Variables aléatoires

Loi binomiale

Exercice 1 [03846] [Correction]
Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0\,;1[$. On note

$$b(k,n,p) = \mathrm{P}(X = k).$$

(a) Pour quelle valeur m de k, le coefficient $b(k,n,p)$ est-il maximal ?

(b) Étudier la monotonie de la fonction $f\colon x \mapsto x^m(1-x)^{n-m}$ sur $[0\,;1]$.

(c) Vérifier que si $m \in [np\,;(n+1)p]$ alors

$$b\Bigl(m,n,\frac{m}{n+1}\Bigr) \le b(m,n,p) \le b\Bigl(m,n,\frac{m}{n}\Bigr).$$

(d) Proposer en encadrement analogue pour $m \in [(n+1)p-1\,;np]$.

(e) On donne la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}.$$

Donner un équivalent simple de $b(m,n,p)$.

Exercice 2 [03975] [Correction]
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

Exercice 3 [04125] [Correction]
Un étudiant résout un QCM constitué de n questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre celle-ci. Dans ce cas il produit la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu « au hasard ».

(a) Reconnaître la loi de $Z = X + Y$.

(b) Calculer espérance et variance de Z.

Exercice 4 [04118] [Correction]
Un archer tire sur n cibles. À chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchés lors de cette tentative. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

Exercice 5 [04191] [Correction]

(a) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres p et q. Déterminer la loi de la variable $Z = \max(X,Y)$.

Deux archers tirent indépendemment sur n cibles. À chaque tir, le premier archer a la probabilité p de toucher, le second la probabilité q.

(b) Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles touchées au moins une fois ?

(c) Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles épargnées ?

Indépendance de variables aléatoires

Exercice 6 [03974] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur un espace Ω. On suppose

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathrm{P}(X = x, Y = y) = \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y).$$

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 7 [03973] [Correction]
Montrer que deux évènements sont indépendants si, et seulement si, leurs fonctions indicatrices définissent des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 8 [03818] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 [03825] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires prenant pour valeurs $a_1, \dots, a_n$ avec

$$\mathrm{P}(X = a_i) = \mathrm{P}(Y = a_i) = p_i.$$

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
Montrer que

$$\mathrm{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i).$$

Exercice 10 [03981] [Correction]
Soient X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et f une application définie sur $X(\Omega)$.
À quelle condition les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Espérance

Exercice 11 [03833] [Correction]
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. Établir

$$\mathrm{E}(X)^2 \leq \mathrm{E}\big(X^2\big).$$

Exercice 12 [03835] [Correction]
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$.
Établir

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{P}(X > n).$$

Exercice 13 [03847] [Correction]
Dans cet exercice, les variables aléatoires sont toutes supposées prendre leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire X l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_X(u) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX}\big).$$

(a) Vérifier que φ_X est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Calculer $\varphi_X(0)$. Comment interpréter $\varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$?

(b) Calculer la fonction caractéristique d'une variable X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Même question avec une loi binomiale de paramètres n et p.

(c) Soient X une variable aléatoire réelle et x_0 un entier. Vérifier

$$\mathrm{P}(X = x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(u) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux_0} \,\mathrm{d}u.$$

En déduire

$$\varphi_X = \varphi_Y \implies X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}$$

(d) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Vérifier

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y.$$

(e) Exploiter ce résultat pour retrouver la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Exercice 14 [03980] [Correction]
Soit $p \in \,]0\,;1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant

$$\mathrm{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathrm{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

(a) Calculer l'espérance de X_k.

(b) On pose

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

En calculant de deux façons l'espérance de Y_n, déterminer $p_n = \mathrm{P}(Y_n = 1)$.

(c) Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 15 [03987] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$.

(a) Exprimer $\mathrm{E}(X)$ en fonction de $\mathrm{P}(X \geq k)$.

(b) On suppose les variables X et Y uniformes.
Déterminer l'espérance de $\min(X, Y)$ puis de $\max(X, Y)$.
Déterminer aussi l'espérance de $|X - Y|$.

Calcul d'espérances et de variances

Exercice 16 [03838] [Correction]
Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0\,;1[$.
Calculer l'espérance de la variable

$$Y = \frac{1}{X+1}.$$

Exercice 17 [04160] [Correction]
Un fumeur a un paquet de N cigarettes dans chacune de ses deux poches. Chaque fois qu'il veut fumer, il choisit une poche au hasard pour prendre une cigarette. Il répète cela jusqu'à ce qu'il tombe sur un paquet vide. Soit X_N la variable aléatoire qui donne le nombre de cigarettes restant dans l'autre paquet à ce moment-là.

(a) Écrire une fonction **Python** qui simule l'expérience et retourne X_N. Faire la moyenne pour 1 000 tests.

(b) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ qui modélise l'expérience.

(c) Exprimer la loi de X_N.

(d) Montrer que, pour $k \in [\![1\,;N]\!]$

$$(2N-k-1)P(X_N = k+1) = 2(N-k)\mathrm{P}(X_N = k).$$

(e) Calculer l'espérance de X_N puis donner un équivalent de $\mathrm{E}(X_N)$.

Exercice 18 [04957] [Correction]
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur une espace probabilisé fini (Ω, P) et N une variable aléatoire définie sur le même espace et à valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$. On suppose que les variables $X_1, \dots, X_n$ suivent chacune la loi d'une variable X et que $X_1, \dots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes. Enfin, on définit une variable Y sur Ω en posant [1]

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$

Exprimer l'espérance puis la variance de la variable Y en fonction des espérances et variances de X et N.

1. Par exemple, Y peut être le nombre de Pile obtenus lors d'une expérience où on lance un dé puis une pièce un nombre de fois égal à la valeur N du dé.

Covariance

Exercice 19 [03993] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, P).
Montrer

$$\left|\mathrm{Cov}(X,Y)\right| \le \sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}.$$

Exercice 20 [04111] [Correction]
À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

(a) Déterminer la loi de X_1.

(b) Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.

(c) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 21 [03832] [Correction]
Soient X une variable aléatoire réelle et $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante.
Montrer que

$$\forall a \ge 0, \mathrm{P}\big(|X| \ge a\big) \le \frac{\mathrm{E}\big(g(|X|)\big)}{g(a)}.$$

Exercice 22 [03816] [Correction]
Une variable aléatoire X suit une loi du binôme de paramètre p et de taille n.
Établir pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

Exercice 23 [03834] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de taille n et de paramètre p.
Montrer que pour tout $\lambda, \varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(X - np > n\varepsilon) \le \mathrm{E}\big(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon))\big).$$

Exercice 24 [04042] [Correction]
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer

$$\mathrm{P}(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Exercice 25 [04043] [Correction]
Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2.
En introduisant la variable aléatoire

$$Y = \big(\alpha(X - \mu) + \sigma\big)^2.$$

Montrer que pour tout $\alpha > 0$

$$\mathrm{P}(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Rappelons
$$b(k,n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

(a) Pour $k\in[\![1\,;n]\!]$, on a
$$\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)}=\frac{n+1-k}{k}\frac{p}{1-p}$$
donc
$$\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)}\geq 1\iff k\leq (n+1)p.$$
La suite finie $\big(b(k,n,p)\big)_{0\leq k\leq n}$ est donc croissante jusqu'au plus grand entier m inférieur à $(n+1)p$ puis devient décroissante ensuite. On peut donc affirmer
$$m=\lfloor (n+1)p\rfloor.$$

(b) La fonction f est dérivable avec
$$f'(x)=(m-nx)x^{m-1}(1-x)^{n-m-1}.$$
La fonction f est donc croissante sur $[0\,;m/n]$ et décroissante sur $[m/n\,;1]$.

(c) Si $m\in[np\,;(n+1)p]$ alors $m/(n+1)\leq p\leq m/n$ et puisque f est croissante sur $[0\,;m/n]$
$$f(m/(n+1))\leq f(p)\leq f(m/n)$$
ce qui conduit à l'encadrement demandé.

(d) Si $m\in[(n+1)p-1\,;np]$ alors $m/n\leq p\leq (m+1)/(n+1)$ et par décroissance de f sur $[m/n\,;1]$, on obtient
$$b\left(m,n,\frac{m+1}{n+1}\right)\leq b(m,n,p)\leq b\left(m,n,\frac{m}{n}\right).$$

(e) Quand $n\to+\infty$, on a $m=\lfloor (n+1)p\rfloor\sim np\to+\infty$ et $n-m\ \sim n(1-p)\to+\infty$ ce qui permet d'écrire simultanément
$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n},m!\sim\sqrt{2\pi m}m^m\mathrm{e}^{-m}\text{ et}$$
$$(n-m)!\sim\sqrt{2\pi(n-m)}(n-m)^{n-m}\mathrm{e}^{n-m}.$$
On en déduit après calcul
$$b\left(m,n,\frac{m}{n}\right)\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}.$$
On obtient les mêmes équivalents pour
$$b\left(m,n,\frac{m}{n+1}\right)\text{ et }b\left(m,n,\frac{m+1}{n+1}\right)$$
et l'on peut donc conclure par encadrement
$$b(m,n,p)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}.$$

Exercice 2 : [énoncé]
$X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![0\,;n]\!]$. Pour $k\in[\![0\,;n]\!]$,
$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
donc
$$\mathrm{P}(Y=k)=\mathrm{P}(X=n-k)=\binom{n}{k}p^{n-k}(1-p)^k.$$
La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $q=1-p$.

Exercice 3 : [énoncé]
Compte tenu de l'expérience modélisée, on peut affirmer que la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$
De plus, pour $k\in[\![0\,;n]\!]$, si l'événement $(X=k)$ est réalisé, il y a $n-k$ questions pour lesquelles l'étudiant répond au hasard avec une probabilité $1/4$ de réussir :
$$\mathrm{P}(Y=j\,|\,X=k)=\binom{n-k}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k-j}\text{ avec }j\in[\![0\,;n-k]\!].$$

(a) La variable Z prend ses valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$.
Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, l'événement $(Z=k)$ peut être décomposé en la réunion disjointe des événements

$$(X=j, Y=k-j) \text{ avec } j \in \{0,1,\dots,k\}\,.$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(Z=k)=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{P}(X=j,Y=k-j).$$

Par probabilité composées

$$\mathrm{P}(X=j,Y=k-j)=\mathrm{P}(Y=k-j\,|\,X=j)\mathrm{P}(X=j).$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(Z=k)=\sum_{j=0}^{k}\binom{n-j}{k-j}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-j}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.$$

Or

$$\binom{n-j}{k-j}\binom{n}{j}=\frac{n!}{(k-j)!(n-k)!j!}=\binom{k}{j}\binom{n}{k}.$$

On en déduit

$$\mathrm{P}(Z=k)=\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{4}(1-p)\right)^{k-j}p^j.$$

Par la formule du binôme

$$\mathrm{P}(Z=k)=\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{4}(1-p)+p\right)^{k}.$$

On simplifie

$$\mathrm{P}(Z=k)=\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k} \text{ avec } q=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}p.$$

(b) On a alors

$$\mathrm{E}(Z)=\frac{(3p+1)n}{4} \text{ et } \mathrm{V}(Z)=\frac{3n(3p+1)(1-p)}{16}.$$

Exercice 4 : [énoncé]
La modélisation entraîne que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \text{ avec } k\in[\![0\,;n]\!].$$

La variable aléatoire Y n'est quant à elle bien connue que lorsque le nombre $n-X$ de cibles restant l'est, elle suit alors une loi de Bernoulli

$$\mathrm{P}(Y=\ell\,|\,X=k)=\binom{n-k}{\ell}p^\ell(1-p)^{n-k-\ell} \text{ avec } \ell\le n-k.$$

Par probabilités totales

$$\mathrm{P}(Z=m)=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{P}(X=k,Y=m-k).$$

Par probabilités composées

$$\mathrm{P}(Z=m)=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y=m-k\,|\,X=k).$$

Ceci donne

$$\mathrm{P}(Z=m)=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}p^m(1-p)^{2n-k-m}.$$

Or

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}=\binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

et donc

$$\mathrm{P}(Z=m)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{2n-m}\times\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{1}{1-p}\right)^k.$$

Par la formule du binôme

$$\mathrm{P}(Z=m)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{2n-m}\frac{(2-p)^m}{(1-p)^m}=\binom{n}{m}q^m(1-q)^{n-m}$$

avec $q=p(2-p)$.
La variable Z suit une loi binomiale.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) $Z(\Omega) \subset \{0,1\}$ et $\mathrm{P}(Z=0) = \mathrm{P}(X=0, Y=0)$. Par indépendance

$$\mathrm{P}(Z=0) = \mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=0) = (1-p)(1-q).$$

On en déduit que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$r = 1-(1-p)(1-q) = p+q-pq.$$

(b) Numérotons les cibles de 1 à n et définissons les variables aléatoires X_i et Y_i déterminant si la cible i est touchée par l'un ou l'autre des deux archers. Ces variables sont indépendantes, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p et Y_i de paramètre q. La variable $Z_i = \max(X_i, Y_i)$ détermine si une cible a été touchée au moins une fois. Le nombre de cibles touchées au moins une fois est donc

$$N = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Les variables Z_i étant indépendantes, la variable N suit une loi binomiale de paramètres n et $r = p+q-pq$.

(c) Le nombre M de cibles épargnées et $M = n - N$. La loi suivie est binomiale de paramètre n et $1-r = (1-p)(1-q)$.

Exercice 6 : [énoncé]
Soient $A \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ et $B \subset \{y_1, \dots y_m\}$. On a

$$(X=A) \cap (Y=B) = \left(\bigcup_{x \in A} X = x\right) \cap \left(\bigcup_{y \in B} Y = y\right).$$

En développant

$$(X=A) \cap (Y=B) = \bigcup_{(x,y) \in A \times B} (X=x) \cap (Y=y).$$

Cette réunion étant disjointe

$$\mathrm{P}(X=A, Y=B) = \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$$

et donc

$$\mathrm{P}(X=A, Y=B) = \sum_{x \in A} \mathrm{P}(X=x) \sum_{y \in B} \mathrm{P}(Y=y).$$

Finalement

$$\mathrm{P}(X=A, Y=B) = \mathrm{P}(X=A)\mathrm{P}(Y=B).$$

Les variables aléatoires X et Y sont donc bien indépendantes.

Exercice 7 : [énoncé]
Soient A, B deux évènements de l'espace probabilisé (Ω, P).
Supposons les fonctions indicatrices 1_A et 1_B indépendantes. On a

$$\mathrm{P}(1_A = 1, 1_B = 1) = \mathrm{P}(1_A = 1)\mathrm{P}(1_B = 1)$$

ce qui se relit

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Inversement, supposons les évènements A et B indépendants. On sait qu'alors

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B), \mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B), .$$

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B}) \text{ et } \mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(\overline{B}).$$

Ceci se relit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(1_A = 1, 1_B = 1) = \mathrm{P}(1_A = 1)\mathrm{P}(1_B = 1),\\
&\mathrm{P}(1_A = 0, 1_B = 1) = \mathrm{P}(1_A = 0)\mathrm{P}(1_B = 1),\\
&\mathrm{P}(1_A = 1, 1_B = 0) = \mathrm{P}(1_A = 1)\mathrm{P}(1_B = 0) \text{ et}\\
&\mathrm{P}(1_A = 0, 1_B = 0) = \mathrm{P}(1_A = 0)\mathrm{P}(1_B = 0).
\end{aligned}$$

On en déduit que les variables aléatoires 1_A et 1_B sont indépendantes.

Exercice 8 : [énoncé]
La réponse est négative en général.
Supposons que X et Y suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$.
On a

$$\mathrm{P}(X+Y=2) = \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1) = 1/4$$

et

$$\mathrm{P}(X-Y=0) = \mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=0) + \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1) = 1/2.$$

Or l'événement $X+Y=2$ est inclus dans l'événement $X-Y=0$ donc

$$\mathrm{P}(X+Y=2 \cap X-Y=0) = \mathrm{P}(X+Y=2)$$

et l'on constate

$$\mathrm{P}(X+Y=2 \cap X-Y=0) \neq \mathrm{P}(X+Y=2)\mathrm{P}(X-Y=0).$$

Exercice 9 : [énoncé]
L'événement $\{X = Y\}$ se décompose en les événements incompatibles $\{X = a_i \cap Y = a_i\}$.
Par hypothèse d'indépendance

$$\mathrm{P}(\{X = a_i \cap Y = a_i\}) = \mathrm{P}(\{X = a_i\})\mathrm{P}(\{Y = a_i\}) = p_i^2$$

donc

$$\mathrm{P}(\{X = Y\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

puis par complémentation

$$\mathrm{P}(\{X \neq Y\}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Enfin, on conclut sachant

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Exercice 10 : [énoncé]
Supposons les variables aléatoires X et $f(X)$ indépendantes.
Soient $\omega \in \Omega$ vérifiant $\mathrm{P}(\{\omega\}) > 0$.
Posons $x = X(\omega)$ et $y = f(x)$.
On a

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = \frac{\mathrm{P}(f(X) = y \cap X = x)}{\mathrm{P}(X = x)}.$$

Or $\{X = x\} \subset \big\{f(X) = y\big\}$, donc

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = 1.$$

Cependant, les variables X et $f(X)$ étant supposées indépendantes

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = \mathrm{P}(f(X) = y).$$

Ainsi $f(X) = y$ presque sûrement.
La réciproque est immédiate et donc X et $f(X)$ sont indépendantes si, et seulement si, $f(X)$ est presque sûrement constante.

Exercice 11 : [énoncé]
Par la formule de Huygens

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)^2\big)\Big) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \geq 0.$$

Exercice 12 : [énoncé]
Notons $p_n = \mathrm{P}(X = n)$. On a par définition

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{N} np_n = \sum_{n=1}^{N} np_n.$$

Or $\{X = n\} = \{X > n-1\} \setminus \{X > n\}$ donc

$$p_n = \mathrm{P}(X > n-1) - \mathrm{P}(X > n)$$

donc

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{N} nP(X > n-1) - \sum_{n=1}^{N} nP(X > n).$$

Par décalage d'indice dans la première somme

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\mathrm{P}(X > n) - \sum_{n=1}^{N} nP(X > n).$$

En supprimant le dernier terme assurément nul de la deuxième somme et en y ajoutant un terme nul correspondant à l'indice 0

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\mathrm{P}(X > n) - \sum_{n=0}^{N-1} nP(X > n).$$

Enfin, en combinant ces sommes

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{P}(X > n).$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Notons $x_1, \dots, x_n$ les valeurs (entières) prises par X. On a

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ux_k}\mathrm{P}(X = x_k).$$

La fonction φ_X est alors combinaison linéaire de fonctions 2π-périodiques (car $x_k \in \mathbb{Z}$) et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\varphi_X(0) = \mathrm{E}(1) = 1, \varphi_X'(0) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{i}x_k \mathrm{P}(X = x_k) = \mathrm{i}E(X) \text{ et } \varphi_X''(0) = -\mathrm{E}(X^2).$$

(b) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p

$$\varphi_X(u) = (1-p) + p\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}.$$

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ku} = (1-p+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})^n.$$

(c) Avec les notations qui précèdent

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux_0}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X = x_k) \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u(x_k - x_0)}\,\mathrm{d}u.$$

Puisque $x_k - x_0$ est un entier

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u(x_k-x_0)}\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & \text{si } x_k \neq x_0 \\ 2\pi & \text{si } x_k = x_0 \end{cases}$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux_0}\,\mathrm{d}u = 2\pi \mathrm{P}(X = x_0).$$

Si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors

$$\forall x_0 \in \mathbb{Z}, \mathrm{P}(X = x_0) = \mathrm{P}(Y = x_0)$$

et donc X et Y suivent la même loi.

(d) Notons que $X + Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ comme X et Y.

$$\varphi_{X+Y}(u) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(X+Y)}\big) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX}\mathrm{e}^{\mathrm{i}uY}\big) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX}\big)\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}uY}\big) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$$

car les variables X et Y sont supposées indépendantes.

(e) Une loi binomiale de paramètres n et p peut se comprendre comme la somme de n loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
Avec cet exercice, on perçoit la trace dans une situation particulière de résultats beaucoup plus généraux. Il est assez fréquent d'étudier une variable aléatoire par la fonction caractéristique associée.

Exercice 14 : [énoncé]

(a) $\mathrm{E}(X_k) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$.

(b) Par l'indépendance des variables

$$\mathrm{E}(Y_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = (2p-1)^n.$$

Aussi $Y_n \in \{1, -1\}$ et

$$\mathrm{E}(Y_n) = 1 \times p_n + (-1) \times (1-p_n) = 2p_n - 1.$$

On en déduit

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}.$$

(c) Puisque $|p| < 1$, $p_n \to 1/2$.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) En écrivant

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(X \geq k) - \mathrm{P}(X \geq k+1)$$

on obtient

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X \geq k).$$

(b) Par la propriété au-dessus

$$\mathrm{E}\big(\min(X,Y)\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X \geq k \text{ et } Y \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X \geq k)\mathrm{P}(Y \geq k).$$

Puisque

$$\mathrm{P}(X \geq k) = \mathrm{P}(Y \geq k) = \frac{n+1-k}{n}$$

on obtient

$$\mathrm{E}\big(\min(X,Y)\big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

Aussi

$$\min(X,Y) + \max(X,Y) = X + Y$$

donc

$$\mathrm{E}\big(\max(X,Y)\big) = n+1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

Encore

$$\min(X,Y) = \frac{1}{2}\big((X+Y)-|X-Y|\big)$$

donc

$$\mathrm{E}\big(|X-Y|\big) = n+1-\frac{(n+1)(2n+1)}{3n} = \frac{n^2-1}{3n}.$$

Exercice 16 : [énoncé]

Puisque

$$\mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

l'espérance de Y est donnée par

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Or

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

donc

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$$

puis par glissement d'indice

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{p(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{(n+1)-k}$$

et enfin par la formule du binôme avec un terme manquant

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

(a)
```
from random import random

def simul(N):
    P1,P2 = N,N
    while P1 * P2 > 0:
        if random() <= 0.5:
            P1 = P1 - 1
        else:
            P2 = P2 - 1
    return P1 + P2

N = 20
C = 0
for i in range(1000):
    C = C + simul(N)
print(C/1000)
```

(b) On peut prendre $\Omega = \{1,2\}^{2N}$ muni de la tribu discrète et de la probabilité uniforme pour modéliser la succession de $2N$ choix de l'un ou l'autre paquet.

(c) La variable X_N prend ses valeurs dans $[\![1\,;N]\!]$. Pour $k\in[\![1\,;N]\!]$, on a $X_N=k$ lorsque N fois le paquet 1 a été choisi et $N-k$ fois le paquet 2, le dernier choix étant fait dans le paquet 1. On a aussi $X_N=k$ dans la situation symétrique. On en déduit :

$$\mathrm{P}(X_N=k) = 2\times\binom{2N-(k+1)}{N-1}\times\frac{1}{2^{2N-k}}$$

(le coefficient binomial correspond au positionnement des $N-1$ valeurs 1 dans les $2N-(k+1)$ positions possibles (le dernier 1 étant en position $2N-k$).

(d) La formule se vérifie en exprimant les coefficients binomiaux sous forme factorielle (le cas $k=N$) étant traité à part).

(e) On somme la formule qui précède et on simplifie sachant

$$\sum_{k=1}^{N}\mathrm{P}(X_N=k)=1, \sum_{k=1}^{N}\mathrm{P}(X_N=k+1) = 1-\mathrm{P}(X_N=1)$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{N}(k+1)\mathrm{P}(X_N=k+1) = \mathrm{E}(X_N)-\mathrm{P}(X_N=1).$$

On conclut

$$\mathrm{E}(X_N) = (2N-1)\mathrm{P}(X_N=1) = \frac{2N-1}{2^{2N-2}}\binom{2N-2}{N-1}.$$

Par la formule de Stirling

$$\mathrm{E}(X_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 18 : [énoncé]
Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons E_k l'ensemble des valeurs prises par la variable $X_1 + \cdots + X_k$ et considérons E la réunion des E_k : la variable Y prend ses valeurs dans E.
Par définition de l'espérance

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{y\in E} y\mathrm{P}(Y = y).$$

La famille des $(N = k)$ pour k allant de 1 à n est un système complet d'événements et donc

$$(Y = y) = \bigcup_{k=1}^{n} (Y = y, N = k)$$

avec

$$(Y = y, N = k) = (X_1 + \cdots + X_k = y, N = k).$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}(Y = y, N = k) = \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_k = y)\mathrm{P}(N = k)$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \sum_{y\in E}\sum_{k=1}^{n} y\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_k = y)\mathrm{P}(N = k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{y\in E} y\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_k = y)\right)\mathrm{P}(N = k).\end{aligned}$$

Puisque E contient l'ensemble E_k des valeurs prises par $X_1 + \cdots + X_k$,

$$\begin{aligned}\sum_{y\in E} y\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_k = y) &= \mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_k)\\ &= \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_k) = k\mathrm{E}(X)\end{aligned}$$

puis

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X)\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(N = k) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(N).$$

De la même manière, on obtient à l'aide de la formule de transfert

$$\mathrm{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\big((X_1 + \cdots + X_k)^2\big)\mathrm{P}(N = k).$$

Or

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big((X_1 + \cdots + X_k)^2\big) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{E}(X_iX_j)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}(X_i^2) + 2\sum_{1\le i<j\le k} \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j)\\ &= k\mathrm{E}(X^2) + k(k-1)\mathrm{E}(X)^2\end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{E}\big(Y^2\big) = \mathrm{E}\big(X^2\big)\mathrm{E}(N) + \mathrm{E}(X)^2\mathrm{E}\big(N(N-1)\big).$$

Enfin, par la formule de Huygens, on conclut

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{E}\big(Y^2\big) - \mathrm{E}(Y)^2\\ &= \mathrm{E}\big(X^2\big)\mathrm{E}(N) - \mathrm{E}(X)^2\mathrm{E}(N) + \mathrm{E}(X)^2\big(\mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2\big)\\ &= \mathrm{V}(X)\mathrm{E}(N) + \mathrm{E}(X)^2\mathrm{V}(N).\end{aligned}$$

Exercice 19 : [énoncé]
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, introduisons $Z = \lambda X + Y$. On a $\mathrm{V}(Z) \ge 0$ avec

$$\mathrm{V}(Z) = \lambda^2\mathrm{V}(X) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{V}(Y).$$

Si $\mathrm{V}(X) = 0$, on a nécessairement $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ pour que $\mathrm{V}(Z)$ soit positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\mathrm{V}(X) \ne 0$, on a nécessairement $\Delta = 4\,\mathrm{Cov}(X, Y)^2 - 4V(X)\mathrm{V}(Y) \le 0$ pour que $\mathrm{V}(Z)$ soit positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dans les deux cas, on obtient

$$\big|\mathrm{Cov}(X, Y)\big| \le \sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}.$$

Exercice 20 : [énoncé]

(a) Chacune des n voitures a la probabilité $p = 1/3$ de choisir le premier péage. Dès lors, la variable aléatoire X_1 peut se comprendre comme étant le nombre de succès dans une série de n épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p de réussir. La variable X_1 suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 1/3$.

(b) $\mathrm{V}(X_1) = np(1-p) = 2n/9$ et $\mathrm{V}(X_2) = 2n/9$ car X_1, X_2, X_3 suivent les mêmes lois.
Puisque $X_1 + X_2 = n - X_3$, $\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(n - X_3) = \mathrm{V}(X_3) = 2n/9$.

(c) Sachant

$$\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(X_1) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{V}(X_2)$$

on obtient

$$\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = -n/9.$$

Exercice 21 : [énoncé]
Puisque la fonction g est strictement croissante, les événement $|X| \geq a$ et $g(|X|) \geq g(a)$ sont identiques. Or l'inégalité de Markov donne

$$\mathrm{E}\big(g(|X|)\big) \geq g(a)\mathrm{P}\big(g(|X|) \geq g(a)\big)$$

et donc

$$\mathrm{P}\big(|X| \geq a\big) \leq \frac{\mathrm{E}\big(g(|X|)\big)}{g(a)}.$$

Exercice 22 : [énoncé]
Rappelons

$$\mathrm{E}(X) = np \text{ et } \mathrm{V}(X) = np(1-p).$$

Considérons la variable aléatoire

$$Y = X - np = X - \mathrm{E}(X).$$

Par l'inégalité de Markov

$$\mathrm{P}\big(|Y| \geq na\big) \leq \frac{\mathrm{E}(|Y|)}{n\varepsilon}$$

donc

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}(|Y|)}{n\varepsilon}.$$

Or $\mathrm{E}(|Y|) \leq \sqrt{\mathrm{E}(Y^2)}$ avec $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{V}(X) = np(1-p)$ donc

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

Exercice 23 : [énoncé]
Par stricte croissance de l'exponentiel, l'événement $X - np > n\varepsilon$ équivaut à l'événement

$$\exp\big(\lambda(X - np - n\varepsilon)\big) \geq 1.$$

L'inégalité de Markov appliquée à la variable $Y = \exp\big(\lambda(X - np - n\varepsilon)\big)$ permet alors de conclure

$$\mathrm{P}\big(\exp\big((\lambda(X - np - n\varepsilon) \geq 1\big) \leq \frac{\mathrm{E}\Big(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon))\Big)}{1}.$$

Exercice 24 : [énoncé]
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \alpha\sigma\big) < \frac{\sigma^2}{(\alpha\sigma^2)} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

On conclut par considération d'évènement complémentaire.

Exercice 25 : [énoncé]
On a

$$\mathrm{E}(Y) = \alpha^2\mathrm{E}\big((X - \mu)^2\big) + 2\alpha\mathrm{E}(X - \mu) + \sigma^2 = (\alpha^2 + 1)\sigma^2.$$

L'inégalité de Markov appliquée à la variable positive Y donne

$$\mathrm{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(Y)}{a}.$$

Pour $a = \sigma^2(\alpha^2 + 1)^2$,

$$\mathrm{P}(Y \geq a) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Or

$$(X \geq \mu + \alpha\sigma) = \big(\alpha(X - \mu) + \sigma \geq (\alpha^2 + 1)\sigma\big)$$

et donc

$$(X \geq \mu + \alpha\sigma) \subset (Y \geq a)$$

puis

$$\mathrm{P}(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$