n^2 + \mathrm{o}(1/n^2)\right)\right) \to \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$ sur $[0\,;+\infty[$. Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Soit $\psi\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = 1 - t^2/4 - \cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x \in [0\,;1], \psi(x) \geq 0$$

On en déduit que, pour $x \in [0\,;n]$,

$$\ln\left(\cos\frac{x}{n}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) \leq -\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x^2/4}$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x \in\,]n\,;+\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Appliquons le théorème de convergence dominée.
Posons $f_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)$$

Pour $t \in [0\,;h/\delta[$, on a $f_n(t) \to 1$.

Pour $t \in \left]h/\delta\,;1\right]$, on a $f_n(t) \to 0$.
Enfin, pour $t = h/\delta$, $f_n(t) = F(0) \to F(0)$.
Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[0\,;h/\delta\right[\\ F(0) & \text{si } t = h/\delta \\ 0 & \text{si } t \in \left]h/\delta\,;1\right] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.
Enfin

$$\forall t \in [0\,;1], |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.
Par convergence dominée,

$$I_n \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{h/\delta} 1\,\mathrm{d}t = \frac{h}{\delta}$$

(b) Par la décroissance de F, on peut écrire

$$\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n} - h\right)\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t \leq \frac{S_n}{n} \leq I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta(t+1/n) - h)\right)\mathrm{d}t$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n \sim \frac{h}{\delta}n$$

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, posons

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n\cos t(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.
Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} (\sin t)^{n+1} x f'(xt)\,\mathrm{d}t$$

Posons $g_n(x) = |\sin t|^{n+1}\,xf'(xt)\,\mathrm{d}t$.
Chaque fonction g_n est continue par morceaux.
La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x \neq \pi/2 + k\pi$.
La fonction limite simple est continue par morceaux.
Enfin on a la domination

$$|g_n(x)| \leq xf'(xt) = \varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.
Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et par comparaison

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme.
Par changement de variable

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} (\sin(u/x))^{n+1} f'(u)\,\mathrm{d}u$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} |f'(u)|\,\mathrm{d}u \leq \varepsilon$$

et alors

$$|u_n(x)| \leq M\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u + \varepsilon \text{ avec } M = \max_{u\in[0;A]} |f'(u)|$$

Pour $x \geq 4A/\pi$, on a

$$\forall u \in [0\,;A], 0 \leq \frac{u}{x} \leq \frac{A}{x} \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq \frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}$$

Pour $x \leq 4A/\pi$, on a par changement de variable

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u = x\int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Pour k entier tel que $k\pi < A/x \leq (k+1)\pi$.

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq x\int_0^{(k+1)\pi} |\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t = x(k+1)\int_0^\pi (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Or $x(k+1)\pi \leq A + x\pi \leq 5A$ et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq \frac{5A}{\pi}\int_0^\pi (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{5AM}{\pi}\int_0^\pi (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t + \frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}} + \varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Cas $a = c$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, M^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } \exp(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & b\mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^a \end{pmatrix}$$

Cas $a \neq c$:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & \alpha_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_n = b\left(a^{n-1}c^0 + a^{n-2}c + \cdots + a^0c^{n-1}\right) = b\frac{a^n - c^n}{a - c}$$

et

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & x \\ 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix} \text{ avec } x = \frac{b(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^c)}{a - c}$$

(b) Avec des notations immédiates, si $\exp(M) = \exp(M')$ alors par identification des coefficients diagonaux, on obtient $a = a'$ et $c = c'$.
Dans le cas $a = c$, l'identification du coefficient d'indice $(1, 2)$ donne

$$b\mathrm{e}^a = b'\mathrm{e}^{a'}$$

d'où $b = b'$.
Dans le cas $a \neq c$, la même identification donne

$$\frac{b(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^c)}{a - c} = \frac{b'(\mathrm{e}^{a'} - \mathrm{e}^{c'})}{a' - c'}$$

et à nouveau $b = b'$.
Ainsi l'application $\exp\colon T \to T^+$ est injective.
Considérons maintenant

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in T^+$$

Si $\alpha = \gamma$ alors pour $a = \ln\alpha$ et $b = \beta/\alpha$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.
Si $\alpha \neq \gamma$ alors pour $a = \ln\alpha$, $c = \ln\gamma$ et $b = \beta(a - c)/(\alpha - \gamma)$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.
Ainsi l'application $\exp\colon T \to T^+$ est surjective.