Exercice 1 [02961] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n > 0$,

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1}).$$

Étudier la suite (u_n) puis la série de terme général u_n.

Exercice 2 [03057] [Correction]
On note $(z_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général

$$z_n = 2n \exp\left(\frac{\mathrm{i}t}{\sqrt{n}}\right).$$

Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n-1}{z_n-1}\frac{2n-2}{z_n-2}\cdots\frac{2n-n}{z_n-n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{2n-k}{z_n-k}\right|.$$

Exercice 3 [02951] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

(a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

(b) Même question lorsque u_n est définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^{1+\alpha}$ (avec $\alpha > 0$).

Exercice 4 [02950] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$.
On pose

$$v_n = \frac{1}{nu_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2u_n}\left(\sum_{k=1}^{n} ku_k\right).$$

On suppose que (v_n) tend vers $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Étudier la convergence de (w_n).

Exercice 5 [02960] [Correction]
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \,]0\,;1]$ et que, pour un certain $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}^{\beta} = \sin u_n^{\beta}.$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 6 [02962] [Correction]
Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 7 [03097] [Correction]
On dit que la série de terme général u_n enveloppe le réel A si, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } \left|A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)\right| \leq |u_{n+1}|.$$

On dit qu'elle enveloppe strictement le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $]0\,;1[$ telle que pour tout entier naturel n :

$$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \theta_{n+1}u_{n+1}.$$

(a) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$.
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.

(b) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe strictement A, alors elle est alternée.
Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.

(c) Démontrer que, si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$
$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est du signe de u_{n+1}, alors, elle enveloppe strictement A.

(d) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe A et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement A.

Exercice 8 [02964] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right).$$

Exercice 9 [01335] [Correction]
Étudier la série de terme général

$$u_n = (-1)^n\frac{\sin(\ln n)}{n}.$$

Exercice 10 [03207] [Correction]
Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n.$$

(a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

(b) Soient a et b deux éléments de E déterminés par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1. \end{cases}$$

Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$.

(c) Calculer

$$w_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}.$$

(d) On pose $c_n = a_n/b_n$ lorsque l'entier n est supérieur ou égal à 1. Démontrer l'existence de

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} c_n.$$

(e) Démontrer l'existence d'un unique réel r tel que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + rb_n) = 0.$$

Exercice 11 [03045] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n\colon x \in \left]n\,;+\infty\right[\to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}.$$

Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe un unique réel, noté x_n tel que $f_n(x_n) = a$.
Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 12 [01338] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Exercice 13 [03086] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right).$$

Exercice 14 [01337] [Correction]
Quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\,?$$

Exercice 15 [02942] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue, concave et vérifiant $f(0) = 1$. Établir

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Exercice 16 [02977] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}\right)_{n\geq 0}.$$

Exercice 17 [02945] [Correction]
Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des réels positifs.
Montrer

$$(x_1\dots x_n)^{1/n} + (y_1\dots y_n)^{1/n} \leq \big((x_1+y_1)\times\dots\times(x_n+y_n)\big)^{1/n}.$$

Exercice 18 [01334] [Correction]
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.
Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big(f(a+x) - f(b+x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 19 [02965] [Correction]
Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 20 [02968] [Correction]
Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, où Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $\deg P \leq \deg Q - 2$.
Exprimer $\int_{\mathbb{R}} P/Q$ à l'aide des coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simple de P/Q.

Exercice 21 [01333] [Correction]
Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}.$$

Exercice 22 [05011] [Correction]
Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses moyennes de Cesàro :
$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

(a) Montrer que $(n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 \leq 2u_n v_n$ pour tout $n \geq 2$.

On suppose désormais que la série de terme général u_n^2 converge.

(a) Montrer que la série de terme général v_n^2 converge et vérifier
$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

(b) En déduire la sommabilité de la famille
$$\left(\frac{u_n u_m}{n+m}\right)_{m,n\geq 1}$$

Exercice 23 [02970] [Correction]
On note E l'ensemble des fonctions $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}_+$ continues.
On pose
$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$
pour toute $f \in E$.
On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Étudier la suite (f_n).

(b) Soit $f = \lim(f_n)$.
Trouvez une équation différentielle dont f est solution.
Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Exercice 24 [02972] [Correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0\,;n[\text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$
Étudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 25 [02971] [Correction]
Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n.
On suppose que la série de terme général $a_n\big(1 + |x_n|\big)$ converge.
On pose
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x - x_n|.$$
Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 26 [02973] [Correction]
Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ telles que
$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 27 [04980] [Correction]
Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs vérifiant
$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \quad \text{pour tout } i \in [\![1\,;n]\!].$$
On note α le plus petit coefficient de la matrice A et, étant donné $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\min(X)$ et $\max(X)$ le plus petit et le plus grand coefficient de la colonne X.

(a) On suppose que les coefficients de $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont tous positifs, établir $\min(AY) \geq \alpha \max(Y)$.

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = X - \min(X)U$ avec U la colonne de hauteur n dont tous les coefficients valent 1. Montrer

$$\min(AX) \geq d\max(X)+(1-d)\min(X) \quad \text{puis} \quad \max(AX) \leq d\min(X)+(1-d)\max(X).$$

En déduire que les suites $\left(\min(A^pX)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(\max(A^pX)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(c) Établir que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer le rang de sa limite.

Exercice 28 [00795] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \left\|P^{-1}AP\right\|.$$

Exercice 29 [03017] [Correction]
Montrer que $\left\{m - \ln n \,\middle|\, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 30 [02944] [Correction]
Soit A une partie convexe et partout dense d'un espace euclidien E.
Montrer que $A = E$.

Exercice 31 [03021] [Correction]
Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F + G$ est fermé

Exercice 32 [03020] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall (a,b) \in A^2, \sqrt{ab} \in A.$$

Montrer que $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $]\inf A\,;\sup A[$.

Exercice 33 [03037] [Correction]
Caractériser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices dont la classe de similitude est fermée.
Même question avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Exercice 34 [02946] [Correction]
Soit a une suite de réels telle que $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est un intervalle.

Exercice 35 [02947] [Correction]
Déterminer les suites réelles bornées telle que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 36 [02975] [Correction]
Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de carré sommable, on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-t}$$

où la variable t est réelle.

(a) Préciser le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.

(c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2\,;1/2]$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est identiquement nulle.

Exercice 37 [02982] [Correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x.$$

Exercice 38 [03159] [Correction]
Soit F une application continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0 < h < \delta$.

(a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n = \int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right) \mathrm{d}t.$$

(b) On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n} - h\right)\right).$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 39 [03650] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée.

(a) Déterminer pour $x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} n\cos t(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 40 [03094] [Correction]
On note

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et T^+ le sous-ensemble de T formé des matrices de coefficients diagonaux strictement positifs.

(a) Soit $M \in T$. Déterminer les puissances de M. Calculer $\exp(M)$.

(b) L'application $\exp\colon T \to T^+$ est-elle injective ? surjective ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
La suite (u_n) est à terme strictement positifs car $u_0 > 0$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ laisse stable l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Puisque pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$, la suite (u_n) est décroissante.
Puisque décroissante et minorée, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ln(1+\ell) = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2}u_n^2}{u_n^2} \to \frac{1}{2}.$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{nu_n} \to \frac{1}{2}.$$

On en déduit $u_n \sim \frac{2}{n}$ et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 2 : [énoncé]
Posons

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{2n-k}{z_n - k}\right|.$$

On a

$$\ln P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{|z_n-k|^2}{|2n-k|^2}.$$

Puisque

$$|z_n - k|^2 = (2n)^2 - 4nk\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + k^2 = (2n-k)^2 + 8nk\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$$

on obtient

$$\ln P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)\right).$$

Sachant $\sin^2 u = u^2 + \mathrm{O}(u^4)$, on peut écrire

$$\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{t^2}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi

$$\ln P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on a

$$-2\ln(P_n) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Posons S_n le second membre de cette comparaison. D'une part

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \to 0.$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2n-k)^2} = \sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{2(2n-\ell)}{\ell^2} = 4n\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell^2} - 2\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell}$$

avec

$$\sum_{\ell=n}^{+\infty}\frac{1}{\ell^2} \sim \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

Après calculs asymptotiques, on obtient

$$S_n \to (2 - 2\ln 2)t^2.$$

Sachant $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$, on a

$$-2\ln P_n \geq S_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2.$$

Puisque $0 \leq \frac{k}{(2n-k)^2} \leq \frac{1}{n}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \to 0.$$

Finalement $-2\ln P_n$ est encadré par deux quantités de limite $(2-2\ln 2)t^2$. On en déduit

$$P_n \to \exp\left((\ln 2 - 1)t^2\right).$$

Exercice 3 : [énoncé]
Dans le cas où $u_0 = 0$, la suite est nulle.
Dans le cas où $u_0 = 1$, la suite est nulle à partir du rang 1
On suppose désormais ces cas exclus.

(a) La suite (u_n) est à termes dans $]0\,;1[$ car l'application $x \mapsto x - x^2$ laisse stable cet intervalle.
La suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ et donc $\ell = 0$.
Finalement (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n^3} \to 1.$$
Par le théorème de Cesaro,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \to 1$$
et donc $\frac{1}{nu_n} \to 1$.
On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge.

(b) Comme ci-dessus, on obtient que (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
$$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{(u_n u_{n+1})^\alpha} \sim \frac{\alpha u_n^\alpha}{u_{n+1}^\alpha} \to \alpha.$$
Par le théorème de Cesaro, $\frac{1}{nu_n^\alpha} \to \alpha$ et donc
$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}$$
avec $\lambda > 0$.
Si $\alpha \in\,]0\,;1[$, $\sum u_n$ converge et si $\alpha \geq 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. On observe que
$$\sum_{k=1}^n ku_n = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k.$$
Par suite
$$w_n = \frac{n+1}{n}v_n - \frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^n S_k \quad (*).$$
Puisque $\frac{S_n}{nu_n} \to a$, on a $S_n \sim anu_n$.
La série de terme général S_n est une série à termes positifs divergente donc
$$\sum_{k=1}^n S_k \sim a\sum_{k=1}^n ku_k.$$
Par suite
$$\frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^n S_k \sim aw_n.$$
La relation $(*)$ dévient alors
$$w_n = \frac{n+1}{n}v_n - aw_n + \mathrm{o}(w_n)$$
et en on en déduit que
$$w_n \sim \frac{1}{a+1}v_n \to \frac{a}{a+1}.$$

Exercice 5 : [énoncé]
Posons $v_n = u_n^\beta$. La suite (v_n) vérifie $v_n \in\,]0\,;1]$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque la fonction sinus laisse stable l'intervalle $]0\,;1]$, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in\,]0\,;1]$.
De plus, pour $x \geq 0$, $\sin x \leq x$ donc la suite (v_n) est décroissante.
Puisque décroissante et minorée, (v_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.
Finalement (v_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
On a
$$\frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2} = \frac{(v_n - v_{n+1})(v_{n+1} + v_n)}{v_n^2 v_{n+1}^2} \sim \frac{\frac{1}{6}v_n^3 \times 2v_n}{v_n^4} \to \frac{1}{3}.$$
Par le théorème de Cesaro,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}^2} - \frac{1}{v_k^2}\right) \to \frac{1}{3}$$
et donc $\frac{1}{nv_n^2} \to \frac{1}{3}$. On en déduit $v_n \sim \frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}}$ puis
$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/(2\beta)}}$$
avec $\lambda > 0$.
Pour $\beta \in\,]0\,;1/2[$, $\sum v_n$ converge et pour $\beta \geq 1/2$, $\sum v_n$ diverge.

Exercice 6 : [énoncé]
Pour
$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$$
on pose
$$u_n = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
Ceci définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de sorte que ses premiers termes sont :
$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$$
Les termes sommées tendent vers 0 et les sommes partielles oscillent entre 0 et 1.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) Pour $u_n = (-1)^n$, la série de terme général u_n est divergente et puisque ces sommes partielles valent 0 ou 1, elle enveloppe tout réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Pour $u_n = (-1)^n/(n+1)$, la série de terme général u_n satisfait le critère spécial des séries alternées et donc elle converge et la valeur absolue de son reste est inférieure à son premier terme. Cette série enveloppe donc sa somme, à savoir $\ln 2$.
Pour $u_n = 1/2^n$, la série de terme général u_n converge. Puisque $u_n \to 0$, le seul réel qu'elle peut envelopper est sa somme, or
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$
n'est pas inférieur à u_{n+1}. Cette série convergente n'enveloppe aucun réel.

(b) Posons pour la suite de notre étude
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
On a
$$\theta_{n+2}u_{n+2} = A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1} = (\theta_{n+1}-1)u_{n+1}.$$
Puisque $\theta_{n+2} > 0$ et $\theta_{n+1} - 1 < 0$, on peut affirmer que u_{n+2} et u_{n+1} sont de signes opposés.
Puisque $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ est du signe de u_{n+1}, les réels $A - S_n$ et $A - S_{n+1}$ sont de signes opposés et donc A est encadré par S_n et S_{n+1}.

(c) Puisque $A - S_n$ est du signe de u_{n+1}, on peut écrire $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ avec $\theta_{n+1} \in \mathbb{R}_+$.
Puisque $A - S_{n+1} = (\theta_{n+1}-1)u_{n+1}$ est du signe de u_{n+2} et puisque u_{n+1} et u_{n+2} sont de signes opposés, on a $\theta_{n+1} - 1 \leq 0$ et donc $\theta_{n+1} \in [0\,;1]$.
On ne peut rien dire de plus, sauf à savoir que $A - S_n$ est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En effet pour $u_n = (-1)^n$ et $A = 1$, la série de terme général u_n est alternée et
pour n pair : $A - S_n = 1 - 1 = 0$ est du signe de u_{n+1}.
pour n impair : $A - S_n = 1 - 0 = 1$ est du signe de u_{n+1}.
Si en revanche, on suppose $A - S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, obtenir $\theta_{n+1} \in \,]0\,;1[$ est désormais immédiat.

(d) Par l'absurde, supposons $u_{n+1}, u_{n+2} > 0$.
On a $A - S_n \leq u_{n+1}$ donc $A - S_{n+1} \leq 0$ puis $A - S_{n+2} \leq -u_{n+2}$ et donc $|A - S_{n+2}| \geq |u_{n+2}|$. Or $|A - S_{n+2}| \leq |u_{n+3}|$ et $|u_{n+3}| < |u_{n+2}|$, c'est absurde et donc u_{n+1} et u_{n+2} ne sont pas tous deux strictement positifs. Un raisonnement symétrique établit qu'ils ne sont pas non plus tous deux strictement négatifs et donc la série de terme général u_n est alternée à partir du rang 1 (on ne peut rien affirmer pour le rang 0).
Puisque $A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1}$, on a
$-|u_{n+1}| - u_{n+1} \leq A - S_{n+1} \leq |u_{n+1}| - u_{n+1}$.
Si $u_{n+1} > 0$ alors $A - S_{n+1} \leq 0$ et donc du signe de u_{n+2}.
Si $u_{n+1} < 0$ alors $A - S_{n+1} \geq 0$ et donc à nouveau du signe de u_{n+2}.
Enfin $A - S_{n+1}$ n'est pas nul, car sinon
$A - S_{n+3} = A - S_{n+1} - (u_{n+2} + u_{n+3}) = -(u_{n+2} + u_{n+3})$ est de signe strict opposé à u_{n+2} et n'est donc pas du signe de u_{n+4}.
On peut alors exploiter le résultat du c) et affirmer que la série de terme général u_n encadre strictement A.

Exercice 8 : [énoncé]
$$\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{4n} - \frac{3}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc la série étudiée est absolument convergente.
On a
$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right) = \sum_{k=1}^{4N+4}\frac{1}{k} - 4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2}.$$
Or
$$4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2} = 2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1} = 2\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k}.$$

Par le développement
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
on parvient à
$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=\ln(4N+4)+\gamma-2\ln(2N+1)-2\gamma+\ln N+\gamma+\mathrm{o}(1)\to 0.$$
Ainsi
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=0$$
(ce qui change du $\ln 2$ traditionnel... ;-)

Exercice 9 : [énoncé]
Puisque $u_n\to 0$, il revient au même d'étudier la nature de la série de terme général
$$v_n=u_{2n}+u_{2n+1}.$$
Or
$$v_n=\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)}+\frac{\sin(\ln(2n+1))-\sin(\ln 2n)}{2n+1}.$$
D'une part
$$\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
et d'autre part en vertu du théorème des accroissements finis, il existe c compris entre $\ln 2n$ et $\ln(2n+1)$ tel que
$$\frac{\sin(\ln(2n+1))-\sin(\ln 2n)}{2n+1}=\frac{\cos(c)\bigl(\ln(2n+1)-\ln 2n\bigr)}{2n+1}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On en déduit que $v_n=\mathrm{O}\bigl(1/n^2\bigr)$ et donc la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Il est immédiat de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. L'application $\varphi\colon E\to\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u)=(u_0,u_1)$ étant un isomorphisme (car un élément de E est déterminé de façon unique par la donnée de ses deux premiers termes), on peut affirmer que l'espace E est de dimension 2.

(b) Il est immédiat de vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont formés d'entiers naturels, qu'elles sont croissantes à partir du rang 1 et qu'elles sont à termes strictement positifs à partir du rang 2.
Ainsi
$$\forall n\geq 2, a_n, b_n\geq 1$$
et donc
$$a_{n+2}\geq n+1 \text{ et } b_{n+2}\geq n+1.$$
Ainsi les deux suites (a_n) et (b_n) tendent vers $+\infty$ en croissant (seulement à partir du rang 1 pour la première)

(c) On a
$$w_{n+1}=\bigl((n+1)a_{n+1}+a_n\bigr)b_{n+1}-a_{n+1}\bigl((n+1)b_{n+1}+b_n\bigr).$$
Après simplification, on obtient
$$w_{n+1}=-w_n$$
et donc
$$w_n=(-1)^n w_0=(-1)^{n+1}.$$

(d) On a
$$c_{n+1}-c_n=\frac{w_n}{b_nb_{n+1}}=\frac{(-1)^{n+1}}{b_nb_{n+1}}.$$
Puisque la suite de terme général b_nb_{n+1} croît vers $+\infty$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et affirmer que la série numérique $\sum(c_{n+1}-c_n)$ converge. Par conséquent la suite (c_n) converge.

(e) On a
$$\ell-c_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(c_{k+1}-c_k).$$
Par le critère spécial des séries alternées, on peut borner ce reste par la valeur absolue de son premier terme
$$|\ell-c_n|\leq\frac{1}{b_nb_{n+1}}.$$
On peut ainsi écrire
$$c_n=\ell+\mathrm{o}\left(\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right).$$
On a alors
$$a_n+rb_n=b_n(c_n+r)=b_n(\ell+r)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{b_{n+1}}\right).$$

Sachant $b_n \to +\infty$, on peut affirmer

$$a_n + rb_n \to 0 \iff r = -\ell.$$

Exercice 11 : [énoncé]
La fonction f_n est continue, strictement décroissante et de limites $+\infty$ et 0 en n et $+\infty$. On en déduit que f_n réalise une bijection de $]n\,;+\infty[$ vers $]0\,;+\infty[$. Ainsi, pour tout $a > 0$, il existe un unique $x_n > n$ vérifiant $f_n(x_n) = a$.
On a

$$f_n(n+1+y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+y-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+y} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \ln\Bigl(1+\frac{n}{y}\Bigr).$$

Pour $y = \frac{n}{\mathrm{e}^a - 1}$,

$$f(n+1+y) \leq \ln\bigl(1 + (\mathrm{e}^a - 1)\bigr) = a$$

et par suite

$$x_n \leq n + 1 + \frac{n}{\mathrm{e}^a - 1}.$$

Aussi

$$f(n+y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{y+k} \geq \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \ln\Bigl(1 + \frac{n}{y}\Bigr).$$

Pour $y = \frac{n}{\mathrm{e}^a - 1}$, $f(n+y) \geq a$ et par suite

$$x_n \geq n + \frac{n}{\mathrm{e}^a - 1}.$$

On en déduit

$$x_n \sim n + \frac{n}{\mathrm{e}^a - 1} = \frac{\mathrm{e}^a n}{\mathrm{e}^a - 1}.$$

Exercice 12 : [énoncé]
Introduisons la série entière de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(4n+3)}.$$

On vérifie aisément que son rayon de convergence est égale à 1 et que sa somme est définie et continue sur $[-1\,;1]$ par convergence normale.

Sur $]-1\,;1[$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+1}.$$

Pour $x \neq 0$

$$\Bigl(\frac{1}{x} S'(x)\Bigr)' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$

On en déduit que sur $]-1\,;1[$

$$S'(x) = x \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}$$

puis

$$S(x) = \int_0^x t \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}.$$

Par intégration par parties

$$S(x) = \Bigl[\frac{1}{2}(t^2-1) \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}\Bigr]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1-t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t$$

et ainsi

$$S(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Quand $x \to 1^-$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4} = \mathrm{O}\bigl(\ln(1-x)\bigr) = \mathrm{o}\Bigl(\frac{1}{x-1}\Bigr)$$

donc

$$S(x) \to \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{8}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = S(1) = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 13 : [énoncé]
On remarque

$$n \sum_{k=n}^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{k^2} \mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\Bigr) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \varphi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)$$

avec $\varphi\colon x \mapsto \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{1/x}$.

La fonction φ est décroissante en tant que produit de deux fonctions décroissantes positives. Par suite

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{(k-1)/n}^{k/n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant et en exploitant l'intégrabilité de φ au voisinage de $+\infty$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{(n-1)/n}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t=\Big[-\mathrm{e}^{1/t}\Big]_1^{+\infty}=\mathrm{e}-1\text{ et }\int_{(n-1)/n}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t=\Big[-\mathrm{e}^{1/t}\Big]_{(n-1)/n}^{+\infty}\to\mathrm{e}-1.$$

Par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right)=\mathrm{e}-1.$$

Exercice 14 : [énoncé]
Montrons que la série étudiée est divergente. Notons S_n la somme partielle de rang n de cette série. Nous allons construire deux suites (a_n) et (b_n) de limite $+\infty$ telles que $S_{b_n}-S_{a_n}$ ne tend pas zéros ce qui assure la divergence de la série étudiée.
Soit $n\geq 1$ fixé. Les indices k vérifiant

$$2n\pi-\frac{\pi}{4}\leq\sqrt{k}\leq 2n\pi+\frac{\pi}{4}$$

sont tels que

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k}})\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Posons alors
$$a_n=\lfloor 2n\pi-\pi/4\rfloor\quad\text{et}\quad b_n=\lfloor 2n\pi+\pi/4\rfloor.$$

On a

$$S_{b_n}-S_{a_n}=\sum_{k=a_n+1}^{b_n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

et donc par construction

$$\mathrm{Re}(S_{b_n}-S_{a_n})\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=a_{n+1}}^{b_n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Puisque la fonction $t\mapsto 1/\sqrt{t}$ est décroissante, on a la comparaison intégrale

$$\mathrm{Re}(S_{b_n}-S_{a_n})\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=a_n+1}^{b_n}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=\sqrt{2}\big(\sqrt{b_n+1}-\sqrt{a_n+1}\big).$$

Or

$$\sqrt{b_n+1}-\sqrt{a_n+1}=\frac{b_n-a_n}{\sqrt{b_n+1}+\sqrt{a_n+1}}\sim\frac{2n\pi^2}{4n\pi}\to\frac{\pi}{2}$$

donc $S_{b_n}-S_{a_n}$ ne tend par 0 et l'on peut conclure que la série étudiée diverge.

Exercice 15 : [énoncé]
Par un argument géométrique (trapèze sous la courbe) la concavité donne

$$x\frac{f(0)+f(x)}{2}\leq\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit $xf(x)\leq 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x$ donc

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\leq 2\int_{x=0}^1\left(\int_{t=0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\ (1).$$

Or

$$\int_{x=0}^1\int_{t=0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_{t=0}^1\int_{x=t}^1 f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_{t=0}^1(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

La relation (1) donne alors

$$3\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\leq 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\ (2).$$

Enfin

$$2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$$

donne

$$2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\geq 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\ (3).$$

Les relations (2) et (3) permettent alors de conclure.

Exercice 16 : [énoncé]
On peut écrire
$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Par le changement de variable $u = t^{n+1}$
$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 f(u^{1/(n+1)})\,\mathrm{d}u.$$
Par convergence dominée par $\|f\|_\infty$, on obtient
$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} \to f(1).$$

Exercice 17 : [énoncé]
Si l'un des x_i ou des y_i est nul, la relation est immédiate. On suppose désormais $x_i, y_i > 0$.
En divisant par $(x_1 \dots x_n)^{1/n}$, la propriété demandée équivaut à
$1 + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{1/n} \leq \big((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)\big)^{1/n}$ pour tout $\alpha_i > 0$. Établissons cette identité.
Considérons la fonction $f\colon x \mapsto \ln\big(1+\mathrm{e}^x\big)$.
f est dérivable et $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. La fonction f' est croissante donc f est convexe.
Par l'inégalité de Jensen :
$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\big(f(a_1) + \cdots + f(a_n)\big).$$
Pour $a_i = \ln \alpha_i$, on obtient
$$\ln\big(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}\big) \leq \frac{1}{n}\big(\ln(1+\alpha_1) + \cdots + \ln(1+\alpha_n)\big)$$
puis
$$\ln\big(1 + (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{1/n}\big) \leq \ln\big((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)\big)^{1/n}$$
et par la croissance de la fonction exponentielle, on obtient
$$1 + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{1/n} \leq \big((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)\big)^{1/n}.$$

Exercice 18 : [énoncé]
Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge, il en est de même de
$$\int_0^{+\infty} f(a+x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x)\,\mathrm{d}x$$
avec
$$\int_0^{+\infty} f(a+x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
On en déduit la convergence de l'intégrale suivante et sa valeur
$$\int_0^{+\infty} \big(f(a+x) - f(b+x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
D'autre part, on a par découpage et pour tout $A \geq 0$
$$\int_{-A}^0 \big(f(a+x) - f(b+x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-A+a}^{-A+b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Or
$$(b-a)\min_{[-A+a;-A+b]} f \leq \int_{-A+a}^{-A+b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\max_{[-A+a;-A+b]} f$$
avec
$$\min_{[-A+a;-A+b]} f \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ell \text{ et } \max_{[-A+a;-A+b]} f \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ell$$
car f converge vers ℓ en $-\infty$.
On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale suivante
$$\int_{-\infty}^0 \big(f(a+x) - f(b+x)\big)\,\mathrm{d}x = (b-a)\ell - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
et finalement on obtient la convergence et la valeur de l'intégrale suivante
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(a+x) - f(b+x)\big)\,\mathrm{d}x = (b-a)\ell.$$

Exercice 19 : [énoncé]
On procède au changement de variable
$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t$$

avec $t \in [-\pi/2\,;\pi/2]$.
On obtient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$$

(avec convergence de l'intégrale) et

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 20 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto P(t)/Q(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $|t| \to +\infty$, $P(t)/Q(t) = \mathrm{O}(1/t^2)$ car $\deg(P/Q) \le -2$.
Par suite l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q}$ converge.
Les pôles de la fraction P/Q sont complexes conjugués non réels et les parties polaires correspondantes sont deux à deux conjuguées. On en déduit que $P/Q = 2\,\mathrm{Re}(F)$ où F est la fraction rationnelle obtenue en sommant les parties polaires relatives aux pôles de partie imaginaire strictement positive.
Considérons un pôle $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.
Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{(X-a)^m}$ avec $m > 1$, on a
$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^m} = \left[-\frac{1}{m-1}\frac{1}{(t-a)^{m-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$
Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{X-a}$ on a
$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \int_{-A}^{A} \frac{t-\alpha+\mathrm{i}\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2} = \left[\ln|t-a| + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\right]_{-A}^{A}$. Quand $A \to +\infty$, on obtient $\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-a} \to \mathrm{i}\pi$.
Puisque $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = 2\,\mathrm{Re}(\sigma)\pi$ avec σ la somme des coefficients facteurs des éléments simples $\frac{1}{X-a}$ avec a de parties imaginaires strictement positive.

Exercice 21 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{1+X^4+X^8} = \frac{1-X^4}{1-X^{12}}.$$

Les pôles de cette fraction rationnelle sont les éléments de $U_{12} \setminus U_4$ et ils sont simples.
On peut donc écrire en combinant les parties polaires conjuguées

$$\frac{1}{1+X^4+X^8} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_1}{X-\omega_1}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_2}{X-\omega_2}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_4}{X-\omega_4}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_5}{X-\omega_5}\right)$$

avec $\omega_k = \exp(2\mathrm{i}k\pi/12)$, les $\omega_1, \omega_2, \omega_4$ et ω_5 de parties imaginaires strictement positives.

$$\alpha_k = \left.\frac{1-X^4}{(1-X^{12})'}\right|_{X=\omega_k} = \frac{1}{12}\left(\omega_k^5 - \omega_k\right).$$

Soit $\omega = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. On a

$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-\omega} = \int_{-A}^{A} \frac{(t-a)+\mathrm{i}b}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\left((t-a)^2+b^2\right) + \mathrm{i}\arctan\frac{t-a}{b}\right]_{-A}^{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \mathrm{i}\pi$$

la limite de l'arc tangente étant obtenue sachant $b > 0$.
Soit de plus $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{t-\omega}\right)\mathrm{d}t\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\lim_{A\to+\infty} \alpha \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-\omega}\right) = -2\pi\,\mathrm{Im}\,\alpha.$$

Puisque la convergence de l'intégrale que nous étudions est assurée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}$$

et on en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = -2\pi\,\mathrm{Im}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{Im}\left(\omega^2 - \omega^{10} + \omega^4 - \omega^8\right).$$

Or

$$\omega^2 - \omega^{10} = 2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } \omega^4 - \omega^8 = 2\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = i\sqrt{3}$$

et finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) *On peut exprimer u_n en fonction de v_n et v_{n-1}.*

Puisque nv_n correspond à la somme $u_1 + \cdots + u_n$, on remarque

$$u_n = nv_n - (n-1)v_{n-1} \quad \text{pour } n \ge 2$$

La différence des membres de l'inégalité étudiée s'écrit alors

$$\begin{aligned}(n+1)v_n^2-(n-1)v_{n-1}^2-2u_nv_n &= (n+1)v_n^2-(n-1)v_{n-1}^2-2nv_n^2+2(n-1)v_nv_{n-1}\\ &= (1-n)v_n^2+2(n-1)v_nv_{n-1}+(1-n)v_{n-1}^2\\ &= (1-n)(v_n-v_{n-1})^2\leq 0\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité voulue.

(b) Soit $n\geq 2$. On peut écrire

$$(n+1)v_n^2-(n-1)v_{n-1}^2=v_n^2+nv_n^2-(n-1)v_{n-1}^2$$

ce qui fait apparaître v_n^2 et un terme télescopique. En sommant ces termes pour n allant de 2 jusqu'à un entier N, on obtient

$$\sum_{n=2}^N v_n^2+Nv_N^2-v_1^2\leq 2\sum_{n=2}^N u_nv_n$$

En ajoutant $2v_1^2$ dans chaque membre et en remarquant $u_1=v_1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^N v_n^2+Nv_N^2\leq 2\sum_{n=1}^N u_nv_n$$

puis

$$\sum_{n=1}^N v_n^2\leq 2\sum_{n=1}^N u_nv_n$$

On majore la somme en second membre en séparant les facteurs u_n et v_n grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2\leq 2\left(\sum_{n=1}^N u_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^N v_n^2\right)^{1/2}$$

Que la somme en premier membre soit nulle ou non, on obtient

$$\left(\sum_{n=1}^N v_n^2\right)^{1/2}\leq 2\left(\sum_{n=1}^N u_n^2\right)^{1/2}$$

Enfin, on élève au carré pour écrire

$$\sum_{n=1}^N v_n^2\leq 4\sum_{n=1}^N u_n^2\leq 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

On en déduit que la série de terme général v_n^2 car il s'agit d'une série à termes positifs aux sommes partielles majorées. Au surplus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N v_n^2\leq 4\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$$

(c) Sans perte de généralité, on peut supposer les termes u_n positifs (ou simplement mener l'étude avec $|u_n|$ au lieu de u_n). Soit $N\geq 2$.

$$\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N\frac{u_mu_n}{m+n}=\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^n\frac{u_mu_n}{m+n}+\sum_{n=1}^N\sum_{m=n+1}^N\frac{u_mu_n}{m+n}$$

On échange les deux sommes du deuxième terme

$$\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N\frac{u_mu_n}{m+n}=\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^n\frac{u_mu_n}{m+n}+\sum_{m=2}^N\sum_{n=1}^{m-1}\frac{u_mu_n}{m+n}$$

On exploite l'inégalité $m+n\geq n$ pour majorer le premier terme et faire apparaître v_n et l'inégalité $m+n\geq m$ pour le second terme en faisant apparaître v_m quitte à adjoindre un terme positif à la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N\frac{u_mu_n}{m+n}&\leq\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^n\frac{u_mu_n}{n}+\sum_{m=2}^N\sum_{n=1}^{m-1}\frac{u_mu_n}{m}\\ &\leq\sum_{n=1}^N u_nv_n+\sum_{m=2}^N u_mv_m\leq 2\sum_{n=1}^N u_nv_n\end{aligned}$$

L'inégalité $2ab\leq a^2+b^2$ complète l'étude

$$\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N\frac{u_mu_n}{m+n}\leq\sum_{n=1}^N(u_n^2+v_n^2)\leq\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2+\sum_{n=1}^{+\infty}v_n^2$$

Finalement, la famille étudiée est sommable car les sommes partielles sur les parties finies sont majorées.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) On vérifie sans peine que la suite (f_n) est bien définie.

$$f_1(x)=x,f_2(x)=\frac{2}{3}x^{3/2},\dots$$

Si $f(x) = \alpha x^\beta$ alors

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{\alpha}\int_0^x t^{\beta/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2}x^{\beta/2+1}.$$

Ainsi $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n+2} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}+1.$$

On a

$$\beta_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}} \to 2$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

On a

$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4-\frac{1}{2^n}} - \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Or $2^n \geq 2^{n-1}$ donne

$$\frac{2}{4-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc

$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1} \leq \frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\sqrt{\alpha_{n+1}}-\sqrt{\alpha_n}\right).$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_0$, on obtient alors par récurrence que la suite (α_n) est décroissante.
Étant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\alpha_n \to 1/4.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f\colon x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

De plus

$$f_n(x)-f(x) = \alpha_n\left(x^{\beta_n}-x^2\right) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)x^2.$$

Puisque $\beta_n \leq 2$, on a pour tout $x \in [0\,;1]$ et en exploitant $\mathrm{e}^u \leq 1+u$

$$\begin{aligned}0 \leq x^{\beta_n}-x^2 &= \int_{\beta_n}^2 \left|\ln(x)\right|x^t\,\mathrm{d}t\\ &\leq (2-\beta_n)\left|\ln(x)\right|.x^{\beta_n} \leq (2-\beta_n)\left|\ln(x)\right|x.\end{aligned}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x|\ln x|$ est bornée par $1/\mathrm{e}$ sur $[0\,;1]$,

$$0 \leq x^{\beta_n}-x^2 \leq 2-\beta_n$$

et ainsi

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| = \alpha_n(2-\beta_n) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)$$

et ce majorant uniforme tend vers 0.
Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f.

(b) La relation

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

donne à la limite

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

d'où l'on tire f dérivable et $f'(x) = \sqrt{f(x)}$.
Pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y\colon x \mapsto (x/2)^2$ est justement solution.

Exercice 24 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand

$$f_n(x) = (1-x/n)^n = \exp\left(n\ln(1-x/n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-x}.$$

La suite (f_n) converge simplement vers $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ avec $f_n \leq f$.
Étudions $\delta_n = f - f_n \geq 0$.
Pour $x \in [n\,;+\infty[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-n}$.
Pour $x \in [0\,;n[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1-x/n)^n$ et $\delta_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (1-x/n)^{n-1}$.
Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1)\ln(1-x/n) + x.$$

On a

$$\varphi_n'(x) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{x/n-1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1-x$.
Par étude des variations de φ_n, on obtient l'existence de $x_n \in [0\,;n[$ tel que $\varphi_n(x) \geq 0$ pour $x \leq x_n$ et $\varphi_n(x) \leq 0$ pour $x \geq x_n$. On en déduit que pour $x \leq x_n$, $\delta_n'(x) \geq 0$ et pour $x \geq x_n$, $\delta_n'(x) \leq 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} = \delta_n(x_n) = \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n}\mathrm{e}^{-x_n}.$$

Puisque la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est bornée par un certain M sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} \leq \frac{M}{n}.$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;+\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, \mathrm{e}^{-n}\right) \to 0.$$

On peut donc affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

Exercice 25 : [énoncé]
Puisque $a_n > 0$ et $\sum a_n(1+|x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.
Posons $f_n(x) = a_n|x-x_n|$.
Comme $\bigl|a_n|x-x_n|\bigr| \leq |a_n||x| + |a_n x_n|$, la série des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont continues et sur $[-M\,;M]$, $\|f_n\|_\infty \leq Ma_n + a_n|x_n|$.
Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme f est continue.
Soit $[\alpha\,;\beta] \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \notin [\alpha\,;\beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha\,;\beta]$ et $f_n'(x) = \varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon| = 1$.
Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha\,;\beta]$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]a\,;b[$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin\,]a\,;b[$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x_n = a$.
En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a\}$, on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n\in A} a_n|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A} a_n|x-x_n| = \alpha|x-a| + g(x)$$

avec $\alpha > 0$.
Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour N assez grand, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_n \leq \frac{\alpha}{2}$.
On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\geq N+1} a_n|x-x_n| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\leq N} a_n|x-x_n|.$$

La fonction $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\leq N} a_n|x-x_n|$ est dérivable au voisinage de a.
Cependant, la fonction

$$\varphi\colon x \mapsto \alpha|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\geq N+1} a_n|x-x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en a.
En effet, pour $h > 0$,

$$\frac{1}{h}\bigl(\varphi(a+h)-\varphi(a)\bigr) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour $h < 0$,

$$\frac{1}{h}\bigl(\varphi(a+h)-\varphi(a)\bigr) \leq -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

Exercice 26 : [énoncé]
Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.
Soit f une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0) = 0$.
On a

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

donc

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^{n+1})}{2^n}.$$

Posons $h(x) = \sup_{[0;x]}|f|$.
Pour $x > 0$, on a $x^{n+1} \in [0\,;x^2]$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit

$$\bigl|f(x)\bigr| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} h(x^2) = h(x^2).$$

Ainsi $h(x) \leq h(x^2)$ puis en itérant $0 \leq h(x) \leq h(x^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or pour $x \in [0\,;1[$, $x^{2^n} \to 0$ et $\lim_{0^+} h = 0$ (car $f(0) = 0$) donc $h(x) = 0$ sur $[0\,;1[$.
Finalement f est nulle sur $[0\,;1[$ puis en 1 par continuité.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Les coefficients y_j de la colonne Y étant tous positifs, on peut écrire

$$[AY]_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{\geq \alpha} y_j \geq \sum_{j=1}^n \alpha y_j \geq \alpha \max(Y).$$

Cette comparaison valant pour tout indice i, il vient

$$\min(AY) \geq \alpha \max(Y).$$

(b) Par construction, la colonne Y est à coefficients positifs. Aussi, on vérifie $AU = U$ car les lignes de A sont de sommes constantes égales à 1. On a donc

$$\min(AY) \geq \alpha \max(Y)$$

avec

$$\min(AY) = \min\bigl(AX - \min(X)U\bigr) = \min(AX) - \min(X)$$

et

$$\max(Y) = \max\bigl(X - \min(X)U\bigr) = \max(X) - \min(X)$$

ce qui donne après réorganisation des termes

$$\min(AX) \geq \alpha \max(X) + (1-\alpha)\min(X).$$

Pour obtenir la seconde comparaison, on peut reprendre ce qui précède à partir de $Y = \max(X)U - X$ ou bien employer ce qui suit :

> *Par passage à l'opposé* $\min(-X) = -\max(X)$ *et* $\max(-X) = -\min(X)$.

En appliquant le résultat précédent à la colonne $-X$, il vient après échange des min et des max et renversement de la comparaison

$$\max(AX) \leq \alpha \min(X) + (1-\alpha)\max(X).$$

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. En appliquant les comparaisons qui précèdent à la colonne A^pX, on obtient

$$\begin{aligned}\min(A^{p+1}X) &\geq \alpha \max(A^pX) + (1-\alpha)\min(A^pX)\\ &\geq \alpha \min(A^pX) + (1-\alpha)\min(A^pX) = \min(A^pX)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\max(A^{p+1}X) &\leq \alpha \min(A^pX) + (1-\alpha)\max(A^pX)\\ &\leq \alpha \max(A^pX) + (1-\alpha)\max(A^pX) = \max(A^pX).\end{aligned}$$

Les deux suites $\bigl(\min(A^pX)\bigr)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\bigl(\max(A^pX)\bigr)_{p\in\mathbb{N}}$ sont donc respectivement croissante et décroissante. Aussi, on a

$$\max(A^{p+1}X) - \min(A^{p+1}X) \leq (1-2\alpha)\bigl(\max(A^pX) - \min(A^pX)\bigr)$$

et, par une récurrence immédiate,

$$0 \leq \max(A^pX) - \min(A^pX) \leq (1-2\alpha)^p\bigl(\max(AX) - \min(AX)\bigr).$$

Or $1-2\alpha \in [0\,;1[$ car les coefficients de A sont strictement positifs et la somme de ceux-ci sur chaque ligne vaut 1 ce qui oblige $n\alpha \leq 1$. La suite géométrique $\bigl((1-2\alpha)^p\bigr)$ est donc de limite nulle et, par comparaison, on conclut que la différence des deux suites $\bigl(\max(A^pX)\bigr)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\bigl(\min(A^pX)\bigr)_{p\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle. Finalement, ces deux suites sont adjacentes.

(d) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'adjacence des suites $\bigl(\min(A^pX)\bigr)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\bigl(\max(A^pX)\bigr)_{p\in\mathbb{N}}$ entraîne la convergence de (A^pX) vers une colonne dont tous les coefficients sont égaux :

$$A^pX \xrightarrow[p\to+\infty]{} \begin{pmatrix}\ell(X)\\ \vdots\\ \ell(X)\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \ell(X) \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, la j-ème colonne de A^p correspond au produit de A^p par la j-ème colonne élémentaire E_j de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Colonne par colonne, on justifie

$$A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A_\infty = \begin{pmatrix}\ell(E_1) & \cdots & \ell(E_n)\\ \vdots & & \vdots\\ \ell(E_1) & \cdots & \ell(E_n)\end{pmatrix}.$$

Cette limite est de rang au plus 1 car ses lignes sont toutes identiques, elle est même de rang exactement 1 car ce n'est pas la matrice nulle. En effet, $AU = U$ donne $A^pU = U$ puis, à la limite, $A^\infty U = U$.

Exercice 28 : [énoncé]

Cas $n = 2$

Par l'absurde supposons qu'une telle norme existe.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Les matrices A et B sont semblables (via $P = \operatorname{diag}(1/2, 1)$) donc $\|A\| = \|B\|$. Or $B = 2A$ donc $\|B\| = 2\|A\|$ puis $\|A\| = 0$.
C'est absurde car $A \neq O_2$.
Cas général : semblable.

Exercice 29 : [énoncé]
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n_0 \leq \varepsilon$.
Pour $a \geq \ln n_0$ et $n = E(\mathrm{e}^a) \geq n_0$, on a $\ln n \leq a \leq \ln(n+1)$.
On en déduit

$$|a - \ln n| \leq \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \leq 1/n \leq 1/n_0 \leq \varepsilon.$$

Puisque $m - x \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$, pour m assez grand, on a $a = m - x \geq \ln n_0$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $|a - \ln n| \leq \varepsilon$ *i.e.*

$$|m - \ln n - x| \leq \varepsilon.$$

Par suite $\left\{ m - \ln n \,\middle|\, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 30 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $A \neq E$.
Il existe un élément $a \in E$ tel que $a \notin A$. Par translation du problème, on peut supposer $a = 0$.
Posons $n = \dim E$.
Si $\operatorname{Vect}(A)$ est de dimension strictement inférieure à n alors A est inclus dans un hyperplan de E et son adhérence aussi. C'est absurde car cela contredit la densité de A.
Si $\operatorname{Vect}(A)$ est de dimension n, on peut alors considérer $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée d'éléments de A.
Puisque $0 \notin A$, pour tout $x \in A$, on remarque : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, -\lambda x \notin A$ (car sinon, par convexité, $0 \in A$).
Par convexité de A : $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \implies \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in A$ et donc :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \implies \lambda(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) \notin A$.
Ainsi $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \leq 0, \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n \notin A$.
Or la partie $\{\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n \mid \mu_i < 0\}$ est un ouvert non vide de A et donc aucun de ses éléments n'est adhérent à A. Cela contredit la densité de A.

Exercice 31 : [énoncé]
Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F + \operatorname{Vect}(u)$ fermé pour tout $u \notin F$.
Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de $F + \operatorname{Vect}(u)$ de limite x.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$.
Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée.
Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n| \to +\infty$.
Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n + u$.
Puisque $\|x_n\| \to \|x\|$ et $|\lambda_n| \to +\infty$, on a $\|z_n\| \to 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n} y_n \to -u$.
Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n} y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F, donc $-u \in F$ ce qui exclu.
Ainsi la suite (λ_n) est bornée et on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(n)})$ de limite $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par opérations, la suite $(y_{\varphi(n)})$ est alors convergente.
En notant y sa limite, on a $y \in F$ car l'espace F est fermé.
En passant la relation $x_n = y_n + \lambda_n u$ à la limite on obtient
$x = y + \lambda u \in F + \operatorname{Vect}(u)$.
Ainsi l'espace $F + \operatorname{Vect}(u)$ est fermé.

Exercice 32 : [énoncé]
Considérons l'ensemble $B = \ln A = \{\ln a \mid a \in A\}$.
Pour tout $x, y \in B$, $\frac{x+y}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab} \in B$.
En raisonnant par récurrence, on montre que pour tout $x, y \in B$, on a la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \left\{0, \dots, 2^n\right\}, \frac{kx + (2^n - k)y}{2^n} \in B.$$

Soit $x \in \left]\inf A \,;\sup A\right[$. Il existe $a, b \in A$ tels que $a < x < b$.
On a alors $\ln a < \ln x < \ln b$ avec $\ln a, \ln b \in B$.
On peut écrire $\ln x = \lambda \ln a + (1 - \lambda) \ln b$ avec $\lambda \in \left]0\,;1\right[$.
Posons alors k_n la partie entière de $\lambda 2^n$ et $x_n = \exp\left(\frac{k_n}{2^n} \ln a + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right) \ln b\right)$
Il est immédiat que $x_n \to x$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$.
Si, dans cette suite, il existe une infinité d'irrationnels, alors x est limite d'une suite d'éléments de $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
Sinon, à partir d'un certain rang, les termes de la suite x_n sont tous rationnels.
Le rapport x_{n+1}/x_n est alors aussi rationnel ; mais

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n}} \text{ avec } \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = 0 \text{ ou } \frac{1}{2^{n+1}}.$$

S'il existe une infinité de n tels que $\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^n}} \in \mathbb{Q}$$

et puisque l'élévation au carré d'un rationnel est un rationnel, le nombre a/b est lui-même rationnel. Or les racines carrées itérés d'un rationnel différent de 1 sont irrationnelles à partir d'un certain rang.
Il y a absurdité et donc à parti d'un certain rang $k_{n+1} = 2k_n$.
Considérons à la suite (x_n') définie par

$$x_n' = \exp\left(\frac{k_n'}{2^n}\ln a + \left(1 - \frac{k_n'}{2^n}\right)\ln b\right) \text{ avec } k_n' = k_n + 1.$$

On obtient une suite d'éléments de A, convergeant vers x et qui, en vertu du raisonnement précédent, est formée d'irrationnels à partir d'un certain rang.

Exercice 33 : [énoncé]
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
Soit (A_p) une suite convergente de matrices semblables à A.
Notons A_∞ la limite de (A_p).
Si P est un polynôme annulateur de A, P est annulateur des A_p et donc P annule A_∞. Puisque A est supposée diagonalisable, il existe un polynôme scindé simple annulant A et donc A_∞ et par suite A_∞ est diagonalisable.
De plus $\chi_A = \chi_{A_p}$ donc à la limite $\chi_A = \chi_{A_\infty}$.
On en déduit que A et A_∞ ont les mêmes valeurs propres et que celles-ci ont mêmes multiplicités. On en conclut que A et A_∞ sont semblables.
Ainsi la classe de similitude de A est fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
À titre d'exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pour $P_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$P_p^{-1}AP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \lambda I_2$$

qui n'est pas semblable à A.

De façon plus générale, si la matrice A n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre λ pour laquelle

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \neq \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2).$$

Pour $X_2 \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$. En complétant la famille libre (X_1, X_2) en une base, on obtient que la matrice A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (*) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix}.$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, \dots, 1)$, on obtient

$$P_p^{-1}TP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & (*/p) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} = A_\infty.$$

Or cette matrice n'est pas semblable à T ni à A car $\operatorname{rg}(A_\infty - \lambda I_n) \neq \operatorname{rg}(T - \lambda I_n)$.
Ainsi, il existe une suite de matrices semblables à A qui converge vers une matrice qui n'est pas semblable à A, la classe de similitude de A n'est pas fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ alors toute limite A_∞ d'une suite de la classe de similitude de A est semblable à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = A_\infty$. On a alors $AP = PA_\infty$. En introduisant les parties réelles et imaginaires de P, on peut écrire $P = Q + \mathrm{i}R$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'identité $AP = PA_\infty$ avec A et A_∞ réelles entraîne $AQ = QA_\infty$ et $AR = RA_\infty$.
Puisque la fonction polynôme $t \mapsto \det(Q + tR)$ n'est pas nulle (car non nulle en i), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P' = Q + tR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour cette matrice $AP' = P'A_\infty$.
Ainsi les matrices A et A_∞ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Il existe une valeur propre complexe λ pour laquelle
$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \neq \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$.
Pour $X_2 \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de reprendre la démonstration qui précède.
Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on peut écrire $\lambda = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.
Posons $X_3 = \overline{X}_1$ et $X_4 = \overline{X}_2$.
La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre car $\lambda \neq \overline{\lambda}$.
Introduisons ensuite $Y_1 = \operatorname{Re}(X_1)$, $Y_2 = \operatorname{Re}(X_2)$, $Y_3 = \operatorname{Im}(X_1)$ et $Y_4 = \operatorname{Im}(X_2)$.
Puisque $\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(Y_1, \dots, Y_4) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(X_1, \dots, X_4)$, la famille $(Y_1, \dots, Y_4)$ est libre et peut donc être complétée en une base.

On vérifie par le calcul $AY_1 = aY_1 - bY_3$, $AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1$, $AY_3 = aY_3 + bY_1$ et $AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3$. et on obtient que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice

$$\begin{pmatrix} T & * \\ O & B \end{pmatrix}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, p, 1, \dots 1)$, on obtient

$$P_p^{-1} T P_p \to \begin{pmatrix} T_\infty & *' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Or dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A_∞ est semblable est à $\operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}, B)$ qui n'est pas semblable à A pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu.
Les matrices réelles A et A_∞ ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni *a fortiori* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que la classe de similitude de A n'est pas fermée

Exercice 34 : [énoncé]
Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a.
Nous allons établir que A est un intervalle en observant que

$$\forall \alpha < \beta \in A, [\alpha\,;\beta] \subset A$$

(caractérisation usuelle des intervalles)
Soit $\alpha < \beta \in A$ et $\gamma \in [\alpha\,;\beta]$. Si $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = \beta$ alors évidemment $\gamma \in A$.
Supposons maintenant $\gamma \in \,]\alpha\,;\beta[$.
Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $a_{n+1} - a_n \to 0$, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon.$$

Comme α est valeur d'adhérence de a et que $\alpha < \gamma$ il existe $p \geq \max(N, N')$ tel que $a_p < \gamma$. Aussi, il existe $q \geq \max(N, N')$ tel que $a_q > \gamma$.

Si $p < q$, on introduit

$$E = \{n \in [\![p\,;q]\!], a_n < \gamma\}.$$

Cet ensemble E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car $p \in E$) et majoré (par q). Cet ensemble admet donc un plus grand élément r. Nécessairement $r < q$ car $a_q \geq \gamma$.
Puisque $r \in E$ et $r + 1 \notin E$, $a_r < \gamma \leq a_{r+1}$ et donc $|\gamma - a_r| \leq |a_{r+1} - a_r| \leq \varepsilon$.
Si $p > q$, un raisonnement semblable conduit à la même conclusion.
Finalement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists r \geq N, |\gamma - a_r| \leq \varepsilon.$$

On peut donc affirmer que γ est valeur d'adhérence de a et conclure.

Exercice 35 : [énoncé]
Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{2}{3}\ell$ de sorte que $\varepsilon_n = v_n + \frac{v_{2n}}{2} \to 0$.
Soit a une valeur d'adhérence de la suite (v_n).
Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_{\varphi(n)} \to a$.

$$v_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2a$$

donc $-2a$ est aussi valeur d'adhérence de (v_n).
En reprenant ce processus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(-2)^p a$ est valeur d'adhérence de (v_n).
Or la suite (u_n) est bornée, la suite (v_n) l'est donc aussi et ses valeurs d'adhérence le sont encore. On peut donc affirmer $a = 0$.
La suite (v_n) est bornée et 0 est sa seule valeur d'adhérence donc elle converge vers 0 (car si tel n'était pas le cas, il existerait une infinité de termes de la suite (v_n) en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon\,;\varepsilon], \varepsilon > 0$, et de ces termes bornés on pourrait extraire une suite convergente d'où l'existence d'une valeur d'adhérence non nulle).

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_n}{n-t}\right| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{(n-t)^2}\right)$$

donc $\sum \frac{a_n}{n-t}$ est absolument convergente. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

(b) Pour $|t| < 1$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1 - t/n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_n t^m}{n^{m+1}}.$$

Puisque la série $\sum_{m\geq 0}\frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}}$ converge pour tout $n\geq 1$ et puisque

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}}=\sum_{n\geq 1}\frac{|a_n|}{n-|t|}$$

converge, peut appliquer le théorème de Fubini pour intervertir les deux sommes.

$$f(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{m+1}}\right)t^m.$$

La fonction f apparaît alors comme développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

(c) Si $f(t)=0$ sur $[-1/2\,;1/2]$ alors le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$ est nul et on en déduit que f est nulle sur $]-1\,;1[$.
Or

$$f(t)=\frac{a_1}{1-t}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{n-t}$$

avec $t\mapsto\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{n-t}$ définie et continue au voisinage de 1. On en déduit que $a_1=0$.
On peut alors reprendre l'étude du b) et, sachant $a_1=0$, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $]-2\,;2[$. Or ce dernier développement étant nul, on obtient comme ci-dessus $a_2=0$ etc.
Au final, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle.

Exercice 37 : [énoncé]

Posons $f_n(x)=\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x\in[0\,;n]$ et $f_n(x)=0$ si $x\in]n\,;+\infty[$.
Pour $x\in\mathbb{R}_+$, quand $n\to+\infty$,

$$f_n(x)=\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}=\exp\bigl(n^2\ln\bigl(1-x^2/2n^2+\mathrm{o}(1/n^2)\bigr)\bigr)\to\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f\colon x\mapsto\mathrm{e}^{-x^2/2}$ sur $[0\,;+\infty[$. Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Soit $\psi\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par $\psi(t)=1-t^2/4-\cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x\in[0\,;1],\psi(x)\geq 0.$$

On en déduit que, pour $x\in[0\,;n]$,

$$\ln\left(\cos\frac{x}{n}\right)\leq\ln\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)\leq-\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x)\leq\mathrm{e}^{-x^2/4}.$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x\in]n\,;+\infty[$ et puisque la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Appliquons le théorème de convergence dominée.
Posons $f_n\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t)=F\bigl(\sqrt{n}(\delta t-h)\bigr).$$

Pour $t\in[0\,;h/\delta[$, on a $f_n(t)\to 1$.
Pour $t\in]h/\delta\,;1]$, on a $f_n(t)\to 0$.
Enfin, pour $t=h/\delta$, $f_n(t)=F(0)\to F(0)$.
Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers f définie par

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\in[0\,;h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t=h/\delta\\ 0 & \text{si } t\in]h/\delta\,;1].\end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.
Enfin

$$\forall t\in[0\,;1],\bigl|f_n(t)\bigr|\leq 1=\varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.
Par convergence dominée,

$$I_n\to\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{h/\delta}1\,\mathrm{d}t=\frac{h}{\delta}.$$

(b) Par la décroissance de F, on peut écrire

$$\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n}F\bigl(\sqrt{n}(\delta t-h)\bigr)\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{n}F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n}-h\right)\right)\leq\int_{k/n}^{(k+1)/n}F\bigl(\sqrt{n}(\delta t-h)\bigr)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n}F\bigl(\sqrt{n}(\delta t-h)\bigr)\,\mathrm{d}t\leq\frac{S_n}{n}\leq I_n$$

et
$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\big(\sqrt{n}(\delta t-h)\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 F\big(\sqrt{n}(\delta(t+1/n)-h)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut
$$S_n\sim\frac{h}{\delta}n.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Pour $x>0$, posons
$$u_n(x)=\int_0^{+\infty} n\cos t(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.
Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors
$$u_n(x)=-\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty}(\sin t)^{n+1}xf'(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Posons $g_n(x)=|\sin t|^{n+1}xf'(xt)\,\mathrm{d}t$.
Chaque fonction g_n est continue par morceaux.
La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x\neq\pi/2+k\pi$.
La fonction limite simple est continue par morceaux.
Enfin on a la domination
$$\big|g_n(x)\big|\le xf'(xt)=\varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.
Par convergence dominée
$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

et par comparaison
$$u_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

(b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme.
Par changement de variable
$$u_n(x)=-\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty}(\sin(u/x))^{n+1}f'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Soit $\varepsilon>0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A\in\mathbb{R}_+$ tel que
$$\int_A^{+\infty}\big|f'(u)\big|\,\mathrm{d}u\le\varepsilon$$

et alors
$$\big|u_n(x)\big|\le M\int_0^A\big|\sin(u/x)\big|^{n+1}\,\mathrm{d}u+\varepsilon \text{ avec } M=\max_{u\in[0;A]}\big|f'(u)\big|.$$

Pour $x\ge 4A/\pi$, on a
$$\forall u\in[0\,;A], 0\le\frac{u}{x}\le\frac{A}{x}\le\frac{\pi}{4}$$

et donc
$$\int_0^A\big|\sin(u/x)\big|^{n+1}\,\mathrm{d}u\le\frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}.$$

Pour $x\le 4A/\pi$, on a par changement de variable
$$\int_0^A\big|\sin(u/x)\big|^{n+1}\,\mathrm{d}u=x\int_0^{A/x}|\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Pour k entier tel que $k\pi<A/x\le(k+1)\pi$.
$$\int_0^A\big|\sin(u/x)\big|^{n+1}\,\mathrm{d}u\le x\int_0^{(k+1)\pi}|\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t=x(k+1)\int_0^{\pi}(\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Or $x(k+1)\pi\le A+x\pi\le 5A$ et donc
$$\int_0^A\big|\sin(u/x)\big|^{n+1}\,\mathrm{d}u\le\frac{5A}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, pour tout $x>0$,
$$\big|u_n(x)\big|\le\frac{5AM}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t+\frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}}+\varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$\left|u_n(x)\right| \le 2\varepsilon.$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Cas $a = c$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, M^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } \exp(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & b\mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^a \end{pmatrix}.$$

Cas $a \neq c$:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & \alpha_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_n = b\big(a^{n-1}c^0 + a^{n-2}c + \cdots + a^0c^{n-1}\big) = b\frac{a^n - c^n}{a - c}$$

et

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & x \\ 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix} \text{ avec } x = \frac{b(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^c)}{a - c}.$$

(b) Avec des notations immédiates, si $\exp(M) = \exp(M')$ alors par identification des coefficients diagonaux, on obtient $a = a'$ et $c = c'$.
Dans le cas $a = c$, l'identification du coefficient d'indice $(1,2)$ donne

$$b\mathrm{e}^a = b'\mathrm{e}^{a'}$$

d'où $b = b'$.
Dans le cas $a \neq c$, la même identification donne

$$\frac{b(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^c)}{a - c} = \frac{b'(\mathrm{e}^{a'} - \mathrm{e}^{c'})}{a' - c'}$$

et à nouveau $b = b'$.
Ainsi l'application $\exp\colon T \to T^+$ est injective.
Considérons maintenant

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in T^+.$$

Si $\alpha = \gamma$ alors pour $a = \ln\alpha$ et $b = \beta/\alpha$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.
Si $\alpha \neq \gamma$ alors pour $a = \ln\alpha$, $c = \ln\gamma$ et $b = \beta(a - c)/(\alpha - \gamma)$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.
Ainsi l'application $\exp\colon T \to T^+$ est surjective.