

# Topologie des espaces normés

## Ouverts et fermés

### Exercice 1 [01103] [Correction]

Montrer que tout fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

### Exercice 2 [01104] [Correction]

On désigne par  $p_1$  et  $p_2$  les applications coordonnées de  $\mathbb{R}^2$  définies par  $p_i(x_1, x_2) = x_i$ .

- Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , montrer que  $p_1(O)$  et  $p_2(O)$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ . Montrer que  $H$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$  et que  $p_1(H)$  et  $p_2(H)$  ne sont pas des fermés de  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que si  $F$  est fermé et que  $p_2(F)$  est borné, alors  $p_1(F)$  est fermé.

### Exercice 3 [01105] [Correction]

Montrer que si un sous-espace vectoriel  $F$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est ouvert alors  $F = E$ .

### Exercice 4 [04076] [Correction]

Soient  $F$  une partie fermée non vide d'un espace normé  $E$  et  $x \in E$ . Montrer

$$d(x, F) = 0 \iff x \in F$$

### Exercice 5 [01107] [Correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

- Soient  $F$  une partie fermée non vide de  $E$  et  $x \in E$ . Montrer

$$d(x, F) = 0 \iff x \in F$$

- Soient  $F$  et  $G$  deux fermés non vides et disjoints de  $E$ .  
Montrer qu'il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  tels que

$$F \subset U, G \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

### Exercice 6 [01106] [Correction]

Soient  $A, B$  deux parties non vides d'un espace vectoriel normé  $E$  telles que

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) > 0$$

Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  tels que  $A \subset U$  et  $B \subset V$ .

### Exercice 7 [01108] [Correction]

On munit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

$A = \{\text{suites croissantes}\}$ ,  $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$ ,

$C = \{\text{suites convergentes}\}$ ,

$D = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\}$  et  $E = \{\text{suites périodiques}\}$ .

### Exercice 8 [01110] [Correction]

On note  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

- Montrer que  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  des suites réelles bornées.
- $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  étant normé par  $\|\cdot\|_\infty$ . Le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  est-il une partie ouverte? une partie fermée?

### Exercice 9 [02415] [Correction]

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x$  réel il existe un et un seul  $y \in A$  tel que  $|x - y| = d(x, A)$ . Montrer que  $A$  est un intervalle fermé.

### Exercice 10 [02770] [Correction]

On munit l'espace des suites bornées réelles  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_n (|u_n|).$$

- Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .
- Montrer que l'ensemble des suites  $(a_n)$  qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 11** [02771] [Correction]

Soit  $E$  l'ensemble des suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathbb{C}$  telles que la série  $\sum |a_n|$  converge. Si  $a = (a_n)_{n \geq 0}$  appartient à  $E$ , on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

- (a) Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ .  
 (b) Soit

$$F = \left\{ a \in E \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

L'ensemble  $F$  est-il ouvert ? fermé ? borné ?

**Exercice 12** [03021] [Correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel normé,  $F$  un sous-espace fermé de  $E$  et  $G$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Montrer que  $F + G$  est fermé

**Exercice 13** [03037] [Correction]

Caractériser dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  les matrices dont la classe de similitude est fermée. Même question avec  $\mathbb{R}$  au lieu de  $\mathbb{C}$

**Exercice 14** [02507] [Correction]

Soient  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  normé par  $\|\cdot\|_\infty$  et la partie

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

- (a) Montrer que  $A$  est une partie fermée.  
 (b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

**Exercice 15** [03289] [Correction]

- (a) Montrer que les parties

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \text{ et } B = \{0\} \times \mathbb{R}$$

sont fermées.

- (b) Observer que  $A + B$  n'est pas une partie fermée.

**Exercice 16** [03290] [Correction]

Montrer que  $\mathbb{Z}$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}$  :

- (a) en observant que son complémentaire est ouvert ;  
 (b) par la caractérisation séquentielle des parties fermées ;  
 (c) en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

**Exercice 17** [03306] [Correction]

Dans  $E = \mathbb{R}[X]$ , on considère les normes

$$N_1(P) = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [1;2]} |P(t)|$$

L'ensemble

$$\Omega = \{P \in E \mid P(0) \neq 0\}$$

est-il ouvert pour la norme  $N_1$  ? pour la norme  $N_2$  ?

## Intérieur et adhérence

**Exercice 18** [03279] [Correction]

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Établir

$$\text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect } A}$$

**Exercice 19** [01116] [Correction]

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Établir que sa frontière  $\text{Fr}(A)$  est une partie fermée.

**Exercice 20** [01117] [Correction]

Soit  $F$  une partie fermée d'un espace vectoriel normé  $E$ . Établir

$$\text{Fr}(\text{Fr}(F)) = \text{Fr}(F)$$

**Exercice 21** [01118] [Correction]

Soient  $A$  un ouvert et  $B$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ .

- (a) Montrer que  $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$   
 (b) Montrer que  $A \cap B = \emptyset \implies A \cap \bar{B} = \emptyset$ .

**Exercice 22** [01119] [Correction]

On suppose que  $A$  est une partie convexe d'un espace vectoriel normé  $E$ .

- (a) Montrer que  $\bar{A}$  est convexe.  
 (b) La partie  $A^\circ$  est-elle convexe?

**Exercice 23** [01120] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides d'un espace vectoriel normé  $E$ .

Établir

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$$

(en notant  $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ )

**Exercice 24** [01121] [Correction]

Soient  $A_1, \dots, A_n$  des parties d'un espace vectoriel normé  $E$ .

- (a) Établir  $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ .  
 (b) Comparer  $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}$  et  $\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$ .

**Exercice 25** [01122] [Correction]

Soient  $f: E \rightarrow F$  continue bornée et  $A \subset E$ ,  $A$  non vide. Montrer

$$\|f\|_{\infty, A} = \|f\|_{\infty, \bar{A}}$$

**Exercice 26** [03026] [Correction]

Soit  $A$  une partie d'un espace normé  $E$ .

- (a) Montrer que la partie  $A$  est fermée si, et seulement si,  $\text{Fr } A \subset A$ .  
 (b) Montrer que la partie  $A$  est ouverte si, et seulement si,  $A \cap \text{Fr } A = \emptyset$

**Exercice 27** [03470] [Correction]

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on introduit

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \forall \lambda \in \text{Sp } M, |\lambda| = 1\} \text{ et} \\ \mathcal{R} &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, M^n = I_2\} \end{aligned}$$

- (a) Comparer les ensembles  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{U}$ .  
 (b) Montrer que  $\mathcal{U}$  est une partie fermée de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .  
 (c) Montrer que  $\mathcal{U}$  est inclus dans l'adhérence de  $\mathcal{R}$ .  
 (d) Qu'en déduire?

## Continuité et topologie

**Exercice 28** [01126] [Correction]

Pour  $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on note  $R_p$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de rang supérieur à  $p$ .

Montrer que  $R_p$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 29** [01128] [Correction]

Montrer qu'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est continu si, et seulement si, la partie  $\{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$  est fermée.

**Exercice 30** [03393] [Correction]

Soit  $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  une application continue vérifiant

$$f \circ f = f$$

- (a) Montrer que l'ensemble

$$\{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$$

est un intervalle fermé et non vide.

- (b) Donner l'allure d'une fonction  $f$  non triviale vérifiant les conditions précédentes.  
 (c) On suppose de plus que  $f$  est dérivable. Montrer que  $f$  est constante ou égale à l'identité.

**Exercice 31** [02774] [Correction]

- (a) Chercher les fonctions  $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  continues vérifiant

$$f \circ f = f$$

- (b) Même question avec les fonctions dérivables.

**Exercice 32** [03285] [Correction]

Soient  $E$  un espace normé de dimension quelconque et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$$

(a) Simplifier  $v_n \circ (u - \text{Id})$ .

(b) Montrer que

$$\text{Im}(u - \text{Id}) \cap \text{Ker}(u - \text{Id}) = \{0\}$$

(c) On suppose  $E$  de dimension finie, établir

$$\text{Im}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - \text{Id}) = E$$

(d) On suppose de nouveau  $E$  de dimension quelconque.

Montrer que si

$$\text{Im}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - \text{Id}) = E$$

alors la suite  $(v_n)$  converge simplement et l'espace  $\text{Im}(u - \text{Id})$  est une partie fermée de  $E$ .

(e) Étudier la réciproque.

### Exercice 33 [02773] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $O_n$  désigne l'ensemble des polynômes réels de degré  $n$  scindés à racines simples et  $F_n$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  scindés à racines simples. Ces ensembles sont-ils ouverts dans  $\mathbb{R}_n[X]$  ?

### Exercice 34 [03726] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

- 1)  $\forall [a; b] \subset \mathbb{R}$ ,  $f([a; b])$  est un segment ;
- 2)  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(\{y\})$  est une partie fermée.

Montrer que  $f$  est continue.

### Exercice 35 [03859] [Correction]

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que l'ensemble  $\mathcal{P}$  des projecteurs de  $E$  est une partie fermée de  $\mathcal{L}(E)$ .

## Densité

### Exercice 36 [01130] [Correction]

Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On pourra considérer, pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , les matrices de la forme  $A - \lambda I_n$ .

### Exercice 37 [01131] [Correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(a) Montrer que  $\bar{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(b) Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

### Exercice 38 [01132] [Correction]

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé  $E$ .

(a) Établir que  $U \cap V$  est encore un ouvert dense de  $E$ .

(b) En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides est aussi d'intérieur vide.

### Exercice 39 [03058] [Correction]

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que

$$u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty \text{ et } u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$$

(a) Soient  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ .

Montrer que pour tout  $a \geq u_{n_0}$ , il existe  $n \geq n_0$  tel que  $|u_n - a| \leq \varepsilon$ .

(b) En déduire que  $\{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

(c) Montrer que l'ensemble  $\{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  est dense dans  $[-1; 1]$ .

### Exercice 40 [03017] [Correction]

Montrer que  $\{m - \ln n \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 41 [01133] [Correction]

Soit  $H$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ .

(a) Justifier l'existence de

$$a = \inf\{x \in H \mid x > 0\}$$

(b) On suppose  $a > 0$ . Établir  $a \in H$  puis  $H = a\mathbb{Z}$ .

(c) On suppose  $a = 0$ . Établir que  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 42 [00023] [Correction]

(a) Montrer que  $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1; 1]$ .

(b) Montrer que  $\{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  est dense dans  $[-1; 1]$ .

**Exercice 43** [01135] [Correction]

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 44** [01134] [Correction]

On note  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

(a) Montrer que  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  est une partie dense de l'espace des suites sommables normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

(b)  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  est-il une partie dense de l'espace des suites bornées normé par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| ?$$

**Exercice 45** [02780] [Correction]

On note  $E$  l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur  $[0; +\infty[$  et dont le carré est intégrable. On admet que  $E$  est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme

$$\|\cdot\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt}$$

On note  $E_0$  l'ensemble des  $f \in E$  telles que  $f$  est nulle hors d'un certain segment. On note  $F$  l'ensemble des fonctions de  $E$  du type  $x \mapsto P(e^{-x})e^{-x^2/2}$  où  $P$  parcourt  $\mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $E_0$  est dense dans  $E$  puis que  $F$  est dense dans  $E$ .

**Exercice 46** [02944] [Correction]

Soit  $A$  une partie convexe et partout dense d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $A = E$ .

**Exercice 47** [03018] [Correction]

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall a, b \in A, \frac{a+b}{2} \in A$$

Montrer que  $A$  est dense dans l'intervalle  $]\inf A; \sup A[$ .

**Exercice 48** [03020] [Correction]

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}_+$  vérifiant

$$\forall (a, b) \in A^2, \sqrt{ab} \in A$$

Montrer que  $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  est dense dans  $]\inf A; \sup A[$ .

**Exercice 49** [03059] [Correction]

Soient  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  et  $\varphi \in E$ . On note  $N_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$$

Montrer que  $N_\varphi$  est une norme sur  $E$  si, et seulement si,  $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$  est dense dans  $[0; 1]$ .

**Exercice 50** [03402] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$(u_n) \text{ strictement croissante, } u_n \rightarrow +\infty \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$$

Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{u_m}{u_n} \mid m > n \right\}$$

est une partie dense dans l'intervalle  $[1; +\infty[$

**Exercice 51** [03649] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux parties denses d'un espace normé  $E$ .

On suppose la partie  $A$  ouverte, montrer que  $A \cap B$  est une partie dense.

## Continuité et densité

**Exercice 52** [01136] [Correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Déterminer  $f$ .

**Exercice 53** [01139] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

- Montrer que  $\mathcal{D} = \{p/2^n \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que si  $f$  s'annule en 0 et en 1 alors  $f = 0$ .
- Conclure que  $f$  est une fonction affine.

**Exercice 54** [01137] [Correction]

Montrer que pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

**Exercice 55** [01138] [Correction]

Soit  $n \geq 2$ . Calculer  $\det(\text{Com } A)$  pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 56** [03128] [Correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ .

- Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .  
Exprimer la comatrice de  $P^{-1}AP$  en fonction de  $P$ ,  $P^{-1}$  et de la comatrice de  $A$ .
- En déduire que les comatrices de deux matrices semblables sont elle-même semblables.

**Exercice 57** [00750] [Correction]

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $\tilde{A}$  la transposée de la comatrice de  $A$ .

- Calculer  $\det \tilde{A}$ .
- Étudier le rang de  $\tilde{A}$ .
- Montrer que si  $A$  et  $B$  sont semblables alors  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  le sont aussi.
- Calculer  $\tilde{\tilde{A}}$ .

**Exercice 58** [03275] [Correction]

Montrer

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$$

**Exercice 59** [04170] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$  et  $u_n \rightarrow +\infty$ . Soit  $(v_p)$  une suite réelle telle que  $v_p \rightarrow +\infty$ .

- On fixe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ . Pour  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{N}$ , on pose  $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$ . Montrer que l'on peut choisir  $p$  et  $q$  de telle sorte que l'on ait  $w_0 \leq a$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|w_{n+1} - w_n| \leq (b-a)/2$ .
- Montrer que  $\{u_n - v_p \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer l'adhérence de  $\{\sin(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- Déterminer l'adhérence de  $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)$ ?

## Approximations uniformes

**Exercice 60** [01142] [Correction]

Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\int_a^b f(t) dt = 0$ . Montrer qu'il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes telle que

$$\int_a^b P_n(t) dt = 0 \text{ et } \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - P_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Exercice 61** [01143] [Correction]

Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f \geq 0$ . Montrer qu'il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes telle que  $P_n \geq 0$  sur  $[a; b]$  et  $\sup_{t \in [a; b]} |f(t) - P_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 62** [01144] [Correction]

Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer qu'il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes telle que

$$N_\infty(f - P_n) \rightarrow 0 \text{ et } N_\infty(f' - P'_n) \rightarrow 0$$

**Exercice 63** [01145] [Correction]

(Théorème de Weierstrass : par les polynômes de Bernstein) Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on pose

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(a) Calculer

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x), \sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) \text{ et } \sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}(x)$$

(b) Soient  $\alpha > 0$  et  $x \in [0; 1]$ . On forme

$$A = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket / |k| |n - x| \geq \alpha\} \text{ et } B = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket / |k| |n - x| < \alpha\}$$

Montrer que

$$\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

(c) Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$

Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0; 1]$ .

**Exercice 64** [01146] [Correction]

(Théorème de Weierstrass : par convolution)  $n$  désigne un entier naturel. On pose

$$a_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$$

et on considère la fonction  $\varphi_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n} (1 - x^2)^n$$

(a) Calculer  $\int_0^1 t(1 - t^2)^n dt$ . En déduire que

$$a_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt \geq \frac{1}{n + 1}$$

(b) Soit  $\alpha \in ]0; 1]$ . Montrer que  $(\varphi_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[\alpha; 1]$ .

(c) Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  nulle en dehors de  $[-1/2; 1/2]$ . Montrer que  $f$  est uniformément continue.

On pose

$$f_n(x) = \int_{-1}^1 f(x - t)\varphi_n(t) dt$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

(d) Montrer que  $f_n$  est une fonction polynomiale sur  $[-1/2; 1/2]$

(e) Montrer que

$$f(x) - f_n(x) = \int_{-1}^1 (f(x) - f(x - t))\varphi_n(t) dt$$

(f) En déduire que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

(g) Soit  $f$  une fonction réelle continue nulle en dehors de  $[-a; a]$ . Montrer que  $f$  est limite uniforme d'une suite de polynômes.

(h) Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a; b]$ .

Montrer que  $f$  est limite uniforme d'une suite de polynômes.

**Exercice 65** [02828] [Correction]

Soit  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0$$

(a) Montrer que la fonction  $f$  est nulle.

(b) Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx$$

(c) En déduire qu'il existe  $f$  dans  $\mathcal{C}([0; +\infty[, \mathbb{R})$  non nulle, telle que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on ait

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x) dx = 0$$

**Exercice 66** [02601] [Correction]

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux. On désire établir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx \right) = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx$$

(a) Vérifier le résultat pour une fonction  $f$  constante.

(b) Observer le résultat pour une fonction  $f$  en escalier.

(c) Étendre au cas où  $f$  est une fonction continue par morceaux.

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

Soient  $F$  un fermé et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$O_n = \bigcup_{a \in F} B(a, 1/n)$$

$O_n$  est un ouvert (car réunion d'ouverts) contenant  $F$ . Le fermé  $F$  est donc inclus dans l'intersection des  $O_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Inversement si  $x$  appartient à cette intersection, alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_n \in F$  tel que  $x \in B(a_n, 1/n)$ . La suite  $(a_n)$  converge alors vers  $x$  et donc  $x \in F$  car  $F$  est fermé.

Finalement  $F$  est l'intersection des  $O_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

(a) Soit  $x \in p_1(O)$ , il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $a = (x, y) \in O$ . Comme  $O$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_\infty(a, \varepsilon) \subset O$  et alors  $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[ \subset p_1(O)$ . Ainsi  $p_1(O)$  et de même  $p_2(O)$  est ouvert.

(b) Soit  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  telle que  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ . Comme  $x_n y_n = 1$ , à la limite  $xy = 1$ .

Par la caractérisation séquentielle des fermés,  $H$  est fermé.  $p_1(H) = \mathbb{R}^*$ ,  $p_2(H) = \mathbb{R}^*$  ne sont pas fermés dans  $\mathbb{R}$ .

(c) Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (p_1(F))^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow x$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $y_n$  tel que  $(x_n, y_n) \in F$ .

La suite  $((x_n, y_n))$  est alors une suite bornée dont on peut extraire une suite convergente :  $((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}))$ .

Notons  $y = \lim y_{\varphi(n)}$ . Comme  $F$  est fermé,  $(x, y) = \lim(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in F$  puis  $x = p_1((x, y)) \in p_1(F)$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

$0_E \in F$  donc il existe  $\alpha > 0$  tel que  $B(0_E, \alpha) \subset F$ .

Pour tout  $x \in E$ , on peut écrire

$$x = \lambda y$$

avec  $y \in B(0_E, \alpha)$  et  $\lambda$  bien choisis

On a alors  $y \in F$  puis  $x \in F$  car  $F$  est un sous-espace vectoriel.

Ainsi  $F = E$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

Rappelons

$$d(x, F) = \inf \{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

( $\Leftarrow$ ) Si  $x \in F$  alors  $0 \in \{\|x - y\| \mid y \in F\}$  et donc  $d(x, F) = 0$

( $\Rightarrow$ ) Si  $d(x, F) = 0$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $y_n \in F$  vérifiant

$$\|x - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

En faisant varier  $n$ , cela détermine  $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$  telle que  $y_n \rightarrow x$ .

Or  $F$  est une partie fermée, elle contient les limites de ses suites convergentes et par conséquent  $x \in F$ .

### Exercice 5 : [énoncé]

(a) Rappelons

$$d(x, F) = \inf \{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

( $\Leftarrow$ ) Si  $x \in F$  alors  $0 \in \{\|x - y\| \mid y \in F\}$  et donc  $d(x, F) = 0$

( $\Rightarrow$ ) Si  $d(x, F) = 0$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $y_n \in F$  vérifiant

$$\|x - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

En faisant varier  $n$ , cela détermine  $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$  telle que  $y_n \rightarrow x$ .

Or  $F$  est une partie fermée, elle contient les limites de ses suites convergentes et par conséquent  $x \in F$ .

(b) Soient

$$U = \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{2}d(x, G)\right) \text{ et } V = \bigcup_{x \in G} B\left(x, \frac{1}{2}d(x, F)\right)$$

Les parties  $U$  et  $V$  sont ouvertes car réunion de boules ouvertes et il est clair que  $U$  et  $V$  contiennent respectivement  $F$  et  $G$ .

S'il existe  $y \in U \cap V$  alors il existe  $a \in F$  et  $b \in G$  tels que

$$d(a, y) < \frac{1}{2}d(a, G) \text{ et } d(b, y) < \frac{1}{2}d(b, F)$$

Puisque

$$d(a, G), d(b, F) \leq d(a, b)$$

on a donc

$$d(a, b) \leq d(a, y) + d(y, b) < d(a, b)$$

C'est absurde et on peut conclure

$$U \cap V = \emptyset$$



**Exercice 6 : [énoncé]**

Les ensembles

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, d/2) \text{ et } V = \bigcup_{b \in B} B(b, d/2)$$

avec  $d = d(A, B)$  sont solutions.

En effet  $U$  et  $V$  sont des ouverts (par réunion d'ouverts) contenant  $A$  et  $B$ .

$U$  et  $V$  sont disjoints car

$$U \cap V \neq \emptyset \implies \exists (a, b) \in A \times B, B(a, d/2) \cap B(b, d/2) \neq \emptyset \implies d(A, B) < d$$

**Exercice 7 : [énoncé]**

$A$  est fermé car si  $u^p = (u_n^p)$  est une suite d'éléments de  $A$  convergeant vers une suite  $u = (u_n)$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$u_n^p \leq u_{n+1}^p$  qui donne à la limite  $u_n \leq u_{n+1}$  et donc  $u \in A$ .

$B$  est fermé car si  $u^p = (u_n^p)$  est une suite d'éléments de  $B$  convergeant vers une suite  $u = (u_n)$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$  et puisque  $u_n^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, |u_n^p| \leq \varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon$$

Ainsi  $u \rightarrow 0$  et donc  $u \in B$ .

$C$  est fermé. En effet si  $u^p = (u_n^p)$  est une suite d'éléments de  $C$  convergeant vers une suite  $u = (u_n)$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  alors en notant  $\ell^p$  la limite de  $u^p$ , la suite  $(\ell^p)$  est une suite de Cauchy puisque  $|\ell^p - \ell^q| \leq \|u^p - u^q\|_\infty$ . Posons  $\ell$  la limite de la suite  $(\ell^p)$  et considérons  $v^p = u^p - \ell^p$ .  $v^p \in B$  et  $v^p \rightarrow u - \ell$  donc  $u - \ell \in B$  et  $u \in C$ .

$D$  est fermé car si  $u^p = (u_n^p)$  est une suite d'éléments de  $D$  convergeant vers une suite  $u = (u_n)$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$  et puisque 0 est valeur d'adhérence de  $u^p$ , il existe une infinité de  $n$  tels que  $|u_n^p| \leq \varepsilon/2$  et donc tels que

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de  $u$  et donc  $u \in D$ .

$E$  n'est pas fermé. Notons  $\delta^p$ , la suite déterminée par  $\delta_n^p = 1$  si  $p \mid n$  et 0 sinon. La suite  $\delta^p$  est périodique et toute combinaison linéaire de suites  $\delta^p$  l'est encore.

Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} \delta^k$$

qui est élément de  $E$ . La suite  $u^p$  converge car

$$\|u^{p+q} - u^p\|_\infty \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^p} \rightarrow 0$$

et la limite  $u$  de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} = 1$$

et que  $u_n < 1$  pour tout  $n$  puisque pour que  $u_n = 1$  il faut  $k \mid n$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 8 : [énoncé]**

(a) Les éléments de  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  sont bornés donc  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .

L'appartenance de l'élément nul et la stabilité par combinaison linéaire sont immédiates.

(b) Si  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  est ouvert alors puisque  $0 \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$B_\infty(0, \alpha) \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}.$$

Or la suite constante égale à  $\alpha/2$  appartient à  $B_\infty(0, \alpha)$  et n'est pas nulle à partir d'un certain rang donc  $B_\infty(0, \alpha) \not\subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  et donc  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  n'est pas ouvert.

(c) Pour  $N \in \mathbb{N}$ , posons  $u^N$  définie par  $u_n^N = \frac{1}{n+1}$  si  $n \leq N$  et  $u_n^N = 0$  sinon.

$(u^N) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  et  $u^N \rightarrow u$  avec  $u$  donné par  $u_n = \frac{1}{n+1}$ . En effet

$$\|u^N - u\|_\infty = \frac{1}{N+2} \rightarrow 0$$

Mais  $u \notin \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  donc  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  n'est pas fermé.

**Exercice 9 : [énoncé]**

Soit  $(x_n) \in A^\mathbb{N}$  convergeant vers  $x \in \mathbb{R}$ . Il existe un unique  $y \in A$  tel que  $|x - y| = d(x, A)$ . Or  $d(x, A) = 0$  donc  $x = y \in A$ . Ainsi  $A$  est fermé.

Par l'absurde supposons que  $A$  ne soit pas un intervalle. Il existe  $a < c < b$  tel que  $a, b \in A$  et  $c \notin A$ .

Posons  $\alpha = \sup \{x \in A \mid x \leq c\}$  et  $\beta = \inf \{x \in A \mid x \geq c\}$ . On a  $\alpha, \beta \in A$ ,  $\alpha < c < \beta$  et  $]\alpha; \beta[ \subset C_{\mathbb{R}}A$ .

Posons alors  $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ . On a  $d(\gamma, A) = \frac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta|$  ce qui contredit l'hypothèse d'unicité. Absurde.

**Exercice 10 :** [\[énoncé\]](#)

- (a) Notons  $C$  l'espace des suites convergentes de  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .  
 Soit  $(u^n)$  une suite convergente d'éléments de  $C$  de limite  $u^\infty$ .  
 Pour chaque  $n$ , posons  $\ell^n = \lim u^n = \lim_{p \rightarrow +\infty} u_p^n$ .  
 Par le théorème de la double limite appliquée à la suite des fonctions  $u^n$ , on peut affirmer que la suite  $(\ell^n)$  converge et que la suite  $u^\infty$  converge vers la limite de  $(\ell^n)$ . En particulier  $u^\infty \in C$ .
- (b) Notons  $A$  l'espace des suites dont le terme général est terme général d'une série absolument convergente.  
 Soit  $(u^n)$  la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}$$

La suite  $(u^n)$  est une suite d'éléments de  $A$  et une étude en norme  $\|\cdot\|_\infty$  permet d'établir que  $u^n \rightarrow u^\infty$  avec  $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$ . La suite  $u^\infty$  n'étant pas élément de  $A$ , la partie  $A$  n'est pas fermée.

**Exercice 11 :** [\[énoncé\]](#)

- (a) Par définition de l'ensemble  $E$ , l'application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est bien définie.  
 Soient  $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$  éléments de  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\|a+b\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) = \|a\| + \|b\|$$

avec convergence des séries écrites, et

$$\|\lambda \cdot a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| |a_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = |\lambda| \|a\|$$

Enfin, si  $\|a\| = 0$  alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq \|a\| = 0$$

donne  $(a_n)_{n \geq 0} = (0)_{n \geq 0}$

- (b) Considérons la forme linéaire

$$\varphi : (a_n)_{n \geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

On vérifie

$$\forall a = (a_n)_{n \geq 0} \in E, |\varphi(a)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \|a\|$$

La forme linéaire  $\varphi$  est donc continue.

Puisque  $F = \varphi^{-1}(\{1\})$  avec  $\{1\}$ , la partie  $F$  est fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue..

Posons  $e = (1, 0, 0, \dots)$  et un élément de  $F$  et

$$\forall \alpha > 0, e + \alpha e \notin F \text{ et } \|e - (e + \alpha e)\| = \alpha$$

On en déduit que  $F$  n'est pas un voisinage de son élément  $e$  et par conséquent la partie  $F$  n'est pas ouverte.

Posons  $\alpha^p = e + p \cdot (1, -1, 0, \dots)$ .

$$\forall p \in \mathbb{N}, \alpha^p \in F \text{ et } \|\alpha^p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

La partie  $F$  n'est donc pas bornée.

**Exercice 12 :** [\[énoncé\]](#)

Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer  $F + \text{Vect}(u)$  fermé pour tout  $u \notin F$ .

Soit  $(x_n)$  une suite convergente d'éléments de  $F + \text{Vect}(u)$  de limite  $x$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut écrire  $x_n = y_n + \lambda_n u$  avec  $y_n \in F$  et  $\lambda_n \in \mathbb{K}$ .

Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite  $(\lambda_n)$  est bornée.

Si la suite  $(\lambda_n)$  n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer  $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ .

Posons alors  $z_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n + u$ .

Puisque  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  et  $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ , on a  $\|z_n\| \rightarrow 0$  et donc  $\frac{1}{\lambda_n} y_n \rightarrow -u$ .

Or la suite de terme général  $\frac{1}{\lambda_n} y_n$  est une suite d'éléments de l'espace fermé  $F$ , donc  $-u \in F$  ce qui exclut.

Ainsi la suite  $(\lambda_n)$  est bornée et on peut en extraire une suite convergente  $(\lambda_{\varphi(n)})$  de limite  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Par opérations, la suite  $(y_{\varphi(n)})$  est alors convergente.

En notant  $y$  sa limite, on a  $y \in F$  car l'espace  $F$  est fermé.

En passant la relation  $x_n = y_n + \lambda_n u$  à la limite on obtient

$x = y + \lambda u \in F + \text{Vect}(u)$ .

Ainsi l'espace  $F + \text{Vect}(u)$  est fermé.

**Exercice 13 : [énoncé]**

Cas  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est diagonalisable.

Soit  $(A_p)$  une suite convergente de matrices semblables à  $A$ .

Notons  $A_\infty$  la limite de  $(A_p)$ .

Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$ ,  $P$  est annulateur des  $A_p$  et donc  $P$  annule  $A_\infty$ . Puisque  $A$  est supposée diagonalisable, il existe un polynôme scindé simple annulant  $A$  et donc  $A_\infty$  et par suite  $A_\infty$  est diagonalisable.

De plus  $\chi_A = \chi_{A_p}$  donc à la limite  $\chi_A = \chi_{A_\infty}$ .

On en déduit que  $A$  et  $A_\infty$  ont les mêmes valeurs propres et que celles-ci ont mêmes multiplicités. On en conclut que  $A$  et  $A_\infty$  sont semblables.

Ainsi la classe de similitude de  $A$  est fermée.

Cas  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  non diagonalisable.

À titre d'exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Pour  $P_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on obtient

$$P_p^{-1}AP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda I_2$$

qui n'est pas semblable à  $A$ .

De façon plus générale, si la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre  $\lambda$  pour laquelle

$$\text{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \neq \text{Ker}(A - \lambda I_2)$$

Pour  $X_2 \in \text{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \text{Ker}(A - \lambda I_2)$  et  $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$ , la famille  $(X_1, X_2)$  vérifie  $AX_1 = \lambda X_1$  et  $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$ . En complétant la famille libre  $(X_1, X_2)$  en une base, on obtient que la matrice  $A$  est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (*) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix}$$

Pour  $P_p = \text{diag}(p, 1, \dots, 1)$ , on obtient

$$P_p^{-1}TP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & (* / p) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

Or cette matrice n'est pas semblable à  $T$  ni à  $A$  car  $\text{rg}(A_\infty - \lambda I_n) \neq \text{rg}(T - \lambda I_n)$ .

Ainsi, il existe une suite de matrices semblables à  $A$  qui converge vers une matrice qui n'est pas semblable à  $A$ , la classe de similitude de  $A$  n'est pas fermée.

Cas  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  alors toute limite  $A_\infty$  d'une suite de la classe de similitude de  $A$  est semblable à  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP = A_\infty$ . On a alors  $AP = PA_\infty$ . En introduisant les parties réelles et imaginaires de  $P$ , on peut écrire  $P = Q + iR$  avec  $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

L'identité  $AP = PA_\infty$  avec  $A$  et  $A_\infty$  réelles entraîne  $AQ = QA_\infty$  et  $AR = RA_\infty$ . Puisque la fonction polynôme  $t \mapsto \det(Q + tR)$  n'est pas nulle (car non nulle en  $i$ ), il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $P' = Q + tR \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et pour cette matrice  $AP' = P'A_\infty$ . Ainsi les matrices  $A$  et  $A_\infty$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Si  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

Il existe une valeur propre complexe  $\lambda$  pour laquelle

$$\text{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \neq \text{Ker}(A - \lambda I_2).$$

Pour  $X_2 \in \text{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \text{Ker}(A - \lambda I_2)$  et  $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$ , la famille  $(X_1, X_2)$  vérifie  $AX_1 = \lambda X_1$  et  $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$ .

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il suffit de reprendre la démonstration qui précède.

Si  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , on peut écrire  $\lambda = a + ib$  avec  $b \in \mathbb{R}^*$ .

Posons  $X_3 = \bar{X}_1$  et  $X_4 = \bar{X}_2$ .

La famille  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  est libre car  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ .

Introduisons ensuite  $Y_1 = \text{Re}(X_1)$ ,  $Y_2 = \text{Re}(X_2)$ ,  $Y_3 = \text{Im}(X_1)$  et  $Y_4 = \text{Im}(X_2)$ .

Puisque  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(Y_1, \dots, Y_4) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(X_1, \dots, X_4)$ , la famille  $(Y_1, \dots, Y_4)$  est libre et peut donc être complétée en une base.

On vérifie par le calcul  $AY_1 = aY_1 - bY_3$ ,  $AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1$ ,  $AY_3 = aY_3 + bY_1$  et  $AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3$ . et on obtient que la matrice  $A$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à la matrice

$$\begin{pmatrix} T & * \\ O & B \end{pmatrix}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour  $P_p = \text{diag}(p, 1, p, 1, \dots, 1)$ , on obtient

$$P_p^{-1}TP_p \rightarrow \begin{pmatrix} T_\infty & *' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Or dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la matrice  $A_\infty$  est semblable à  $\text{diag}(\lambda, \lambda, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}, B)$  qui n'est pas semblable à  $A$  pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu. Les matrices réelles  $A$  et  $A_\infty$  ne sont pas semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ni *a fortiori* dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On en déduit que la classe de similitude de  $A$  n'est pas fermée

#### Exercice 14 : [énoncé]

- (a) Soient  $(f_n)$  une suite convergente d'éléments de  $A$  et  $f_\infty \in E$  sa limite. Puisque la convergence de la suite  $(f_n)$  a lieu pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , cette convergence correspond à la convergence uniforme. En particulier, il y a convergence simple et

$$f_n(0) \rightarrow f_\infty(0)$$

On en déduit  $f_\infty(0) = 0$ .

Puisqu'il y a convergence uniforme de cette suite de fonctions continues, on a aussi

$$\int_0^1 f_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 f_\infty(t) dt$$

et donc

$$\int_0^1 f_\infty(t) dt \geq 1$$

Ainsi  $f_\infty \in A$  et la partie  $A$  est donc fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

- (b) Par l'absurde, supposons qu'il existe  $f \in A$  vérifiant  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Puisque

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leq 1$$

on peut affirmer que

$$\int_0^1 f(t) dt = 1$$

et donc

$$\int_0^1 (1 - f(t)) dt = 0$$

Or la fonction  $t \mapsto 1 - f(t)$  est continue et positive, c'est donc la fonction nulle.

Par suite  $f$  est la fonction constante égale à 1, or  $f(0) = 0$ , c'est absurde.

#### Exercice 15 : [énoncé]

- (a) Soit  $(u_n)$  une suite convergente d'éléments de  $A$  de limite  $u_\infty = (x_\infty, y_\infty)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut écrire  $u_n = (x_n, y_n)$  avec  $x_n y_n = 1$ . À la limite on obtient  $x_\infty y_\infty = 1$  et donc  $u_\infty = 1$ .

En vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées, on peut affirmer que  $A$  est fermée.

La partie  $B$ , quant à elle, est fermée car produit cartésien de deux fermées.

- (b) Posons

$$u_n = (1/n, 0) = (1/n, n) + (0, -n) \in A + B$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $u_n \rightarrow (0, 0)$ .

Or  $(0, 0) \notin A + B$  car le premier élément d'un couple appartenant à  $A + B$  ne peut pas être nul.

#### Exercice 16 : [énoncé]

- (a) On a

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ]n; n+1[$$

Puisque  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  est une réunion d'ouverts, c'est un ouvert.

- (b) Soit  $(x_n)$  une suite convergente d'entiers de limite  $\ell$ .

Pour  $\varepsilon = 1/2$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, |x_n - \ell| < 1/2$$

et alors

$$\forall m, n \geq N, |x_m - x_n| < 1$$

Puisque les termes de la suite  $(x_n)$  sont entiers, on en déduit

$$\forall m, n \geq N, x_m = x_n$$

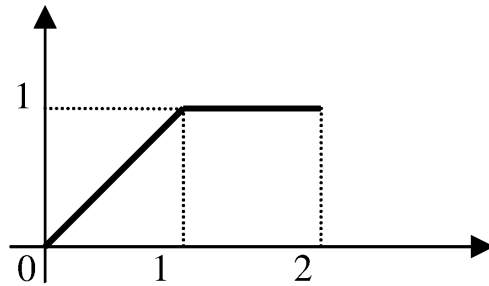
La suite  $(x_n)$  est alors constante à partir du rang  $N$  et sa limite est donc un nombre entier.

- (c) Considérons  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

La fonction  $f$  est continue et

$$\mathbb{Z} = f^{-1}(\{0\})$$

avec  $\{0\}$  partie fermée de  $\mathbb{R}$ .



**Exercice 17 :** [énoncé]

Posons  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $\varphi(P) = P(0)$ .

L'application  $\varphi$  est linéaire et puisque  $|\varphi(P)| \leq N_1(P)$ , cette application est continue. On en déduit que  $\Omega = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$  est un ouvert relatif à  $E$  i.e. un ouvert de  $E$  pour la norme  $N_1$ .

Pour la norme  $N_2$ , montrons que la partie  $\Omega$  n'est pas ouverte en observant qu'elle n'est pas voisinage de son point  $P = 1$ . Pour cela considérons la fonction continue  $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par le graphe suivant : Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes vérifiant

$$\sup_{t \in [0;2]} |P_n(t) - f(t)| \rightarrow 0$$

et en particulier

$$P_n(0) \rightarrow 0 \text{ et } N_2(P_n - P) \rightarrow 0$$

Considérons alors la suite de polynômes  $(Q_n)$  avec

$$Q_n = P_n - P_n(0)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n(0) = 0$  donc  $Q_n \notin \Omega$  et

$$N_2(Q_n) \leq N_2(P_n - P) + |P_n(0)| \rightarrow 0$$

donc

$$Q_n \xrightarrow{N_2} P$$

Puisque la partie  $\Omega$  n'est pas voisinage de chacun de ses points, elle n'est pas ouverte pour la norme  $N_2$ .

**Exercice 18 :** [énoncé]

Puisque  $A \subset \text{Vect } A$ , on a  $\bar{A} \subset \overline{\text{Vect } A}$ .

Puisque  $\text{Vect } A$  est un sous-espace vectoriel, on montre aisément que  $\overline{\text{Vect } A}$  l'est aussi. Puisqu'il contient  $\bar{A}$ , on obtient

$$\text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect } A}$$

**Exercice 19 :** [énoncé]

On a

$$\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap \mathcal{C}_E A^\circ = \bar{A} \cap \overline{\mathcal{C}_E A}$$

On en déduit que  $\text{Fr}(A)$  est fermée par intersection de parties fermées

**Exercice 20 :** [énoncé]

On sait

$$\text{Fr}(F) = \bar{F} \cap \overline{\mathcal{C}_E F}$$

donc

$$\text{Fr}(\text{Fr}(F)) = \text{Fr}(F) \cap \overline{\mathcal{C}_E \text{Fr}(F)}$$

Or  $\text{Fr}(F) \subset \bar{F} = F$  donc  $\mathcal{C}_E F \subset \mathcal{C}_E \text{Fr}(F)$  puis  $\overline{\mathcal{C}_E F} \subset \overline{\mathcal{C}_E \text{Fr}(F)}$ .

De plus  $\text{Fr } F \subset \overline{\mathcal{C}_E F}$  donc  $\text{Fr } F \subset \overline{\mathcal{C}_E \text{Fr } F}$  puis

$$\text{Fr}(\text{Fr}(F)) = \text{Fr}(F)$$

**Exercice 21 :** [énoncé]

- (a) Soit  $x \in A \cap \bar{B}$ . Il existe une suite  $(b_n) \in B^\mathbb{N}$  telle que  $b_n \rightarrow x$ . Or  $x \in A$  et  $A$  est ouvert donc à partir d'un certain rang  $b_n \in A$ . Ainsi pour  $n$  assez grand  $b_n \in A \cap B$  et puisque  $b_n \rightarrow x$ ,  $x \in \overline{A \cap B}$ .
- (b) Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$ .

**Exercice 22 :** [énoncé]

- (a) Soient  $a, b \in \bar{A}$ . Il existe  $(a_n) \in A^\mathbb{N}$  et  $(b_n) \in A^\mathbb{N}$  telles que  $a_n \rightarrow a$  et  $b_n \rightarrow b$ . Pour tout  $\lambda \in [0; 1]$ ,

$$\lambda a + (1 - \lambda)b = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n)$$

avec  $\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n \in [a_n; b_n] \subset A$  donc  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \bar{A}$ .

- (b) Soient  $a, b \in A^\circ$ . Il existe  $\alpha_a, \alpha_b > 0$  tel que  $B(a, \alpha_a), B(b, \alpha_b) \subset A$ . Posons  $\alpha = \min(\alpha_a, \alpha_b) > 0$ .  
 Pour tout  $\lambda \in [0; 1]$  et tout  $x \in B(\lambda a + (1 - \lambda)b, \alpha)$  on a  
 $x = (\lambda a + (1 - \lambda)b) + \alpha u$  avec  $u \in B(0, 1)$ .  
 $a' = a + \alpha u \in B(a, \alpha) \subset A$  et  $b' = b + \alpha u \in B(b, \alpha) \subset A$  donc  $[a'; b'] \subset A$   
 puisque  $A$  est convexe donc  $\lambda a' + (1 - \lambda)b' = x \in A$ . Ainsi  
 $B(\lambda a + (1 - \lambda)b, \alpha) \subset A$  et donc  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in A^\circ$ . Finalement  $A^\circ$  est convexe.

**Exercice 23 :** [énoncé]

$A \subset \bar{A}, B \subset \bar{B}$  donc  $d(\bar{A}, \bar{B}) \leq d(A, B)$ .

Pour tout  $x \in \bar{A}$  et  $y \in \bar{B}$ , il existe  $(a_n) \in A^\mathbb{N}$  et  $(b_n) \in B^\mathbb{N}$  telles que  $a_n \rightarrow x$  et  $b_n \rightarrow y$ .

On a alors  $d(x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, b_n)$  or  $d(a_n, b_n) \geq d(A, B)$  donc à la limite  $d(x, y) \geq d(A, B)$  puis  $d(\bar{A}, \bar{B}) \geq d(A, B)$  et finalement l'égalité.

**Exercice 24 :** [énoncé]

- (a)  $\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$  est un fermé qui contient  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  donc  $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ .  
 Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_j \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$  et  $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$  est fermé donc  
 $A_j \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$  puis  $\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ .

- (b)  $\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$  est un fermé qui contient  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  donc  $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} \subset \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$ .  
 Il ne peut y avoir égalité : pour  $A_1 = \mathbb{Q}, A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  on a  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$  et  $\overline{A_1 \cap A_2} = \mathbb{R}$ .

**Exercice 25 :** [énoncé]

Pour tout  $x \in A, x \in \bar{A}$  et donc  $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty, \bar{A}}$ . Ainsi

$$\|f\|_{\infty, A} \leq \|f\|_{\infty, \bar{A}}$$

Soit  $x \in \bar{A}$ , il existe  $(u_n) \in A^\mathbb{N}$  tel que  $u_n \rightarrow x$  et alors  $f(u_n) \rightarrow f(x)$  par continuité de  $f$ . Or  $|f(u_n)| \leq \|f\|_{\infty, A}$  donc à la limite  $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty, A}$  puis

$$\|f\|_{\infty, \bar{A}} \leq \|f\|_{\infty, A}$$

**Exercice 26 :** [énoncé]

- (a) Si  $A$  est fermée alors  $\bar{A} = A$  donc  $\text{Fr } A = A \setminus A^\circ \subset A$ .  
 Inversement, si  $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus A^\circ \subset A$  alors puisque  $A^\circ \subset A$  on a  $\bar{A} \subset A$ .  
 En effet, pour  $x \in \bar{A}$ , si  $x \in A^\circ$  alors  $x \in A$  et sinon  $x \in \text{Fr } A$  et donc  $x \in A$ .  
 Puisque de plus  $A \subset \bar{A}$ , on en déduit  $A = \bar{A}$  et donc  $\bar{A}$  est fermé.
- (b)  $A$  est un ouvert si, et seulement si,  $C_E A$  est un fermé i.e. si, et seulement si,  $\text{Fr}(C_E A) \subset C_E A$ .  
 Or  $\text{Fr}(C_E A) = \text{Fr } A$  donc  $A$  est un ouvert si, et seulement si,  $\text{Fr } A \cap A = \emptyset$ .

**Exercice 27 :** [énoncé]

- (a) Une matrice de  $\mathcal{R}$  est annulée par un polynôme de la forme  $X^n - 1$  dont les racines sont de module 1. Puisque les valeurs propres figurent parmi les racines des polynômes annulateurs

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$$

- (b) Une matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  admet deux valeurs propres comptées avec multiplicité  $\lambda, \mu$ . Celles-ci sont déterminées comme les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \text{tr } M \\ \lambda \mu = \det M \end{cases}$$

Pour alléger les notations, posons  $p = (\text{tr } M)/2$  et  $q = \det M$ . Les valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  sont les deux racines du polynôme

$$X^2 - pX + q$$

et en posant  $\delta \in \mathbb{C}$  tel que  $\delta^2 = p^2 - q$ , ces racines sont

$$\lambda = p + \delta \text{ et } \mu = p - \delta$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= |p|^2 + |\delta|^2 + 2 \text{Re}(\bar{p}\delta) \text{ et} \\ |\mu|^2 &= |p|^2 + |\delta|^2 - 2 \text{Re}(\bar{p}\delta) \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction  $f$  qui à  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  associe le réel

$$\left(|\lambda|^2 - 1\right)^2 + \left(|\mu|^2 - 1\right)^2 = \left(|\lambda|^2 + |\mu|^2\right)^2 - 2\left(|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\lambda\mu|^2 - 1\right)$$

s'exprime par opérations à partir de  $\text{tr } M$  et  $\det M$  sous la forme d'une fonction continue.

Puisque  $\mathcal{U} = f^{-1}(\{0\})$  avec  $\{0\}$  fermé,  $\mathcal{U}$  est une partie fermée de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

(c) Soit  $M \in \mathcal{U}$ . La matrice  $M$  est trigonalisable et donc il existe  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  et  $T \in \mathcal{T}_2^+(\mathbb{C})$  telle que

$$M = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, |\lambda| = |\mu| = 1$$

On peut écrire  $\lambda = e^{i\alpha}$  et  $\mu = e^{i\beta}$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$\alpha_n = 2\pi \frac{[n\alpha/2\pi]}{n} \text{ et } \beta_n = 2\pi \frac{[n\beta/2\pi] + 1}{n}$$

et considérons la matrice

$$M_n = PT_nP^{-1} \text{ avec } T_n = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_n} & \nu \\ 0 & e^{i\beta_n} \end{pmatrix}$$

Par construction,

$$e^{i\alpha_n} \neq e^{i\beta_n}$$

au moins pour  $n$  assez grand et ce même lorsque  $\alpha = \beta$ .

On en déduit que pour ces valeurs de  $n$  la matrice  $T_n$  est diagonalisable.

De plus, puisque

$$(e^{i\alpha_n})^n = (e^{i\beta_n})^n = 1$$

on a alors  $T_n^n = I_2$  et donc  $M_n \in \mathcal{R}$ .

Enfin, on a évidemment  $M_n \rightarrow M$ .

(d)  $\mathcal{U}$  est un fermé contenant  $\mathcal{R}$  donc  $\bar{\mathcal{R}} \subset \mathcal{U}$  et par double inclusion  $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{U}$ .

**Exercice 28 : [énoncé]**

Soit  $A \in R_p$ . La matrice  $A$  possède un déterminant extrait non nul d'ordre  $p$ . Par continuité du déterminant, au voisinage de  $A$ , toute matrice à ce même déterminant extrait non nul et est donc de rang supérieur à  $p$ . Ainsi la matrice  $A$  est intérieure à  $R_p$ .

**Exercice 29 : [énoncé]**

Si  $u$  est continue alors

$$A = \{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\} = f^{-1}(\{1\})$$

est l'image réciproque du fermé  $\{1\}$  par l'application continue  $f = \|\cdot\| \circ u$ . La partie  $A$  est donc un fermé relatif à  $E$ , c'est donc une partie fermée.

Inversement, si  $u$  n'est pas continu alors l'application  $u$  n'est pas bornée sur  $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ . Cela permet de construire une suite  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  vérifiant

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \|u(x_n)\| > n$$

En posant

$$y_n = \frac{1}{\|u(x_n)\|} x_n$$

on obtient une suite  $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$  vérifiant  $y_n \rightarrow 0$ .

Or  $0 \notin A$  donc la partie  $A$  n'est pas fermée.

**Exercice 30 : [énoncé]**

(a) Notons

$$A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$$

On a évidemment  $A \subset \text{Im } f$ , mais inversement, pour  $x \in \text{Im } f$ , on peut écrire  $x = f(a)$  et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x$$

Ainsi  $\text{Im } f \subset A$ , puis, par double inclusion,  $A = \text{Im } f$ .

On en déduit que  $A$  est un segment de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[\alpha; \beta]$  car image d'un compact par une fonction réelle continue.

(b) Une fonction  $f$  d'allure suivante convient

(c) Soit  $f$  solution dérivable.

Si  $\alpha = \beta$  alors  $f$  est constante égale à cette valeur commune.

Si  $\alpha < \beta$  alors  $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$  car  $f(x) = x$  sur  $[\alpha; \beta]$ .

Par suite, si  $\alpha > 0$ ,  $f$  prend des valeurs strictement inférieure à  $\alpha$  ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit  $\alpha = 0$ .

De même on obtient  $\beta = 1$  et on conclut  $f: x \in [0; 1] \mapsto x$ .

**Exercice 31 : [énoncé]**

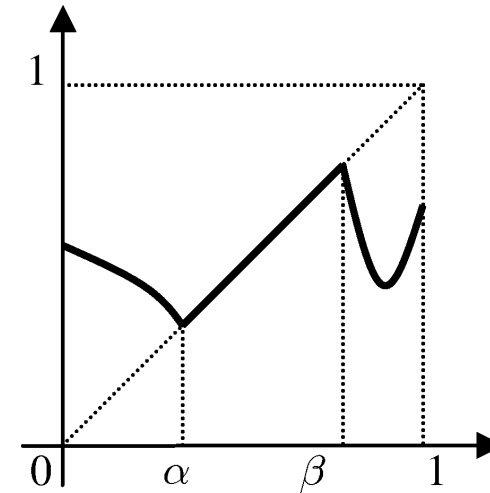
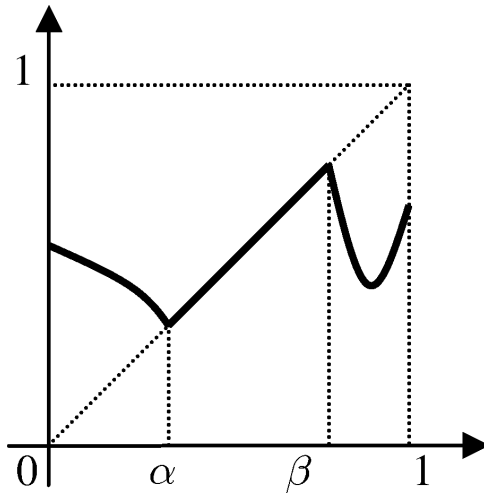
(a) Soit  $f$  solution. Formons

$$A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$$

On a évidemment  $A \subset \text{Im } f$ , mais inversement, pour  $x \in \text{Im } f$ , on peut écrire  $x = f(a)$  et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x$$

Ainsi  $\text{Im } f \subset A$ , puis, par double inclusion,  $A = \text{Im } f$ .



On en déduit que  $A$  est un segment de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[\alpha; \beta]$  car image d'un compact par une fonction réelle continue.

Pour tout  $x \in [\alpha; \beta]$ ,  $f(x) = x$  et pour tout  $x \in [0; \alpha[ \cup ]\beta; 1]$ ,  $f(x) \in [\alpha; \beta]$ . Inversement, une fonction continue vérifiant les deux conditions précédente est solution.

Cela peut apparaître sous la forme d'une fonction ayant l'allure suivante

(b) Soit  $f$  solution dérivable.

Si  $\alpha = \beta$  alors  $f$  est constante égale à cette valeur commune.

Si  $\alpha < \beta$  alors  $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$  car  $f(x) = x$  sur  $[\alpha; \beta]$ .

Par suite, si  $\alpha > 0$ ,  $f$  prend des valeurs strictement inférieure à  $\alpha$  ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit  $\alpha = 0$ .

De même on obtient  $\beta = 1$  et on conclut  $f: x \in [0; 1] \mapsto x$ .

**Exercice 32 : [énoncé]**

(a) Par télescopage

$$\left( \sum_{k=0}^n u^k \right) \circ (u - \text{Id}) = u^{n+1} - \text{Id}$$

donc

$$v_n \circ (u - \text{Id}) = \frac{1}{(n+1)} (u^{n+1} - \text{Id})$$

(b) Soit  $x \in \text{Im}(u - \text{Id}) \cap \text{Ker}(u - \text{Id})$ . On peut écrire  $x = u(a) - a$  et on a  $u(x) = x$ .

On en déduit

$$v_n \circ (u - \text{Id})(a) = x$$

Or

$$v_n \circ (u - \text{Id})(a) = \frac{1}{n+1} (u^{n+1}(a) - a) \rightarrow 0$$

car

$$\|u^{n+1}(a) - a\| \leq \|u^{n+1}(a)\| + \|a\| \leq 2\|a\|$$

On en déduit  $x = 0$ .

(c) Par la formule du rang

$$\dim \text{Im}(u - \text{Id}) + \dim \text{Ker}(u - \text{Id}) = \dim E$$

et puisque les deux espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires.

(d) Soit  $z \in E$ . On peut écrire  $z = x + y$  avec  $x \in \text{Im}(u - \text{Id})$  et  $y \in \text{Ker}(u - \text{Id})$ . On a alors  $v_n(z) = v_n(x) + y$  avec, comme dans l'étude du b),  $v_n(x) \rightarrow 0$ . On en déduit  $v_n(z) \rightarrow y$ .

Ainsi la suite de fonctions  $(v_n)$  converge simplement vers la projection  $p$  sur  $\text{Ker}(u - \text{Id})$  parallèlement à  $\text{Im}(u - \text{Id})$ .



Puisque pour tout  $x \in E$ , on a

$$\|v_n(x)\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|u^k(x)\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|x\| = \|x\|$$

on obtient à la limite  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ . On en déduit que la projection  $p$  est continue puis que  $\text{Im}(u - \text{Id}) = \text{Ker } p$  est une partie fermée.

(e) Supposons la convergence simple de la suite de fonctions  $(v_n)$  et la fermeture de  $\text{Im}(u - \text{Id})$ .

Soit  $z \in E$ . Posons  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(z)$  et  $x = z - y$ .

D'une part, puisque

$$u(v_n(z)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^{k+1}(z) = v_n(z) + \frac{1}{n+1} (u^{n+1}(z) - z)$$

on obtient à la limite

$$u(y) = y$$

car l'application linéaire  $u$  est continue et  $\|u^{n+1}(z)\| \leq \|z\|$ . On en déduit  $y \in \text{Ker}(u - \text{Id})$ .

D'autre part

$$z - v_n(z) = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^n (\text{Id} - u^k)(z) \right)$$

et

$$\text{Im}(\text{Id} - u^k) = \text{Im} \left( (\text{Id} - u) \circ \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell \right) \subset \text{Im}(\text{Id} - u) = \text{Im}(u - \text{Id})$$

donc  $z - v_n(z) \in \text{Im}(u - \text{Id})$ . On en déduit  $x = \lim(z - v_n(z)) \in \text{Im}(u - \text{Id})$  car  $\text{Im}(u - \text{Id})$  est fermé.

Finalement, on a écrit  $z = x + y$  avec

$$x \in \text{Im}(u - \text{Id}) \text{ et } y \in \text{Ker}(u - \text{Id})$$

**Exercice 33 :** [énoncé]

Soit  $P \in O_n$ . En notant  $x_1 < \dots < x_n$  ses racines, on peut écrire

$$P = \alpha(X - x_1) \dots (X - x_n)$$

avec  $\alpha \neq 0$ .

Posons  $y_1, \dots, y_{n-1}$  les milieux des segments  $[x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ .

Posons aussi  $y_0 \in ]-\infty; x_1[$  et  $y_n \in ]x_n; +\infty[$ .

$P(y_0)$  est du signe de  $(-1)^n \alpha$ ,  $P(y_1)$  est du signe de  $(-1)^{n-1} \alpha, \dots, P(y_{n-1})$  est du signe de  $(-1) \alpha$ ,  $P(y_n)$  du signe de  $\alpha$ . Pour simplifier l'exposé de ce qui suit, on va supposer  $\alpha > 0$ . La résolution se transposera aisément au cas  $\alpha < 0$ .

Considérons l'application

$$f_i : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i)$$

L'application  $f_i$  est continue et donc  $f_j^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$  et  $f_j^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$  sont des parties ouvertes de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Considérons  $U$  l'intersection des ouverts

$$f_0^{-1}((-\infty; x_1)^*), f_1^{-1}((x_1; x_2)^*), \dots, f_n^{-1}(x_n; +\infty)^*$$

Les éléments de  $U$  sont des polynômes réels alternant de signe entre  $y_0 < y_1 < \dots < y_n$ . Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet  $n$  racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi  $U \subset O_n$ . Or  $P \in U$  et  $U$  est ouvert donc  $U$  est voisinage de  $P$  puis  $O_n$  est voisinage de  $P$ .

Au final  $O_n$  est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.

Dans le cas  $n = 1$  :  $F_n = O_n$  et donc  $F_n$  est ouvert.

Dans le cas  $n = 2$  :  $F_n$  réunit les polynômes  $P = aX^2 + bX + c$  avec  $b^2 - 4ac > 0$  (que  $a$  soit égal à 0 ou non). L'application  $P \mapsto b^2 - 4ac$  étant continue, on peut affirmer que  $F_n$  est encore ouvert car image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Dans le cas  $n \geq 3$  :  $P_n = X(1 + X^2/n)$  est une suite de polynômes non scindés convergeant vers  $X$  scindé à racines simples. Par suite  $F_n$  n'est pas ouvert.

**Exercice 34 :** [énoncé]

Par l'absurde, supposons  $f$  discontinue en  $a \in \mathbb{R}$ . On peut alors construire une suite  $(x_n)$  vérifiant

$$x_n \rightarrow a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

avec  $\varepsilon > 0$  fixé.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $f([a; x_n])$  est un segment contenant  $f(a)$  et  $f(x_n)$ , il contient aussi l'intermédiaire  $f(a) \pm \varepsilon$  (le  $\pm$  étant déterminé par la position relative de  $f(x_n)$  par rapport à  $f(a)$ ). Il existe donc  $a_n$  compris entre  $a$  et  $x_n$  vérifiant

$$|f(a_n) - f(a)| = \varepsilon$$

La suite  $(a_n)$  évolue dans le fermé  $f^{-1}(\{f(a) + \varepsilon\}) \cup f^{-1}(\{f(a) - \varepsilon\})$  et converge vers  $a$  donc  $a \in f^{-1}(\{f(a) + \varepsilon\}) \cup f^{-1}(\{f(a) - \varepsilon\})$  ce qui est absurde.

**Exercice 35 :** [énoncé]

Considérons l'application  $\varphi: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  déterminée par  $\varphi(f) = f^2 - f$ .

L'application  $\varphi$  est continue par opérations sur les fonctions continues, notamment parce que l'application  $f \mapsto f \circ f$  est continue (elle s'obtient à partir du produit dans l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ ).

Puisque  $\{\tilde{0}\}$  est une partie fermée de  $\mathcal{L}(E)$ , l'ensemble  $\mathcal{P} = \varphi^{-1}(\{\tilde{0}\})$  est un fermé relatif à  $\mathcal{L}(E)$ , donc un fermé de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Exercice 36 :** [énoncé]

L'application  $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$  est polynomiale non nulle en  $\lambda$  donc possède un nombre fini de racine.

Par suite :  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \alpha > 0, B(A, \alpha) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ .

**Exercice 37 :** [énoncé]

(a) Soient  $u, v \in \bar{F}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Il existe  $(u_n), (v_n) \in F^{\mathbb{N}}$  telles que  $u_n \rightarrow u$  et  $v_n \rightarrow v$ .

Comme  $\lambda u_n + \mu v_n \rightarrow \lambda u + \mu v$  et  $\lambda u_n + \mu v_n \in F$  on a  $\lambda u + \mu v \in \bar{F}$ .

(b) Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ .

Si  $\bar{H} = H$  alors  $H$  est fermé.

Sinon alors  $\bar{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , contenant  $H$  et distinct de  $H$ .

Puisque  $H$  est un hyperplan  $\exists a \notin H$  tel que  $H \oplus \text{Vect}(a) = E$ .

Soit  $x \in \bar{H} \setminus H$ . On peut écrire  $x = h + \lambda a$  avec  $h \in H$  et  $\lambda \neq 0$ . Par opération  $a \in \bar{H}$  et puisque  $H \subset \bar{H}$  on obtient  $E \subset \bar{H}$ . Finalement  $\bar{H} = E$  et donc  $H$  est dense.

**Exercice 38 :** [énoncé]

(a) Pour tout  $a \in E$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,  $B(a, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$  car  $U$  est dense.

Soit  $x \in B(a, \varepsilon) \cap U$ . Puisque  $B(a, \varepsilon) \cap U$  est ouvert, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $B(x, \alpha) \subset B(a, \varepsilon) \cap U$  et puisque  $V$  est dense  $B(x, \alpha) \cap V \neq \emptyset$ . Par suite

$$B(a, \varepsilon) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$$

(b) Soient  $F$  et  $G$  deux fermés d'intérieurs vides.

$$C_E(F \cup G)^\circ = \overline{C_E(F \cup G)} = \overline{C_E F \cap C_E G}$$

avec  $C_E F$  et  $C_E G$  ouverts denses donc

$$\overline{C_E F \cap C_E G} = E$$

puis

$$(F \cup G)^\circ = \emptyset$$

**Exercice 39 :** [énoncé]

(a) Posons

$$A = \{n \geq n_0 \mid a \geq u_n\}$$

$A$  est une partie de  $\mathbb{N}$ , non vide car  $n_0 \in A$  et majorée car  $u_n \rightarrow +\infty$ .

La partie  $A$  admet donc un plus grand élément  $n \geq n_0$  et pour celui-ci  $u_n \leq a < u_{n+1}$ .

Par suite  $|u_n - a| \leq |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$  car  $n \geq n_0$ .

(b) Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon.$$

Puisque  $v_n \rightarrow +\infty$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $x + v_p \geq u_{n_0}$ .

Par l'étude précédente, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|u_n - (x + v_p)| \leq \varepsilon$  i.e.

$$|(u_n - v_p) - x| \leq \varepsilon.$$

Par suite l'ensemble  $\{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

(c) Remarquons que

$$A = \{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{\cos(\ln(n+1) - 2p\pi) \mid n, p \in \mathbb{N}\}$$

Posons  $u_n = \ln(n+1)$  et  $v_n = 2n\pi$ . Les hypothèses précédentes sont réunies et donc

$$B = \{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\} = \{\ln(n+1) - 2p\pi \mid n, p \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soient  $x \in [-1; 1]$  et  $\theta = \arccos x$ .

Par densité, il existe une suite  $(\theta_n)$  d'éléments de  $B$  convergeant vers  $\theta$  et, par continuité de la fonction cosinus, la suite  $(x_n)$  de terme général

$x_n = \cos(\theta_n)$  converge vers  $x = \cos \theta$ .

Or cette suite  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $\cos(B) = A$  et donc  $A$  est dense dans  $[-1; 1]$ .

**Exercice 40 :** [énoncé]

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ .

Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $1/n_0 \leq \varepsilon$ .

Pour  $a \geq \ln n_0$  et  $n = E(e^a) \geq n_0$ , on a  $\ln n \leq a \leq \ln(n+1)$ .

On en déduit

$$|a - \ln n| \leq \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \leq 1/n \leq 1/n_0 \leq \varepsilon$$

Puisque  $m - x \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$ , pour  $m$  assez grand, on a  $a = m - x \geq \ln n_0$  et donc il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $|a - \ln n| \leq \varepsilon$  i.e.

$$|m - \ln n - x| \leq \varepsilon$$

Par suite  $\{m - \ln n \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 41 :** [énoncé]

- (a) Il existe  $h \in H$  tel que  $h \neq 0$  car  $H$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ .  
 Si  $h > 0$  alors  $h \in \{x \in H \mid x > 0\}$ . Si  $h < 0$  alors  $-h \in \{x \in H \mid x > 0\}$ .  
 Dans les deux cas  $\{x \in H \mid x > 0\} \neq \emptyset$ . De plus  $\{x \in H \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}$  et  $\{x \in H \mid x > 0\}$  est minoré par 0 donc  $a = \inf \{x \in H \mid x > 0\}$  existe dans  $\mathbb{R}$ .
- (b) On suppose  $a > 0$ .  
 Si  $a \notin H$  alors il existe  $x, y \in H$  tel que  $a < x < y < 2a$  et alors  $y - x$  est élément de  $H$  et vérifie  $0 < y - x < a$  ce qui contredit la définition de  $a$ . C'est absurde.  
 $a \in H$  donc  $a\mathbb{Z} = \langle a \rangle \subset H$ .  
 Inversement, soit  $x \in H$ . On peut écrire  $x = aq + r$  avec  $q \in \mathbb{Z}, r \in [0; a[$  (en fait  $q = E(x/a)$  et  $r = x - aq$ )  
 Puisque  $r = x - aq$  avec  $x \in H$  et  $aq \in a\mathbb{Z} \subset H$  on a  $r \in H$ .  
 Si  $r > 0$  alors  $r \in \{x \in H \mid x > 0\}$  et  $r < a$  contredit la définition de  $a$ .  
 Il reste  $r = 0$  et donc  $x = aq$ . Ainsi  $H \subset a\mathbb{Z}$  puis l'égalité.
- (c) Puisque  $\inf \{x \in H \mid x > 0\} = 0$ , on peut affirmer que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $x \in H$  tel que  $0 < x < \alpha$ .  
 Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $\alpha > 0$ . Montrons  $H \cap B(a, \alpha) \neq \emptyset$  i.e.  $H \cap ]a - \alpha; a + \alpha[ \neq \emptyset$   
 Il existe  $x \in H$  tel que  $0 < x < \alpha$ . Posons  $n = E(a/x)$ . On a  $a = nx + r$  avec  $0 \leq r < \alpha$ .  
 $nx \in \langle x \rangle \subset H$  et  $|a - nx| = r < \alpha$  donc  $nx \in H \cap B(a, \alpha)$  et donc  $H \cap B(a, \alpha) \neq \emptyset$ .  
 Ainsi  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 42 :** [énoncé]

- (a)  $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\cos(n + 2k\pi) \mid n, k \in \mathbb{Z}\} = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$

Puisque  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  et c'est un sous-groupe dense car il n'est pas monogène puisque  $\pi$  n'est pas rationnel; c'est en effet un résultat classique bien que en dehors du programme, les sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  sont monogènes ou denses.

Pour tout  $x \in [-1; 1]$ , il existe  $\theta \in [0; \pi]$  tel que  $\cos \theta = x$  et puisque  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite d'éléments  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  convergeant vers  $\theta$ . L'image de cette suite par la fonction continue cosinus détermine une suite d'éléments de  $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  convergeant vers  $x$ .

- (b) En notant que les  $2^p$  avec  $p \in \mathbb{N}$  sont des naturels non nuls, on observe

$$\{\cos(p \ln 2) \mid p \in \mathbb{N}\} \subset \{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Ainsi

$$\cos(\ln 2 \cdot \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) \subset \{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Si  $\pi$  et  $\ln 2$  ne sont pas commensurables, on peut conclure en adaptant la démarche précédente.

Si en revanche  $\pi$  et  $\ln 2$  sont commensurables (ce qui est douteux...), on reprend l'idée précédente avec  $\ln 3$  au lieu de  $\ln 2$ .

Assurément  $\pi$  et  $\ln 3$  ne sont pas commensurables car s'ils l'étaient,  $\ln 2$  et  $\ln 3$  le seraient aussi ce qui signifie qu'il existe  $p, q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $p \ln 2 = q \ln 3$  soit encore  $2^p = 3^q$  ce qui est faux!

**Exercice 43 :** [énoncé]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . La matrice  $A$  est trigonalisable donc il existe  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP = T$  avec  $T$  triangulaire supérieure. Posons alors  $T_p = T + \text{diag}(1/p, 2/p, \dots, n/p)$  et  $A_p = PT_pP^{-1}$ . Il est immédiat que  $T_p \rightarrow T$  quand  $p \rightarrow +\infty$  et donc  $A_p \rightarrow A$ . De plus, pour  $p$  assez grand, la matrice  $T_p$  est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts, cette matrice admet donc  $n$  valeurs propres et est donc diagonalisable. Il en est de même pour  $A_p$  qui lui est semblable. Ainsi toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

**Exercice 44 :** [énoncé]

- (a) Soit  $u$  une suite sommable. On a

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \rightarrow 0$$

donc pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $N$  tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| < \alpha$$

Considérons alors  $v$  définie par  $v_n = u_n$  si  $n \leq N$  et  $v_n = 0$  sinon.

On a  $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  et  $\|v - u\|_1 < \alpha$  donc  $B(u, \alpha) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \neq \emptyset$ .

(b) Non, en notant  $u$  la suite constante égale à 1,  $B_\infty(u, 1/2) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \emptyset$ .

**Exercice 45 : [énoncé]**

Soit  $f$  une fonction élément de  $E$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $A$  vérifiant

$$\int_A^{+\infty} f^2(t) dt \leq \varepsilon$$

Considérons alors la fonction  $\varphi: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(t) = 1$  pour  $t \in [0; A]$ ,  $\varphi(t) = 0$  pour  $t \geq A + 1$  et  $\varphi(t) = 1 - (t - A)$  pour  $t \in [A; A + 1]$ . La fonction  $f\varphi$  est éléments de  $E_0$  et

$$\|f - f\varphi\|_2 \leq \sqrt{\int_A^{+\infty} f^2(t) dt} \leq \varepsilon$$

Ainsi  $E_0$  est dense dans  $E$ .

Pour montrer maintenant que  $F$  est dense dans  $E$ , nous allons établir que  $F$  est dense dans  $E_0$ .

Soit  $f$  une fonction élément de  $E_0$ . Remarquons

$$\int_0^{+\infty} (f(t) - P(e^{-t})e^{-t^2/2})^2 dt = \int_0^1 (f(-\ln u)e^{(\ln u)^2/2} - P(u))^2 \frac{e^{-(\ln u)^2}}{u} du$$

La fonction  $u \mapsto \frac{e^{-(\ln u)^2}}{u}$  est intégrable sur  $]0; 1]$  car  $\sqrt{u} \frac{e^{-(\ln u)^2}}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ .

La fonction  $g: u \mapsto f(-\ln u)e^{(\ln u)^2/2}$  peut-être prolongée par continuité en 0 car  $f$  est nulle en dehors d'un segment. Par le théorème de Weierstrass, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $\|g - P\|_{\infty, [0; 1]} \leq \varepsilon$  et pour

$\varphi: t \mapsto P(e^{-t})e^{-t^2/2}$  on a alors

$$\|f - \varphi\|_2 \leq \lambda \varepsilon \text{ avec } \lambda = \sqrt{\int_0^1 \frac{e^{-(\ln u)^2}}{u} du}$$

Cela permet de conclure à la densité proposée.

**Exercice 46 : [énoncé]**

Par l'absurde supposons  $A \neq E$ .

Il existe un élément  $a \in E$  tel que  $a \notin A$ . Par translation du problème, on peut supposer  $a = 0$ .

Posons  $n = \dim E$ .

Si  $\text{Vect}(A)$  est de dimension strictement inférieure à  $n$  alors  $A$  est inclus dans un hyperplan de  $E$  et son adhérence aussi. C'est absurde car cela contredit la densité de  $A$ .

Si  $\text{Vect}(A)$  est de dimension  $n$ , on peut alors considérer  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  formée d'éléments de  $A$ .

Puisque  $0 \notin A$ , pour tout  $x \in A$ , on remarque :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, -\lambda x \notin A$  (car sinon, par convexité,  $0 \in A$ ).

Par convexité de  $A$  :  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \implies \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in A$  et donc :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \implies \lambda(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \notin A$ .

Ainsi  $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \leq 0, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \notin A$ .

Or la partie  $\{\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \mid \mu_i < 0\}$  est un ouvert non vide de  $A$  et donc aucun de ses éléments n'est adhérent à  $A$ . Cela contredit la densité de  $A$ .

**Exercice 47 : [énoncé]**

Soient  $a < b \in A$ .

Puisque  $a, b \in A$ ,  $\frac{a+b}{2} \in A$ , puis  $\frac{3a+b}{4} = \frac{a+(a+b)/2}{2} \in A$  et  $\frac{a+3b}{4} \in A$  etc.

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , montrons  $\forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, \frac{ka+(2^n-k)b}{2^n} \in A$ .

La propriété est immédiate pour  $n = 0$ .

Supposons la propriété vraie au rang  $n \geq 0$ .

Soit  $k \in \{0, \dots, 2^{n+1}\}$ .

Cas  $k$  pair :

$k = 2k'$  avec  $k' \in \{0, \dots, 2^n\}$  et  $\frac{ka+(2^{n+1}-k)b}{2^{n+1}} = \frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n} \in A$  en vertu de l'hypothèse de récurrence.

Cas  $k$  impair :

$k = 2k' + 1$  avec  $k' \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$  et

$$\frac{ka + (2^{n+1} - k)b}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{k'a + (2^n - k')b}{2^n} + \frac{(k' + 1)a + (2^n - (k' + 1))b}{2^n} \right) \in A$$

car par hypothèse de récurrence

$$\frac{k'a + (2^n - k')b}{2^n}, \frac{(k' + 1)a + (2^n - (k' + 1))b}{2^n} \in A$$

La récurrence est établie.

Soit  $x \in ]\inf A; \sup A[$ .

Il existe  $a, b \in A$  tel que  $x \in [a; b]$  ce qui permet d'écrire  $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ .

Soit  $k_n = E(2^n \lambda)$  et  $x_n = \frac{k_n a + (2^n - k_n)b}{2^n}$ .

On vérifie aisément que  $x_n \rightarrow x$  car  $2^n k_n \rightarrow \lambda$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $x_n \in A$

Ainsi  $A$  est dense dans  $]\inf A; \sup A[$ .

**Exercice 48 : [énoncé]**

Considérons l'ensemble  $B = \ln A = \{\ln a \mid a \in A\}$ .

Pour tout  $x, y \in B$ ,  $\frac{x+y}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab} \in B$ .

En raisonnant par récurrence, on montre que pour tout  $x, y \in B$ , on a la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, \frac{kx + (2^n - k)y}{2^n} \in B$$

Soit  $x \in ]\inf A; \sup A[$ . Il existe  $a, b \in A$  tels que  $a < x < b$ .

On a alors  $\ln a < \ln x < \ln b$  avec  $\ln a, \ln b \in B$ .

On peut écrire  $\ln x = \lambda \ln a + (1 - \lambda) \ln b$  avec  $\lambda \in ]0; 1[$ .

Posons alors  $k_n$  la partie entière de  $\lambda 2^n$  et  $x_n = \exp\left(\frac{k_n}{2^n} \ln a + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right) \ln b\right)$

Il est immédiat que  $x_n \rightarrow x$  avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in A$ .

Si, dans cette suite, il existe une infinité d'irrationnels, alors  $x$  est limite d'une suite d'éléments de  $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .

Sinon, à partir d'un certain rang, les termes de la suite  $x_n$  sont tous rationnels.

Le rapport  $x_{n+1}/x_n$  est alors aussi rationnel; mais

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n}} \text{ avec } \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = 0 \text{ ou } \frac{1}{2^{n+1}}$$

S'il existe une infinité de  $n$  tels que  $\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$  alors il existe une infinité de  $n \in \mathbb{N}$  tels que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^n}} \in \mathbb{Q}$$

et puisque l'élevation au carré d'un rationnel est un rationnel, le nombre  $a/b$  est lui-même rationnel. Or les racines carrées itérées d'un rationnel différent de 1 sont irrationnelles à partir d'un certain rang.

Il y a absurdité et donc à parti d'un certain rang  $k_{n+1} = 2k_n$ .

Considérons à la suite  $(x'_n)$  définie par

$$x'_n = \exp\left(\frac{k'_n}{2^n} \ln a + \left(1 - \frac{k'_n}{2^n}\right) \ln b\right) \text{ avec } k'_n = k_n + 1$$

On obtient une suite d'éléments de  $A$ , convergeant vers  $x$  et qui, en vertu du raisonnement précédent, est formée d'irrationnels à partir d'un certain rang.

**Exercice 49 : [énoncé]**

$N_\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est bien définie et on vérifie immédiatement

$$N_\varphi(\lambda f) = |\lambda| N_\varphi(f) \text{ et } N_\varphi(f + g) \leq N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$$

Il reste à étudier la véracité de l'implication

$$N_\varphi(f) = 0 \implies f = 0$$

Supposons :  $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$  dense dans  $[0; 1]$ .

Si  $N_\varphi(f) = 0$  alors  $f\varphi = 0$  et donc pour tout  $x \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ , on a  $f(x) = 0$  car  $\varphi(x) \neq 0$ .

Puisque la fonction continue  $f$  est nulle sur la partie  $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$  dense dans  $[0; 1]$ , cette fonction est nulle sur  $[0; 1]$ .

Supposons :  $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$  non dense dans  $[0; 1]$ .

Puisque le complémentaire de l'adhérence est l'intérieur du complémentaire, la partie  $\varphi^{-1}(\{0\})$  est d'intérieur non vide et donc il existe  $a < b \in [0; 1]$  tels que  $[a; b] \subset \varphi^{-1}(\{0\})$ .

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par

$$f(x) = \begin{cases} (x - a)(b - x) & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ , ce n'est pas la fonction nulle mais en revanche la fonction  $f\varphi$  est la fonction nulle. Ainsi on a formé un élément  $f$  non nul de  $E$  tel que  $N_\varphi(f) = 0$ . On en déduit que  $N_\varphi$  n'est pas une norme.

**Exercice 50 : [énoncé]**

Soit  $[a; b] \subset [1; +\infty[$  avec  $a < b$ . Pour établir la densité de  $A$ , montrons que  $A \cap [a; b]$  est non vide.

Considérons  $q > 1$  tel que  $qa \leq b$ .

Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$

Considérons alors

$$E = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid m > N \text{ et } \frac{u_m}{u_N} \leq b \right\}$$

$E$  est une partie de  $\mathbb{N}$ , non vide (car  $N + 1 \in E$ ) et majorée (car  $u_n \rightarrow +\infty$ ). La partie  $E$  possède donc un plus grand élément  $M$ . Pour celui-ci, on a

$$\frac{u_M}{u_N} \leq b \text{ et } \frac{u_{M+1}}{u_N} > b$$

Or

$$u_{M+1} \leq qu_M$$

donc

$$\frac{u_M}{u_N} > \frac{b}{q} \geq a$$

Ainsi  $u_M/u_N$  est un élément de  $A \cap [a; b]$ .

### Exercice 51 : [énoncé]

Soient  $x \in E$  et  $r > 0$ .

Puisque  $A$  est une partie dense,  $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ . On peut donc introduire  $x \in B(a, r) \cap A$ . Or par intersection d'ouverts,  $B(a, r) \cap A$  est aussi une partie ouverte et donc il existe  $\alpha > 0$  tel que  $B(x, \alpha) \subset B(a, r) \cap A$ . Puisque la partie  $B$  est dense,  $B(x, \alpha) \cap B \neq \emptyset$  et finalement  $B(a, r) \cap A \cap B \neq \emptyset$ .

On peut donc conclure que  $A \cap B$  est une partie dense de  $E$ .

### Exercice 52 : [énoncé]

Soit  $f$  une fonction solution.

On a  $f(0+0) = f(0) + f(0)$  donc  $f(0) = 0$

Par une récurrence facile

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$$

De plus, puisque  $f(-x+x) = f(-x) + f(x)$ , on a  $f(-x) = -f(x)$ .

Par suite

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$$

Pour  $x = p/q \in \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = pf(1/q)$  et  $f(1) = qf(1/q)$  donc  $f(x) = ax$  avec  $a = f(1)$ .

Les fonctions  $x \mapsto f(x)$  et  $x \mapsto ax$  sont continues et coïncident sur  $\mathbb{Q}$  partie dense dans  $\mathbb{R}$  donc ces deux fonctions sont égales sur  $\mathbb{R}$ .

Au final  $f$  est une fonction linéaire.

Inversement, une telle fonction est évidemment solution.

### Exercice 53 : [énoncé]

(a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Puisque

$$u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \rightarrow x$$

avec  $u_n \in \mathcal{D}$ , la partie  $\mathcal{D}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

(b) Supposons que  $f$  s'annule en 0 et 1.

$$\frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f(0)$$

donc la fonction  $f$  est impaire.

Par récurrence double, montrons  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 0$ .

Pour  $n = 0$  ou  $n = 1$  : ok

Supposons la propriété établie aux rangs  $n \geq 1$  et  $n-1 \geq 0$ .

$$\frac{f(n+1) + f(n-1)}{2} = f(n)$$

donne en vertu de l'hypothèse de récurrence :  $f(n+1) = 0$ .

Récurrence établie.

Par l'imparité

$$\forall p \in \mathbb{Z}, f(p) = 0$$

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , montrons

$$\forall p \in \mathbb{Z}, f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$$

Pour  $n = 0$  : ok

Supposons la propriété établie au rang  $n \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $p \in \mathbb{Z}$ ,

$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(0 + \frac{p}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{p}{2^n}\right)\right) \stackrel{HR}{=} 0$$

Récurrence établie.

Puisque  $f$  est continue et nulle sur une partie

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

dense dans  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ .

(c) Posons  $\beta = f(0)$  et  $\alpha = f(1) - \beta$ .

La fonction  $g: x \mapsto f(x) - \alpha x + \beta$  est continue et vérifie la propriété

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$$

donc  $g$  est nulle puis  $f$  affine.

**Exercice 54 :** [énoncé]

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si  $A$  est inversible

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = \det(A) \det(\lambda A^{-1} - B)$$

donc

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda A^{-1} - B) \det A = \det(\lambda I_n - BA) = \chi_{BA}(\lambda)$$

Ainsi les applications continues  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_{AB}(\lambda)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_{BA}(\lambda)$  coïncident sur la partie  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , elles sont donc égales sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Ainsi pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$  et donc  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

**Exercice 55 :** [énoncé]

On sait

$${}^t(\text{Com } A)A = \det A \cdot I_n$$

donc

$$\det(\text{Com } A) \det A = (\det A)^n$$

Si  $A$  est inversible on obtient

$$\det(\text{Com } A) = \det(A)^{n-1}$$

Puisque l'application  $A \mapsto \det(\text{Com } A)$  est continue et qu'elle coïncide avec l'application elle aussi continue  $A \mapsto (\det A)^{n-1}$  sur  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  qui est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on peut affirmer  $\det(\text{Com } A) = (\det A)^{n-1}$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 56 :** [énoncé]

(a) Si  $A$  est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{Com } A)$$

et donc

$$\text{Com } A = \det(A) {}^t(A^{-1})$$

De même

$$\text{Com}(P^{-1}AP) = \det(A) {}^t(P^{-1}A^{-1}P)$$

ce qui donne

$$\text{Com}(P^{-1}AP) = {}^tP \text{Com } A {}^t(P^{-1})$$

Les fonctions  $A \mapsto \text{Com}(P^{-1}AP)$  et  $A \mapsto {}^tP \text{Com } A {}^t(P^{-1})$  sont continues sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et coïncident sur  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  partie dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , c'est deux fonctions sont donc égales. Ainsi la relation

$$\text{Com}(P^{-1}AP) = {}^tP \text{Com } A {}^t(P^{-1})$$

est valable pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) C'est immédiat sachant que  ${}^t(P^{-1})$  est l'inverse de  ${}^tP$ .

**Exercice 57 :** [énoncé]

(a) On sait

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det A \cdot I_n$$

Si  $A$  est inversible alors

$$\det \tilde{A} \cdot \det A = (\det A)^n$$

donne

$$\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$$

L'application  $A \mapsto \det \tilde{A}$  étant continue et coïncidant avec l'application elle aussi continue  $A \mapsto (\det A)^{n-1}$  sur  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  qui est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on peut assurer que  $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(b) Si  $A$  est inversible alors  $\tilde{A}$  aussi donc

$$\text{rg}(A) = n \implies \text{rg}(\tilde{A}) = n$$

Si  $\text{rg}(A) \leq n - 2$  alors  $A$  ne possède pas de déterminant extrait non nul d'ordre  $n - 1$  et donc  $\tilde{A} = 0$ . Ainsi

$$\text{rg}(A) \leq n - 2 \implies \text{rg}(\tilde{A}) = 0$$

Si  $\text{rg}(A) = n - 1$  alors  $\dim \text{Ker } A = 1$  or  $A\tilde{A} = \det A \cdot I_n = 0$  donne  $\text{Im } \tilde{A} \subset \text{Ker } A$  et donc  $\text{rg}(\tilde{A}) \leq 1$ . Or puisque  $\text{rg}(A) = n - 1$ ,  $A$  possède un déterminant extrait d'ordre  $n - 1$  non nul et donc  $\tilde{A} \neq 0$ . Ainsi

$$\text{rg}(A) = n - 1 \implies \text{rg}(\tilde{A}) = 1$$

(c) Soit  $P$  une matrice inversible. Pour tout  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,

$$(P^{-1}\tilde{A}P)(P^{-1}AP) = \det A \cdot I_n$$

et  $P^{-1}AP$  inversible donc

$$P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP}$$

Ainsi

$$\tilde{A} = \widetilde{PP^{-1}APP^{-1}}$$

Les applications  $A \mapsto \tilde{A}$  et  $A \mapsto \widetilde{PP^{-1}APP^{-1}}$  sont continues et coïncident sur la partie dense  $GL_n(\mathbb{K})$  elles sont donc égales sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si  $A$  et  $B$  sont semblables alors il existe  $P$  inversible vérifiant  $P^{-1}AP = B$  et par la relation ci-dessus  $P^{-1}\tilde{A}P = P^{-1}AP = \tilde{B}$  donc  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont semblables.

(d) Si  $A$  est inversible alors  $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$  et

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = \det(A)^{n-2}A$$

Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(A)^{n-2}A$$

**Exercice 58 : [énoncé]**

Cas  $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$

On sait

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{Com } A), B^{-1} = \frac{1}{\det B} {}^t(\text{Com } B)$$

et

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)} {}^t(\text{Com } AB) = B^{-1}A^{-1}$$

donc

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)} {}^t(\text{Com } AB) = \frac{1}{\det A \det B} {}^t(\text{Com } B) {}^t(\text{Com } A)$$

puis

$${}^t(\text{Com}(AB)) = {}^t(\text{Com}(A) \text{Com}(B))$$

et enfin

$$\text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$$

Cas général

Posons

$$A_p = A + \frac{1}{p}I_n \text{ et } B_p = B + \frac{1}{p}I_n$$

Pour  $p$  assez grand  $A_p, B_p \in GL_n(\mathbb{R})$  et donc

$$\text{Com}(A_p B_p) = \text{Com}(A_p) \text{Com}(B_p)$$

Or la fonction  $M \rightarrow \text{Com } M$  est continue donc par passage à la limite

$$\text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$$

**Exercice 59 : [énoncé]**

(a) Sachant  $(u_{n+1} - u_n)$  de limite nulle, pour  $\varepsilon = (b - a)/2 > 0$ , il existe un rang  $p \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \implies |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+p+1} - u_{n+p}| \leq \varepsilon$$

Sachant  $(v_p)$  de limite  $+\infty$ , le terme  $u_p - v_q$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $q$  tend vers  $+\infty$  et il existe donc un rang  $q$  tel que  $u_p - v_q \leq a$ .

Pour ces paramètres  $p$  et  $q$ , la suite de terme général  $w_n = u_{n+p} - v_q$  vérifie les conditions requises.

(b) Posons

$$E = \{u_n - v_p \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$$

La suite  $(u_n)$  étant de limite  $+\infty$ , la suite  $(w_n)$  l'est aussi et l'ensemble  $A$  des  $n \in \mathbb{N}$  vérifiant  $w_n \leq a$  est une partie de  $\mathbb{N}$  non vide et majorée. On peut alors introduire le plus grand entier  $N$  vérifiant  $w_N \leq a$ . On vérifie

$$w_{N+1} > a \quad \text{et} \quad w_{N+1} \leq w_N + \underbrace{|w_{N+1} - w_N|}_{\leq (b-a)/2} < b$$

On a ainsi établi :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \implies \exists x \in E, x \in ]a; b[$$

La partie  $E$  est donc dense dans  $\mathbb{R}$ .

(c) Introduisons  $(v_p) = (2p\pi)$  de limite  $+\infty$ . La partie  $E$  est dense dans  $\mathbb{R}$  et l'image de celle-ci par la fonction sinus est  $S = \{\sin(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Cette partie est incluse dans le fermé  $[-1; 1]$  et donc  $\overline{S}$  aussi.

Inversement, tout élément de  $[-1; 1]$  est le sinus d'un angle  $\theta$  et il existe une suite d'éléments de  $E$  de limite  $\theta$ . Par continuité de la fonction sinus, il existe une suite d'éléments de  $S$  de limite  $\sin \theta$ . Au final,

$$\overline{S} = [-1; 1]$$

(d) Introduisons  $(v_p) = (p)$  de limite  $+\infty$ . La partie  $E$  est dense dans  $\mathbb{R}$  et l'image de celle-ci par la fonction  $f: x \mapsto x - [x]$  est  $F = \{u_n - [u_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Cette partie est incluse dans le fermé  $[0; 1]$  et donc  $\overline{F}$  aussi.

Inversement, tout élément de  $]0; 1[$  est limite d'une suite d'éléments de  $E$ . Les termes de cette suite appartiennent à  $]0; 1[$  à partir d'un certain rang et sont donc invariants par  $f$  : ils appartiennent à  $F$ . Ainsi

$$]0; 1[ \subset \overline{F}$$



Enfin,  $\overline{F}$  étant une partie fermée, on a aussi

$$[0; 1] \subset \overline{F}$$

puis l'égalité.

(e) L'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est

$$\text{Adh}(u) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n \mid n \geq N\}}$$

Par l'étude qui précède

$$\overline{\{u_n \mid n \geq N\}} = [0; 1]$$

et l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $u$  est exactement <sup>1</sup>  $[0; 1]$ .

**Exercice 60 :** [énoncé]

Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(Q_n)$  de fonctions polynomiales telles  $N_\infty(Q_n - f) \rightarrow 0$ .

On a alors

$$\int_a^b Q_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt = 0$$

Posons

$$P_n(t) = Q_n(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b Q_n(t) dt$$

On vérifie alors sans peine que

$$\int_a^b P_n(t) dt = 0 \text{ et } N_\infty(f - P_n) \rightarrow 0$$

**Exercice 61 :** [énoncé]

Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(Q_n)$  de fonctions polynomiales telles  $N_\infty(Q_n - f) \rightarrow 0$ . Posons  $m_n = \inf_{t \in [a; b]} Q_n(t) = Q_n(t_n)$  pour un certain  $t_n \in [a; b]$ . Montrons que  $m_n \rightarrow m = \inf_{t \in [a; b]} f$ . Notons que  $\inf_{t \in [a; b]} f = f(t_\infty)$  pour un certain  $t_\infty \in [a; b]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour  $n$  assez grand,  $N_\infty(Q_n - f) \leq \varepsilon$  donc  $m_n = Q_n(t_n) \geq f(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$  et  $m = f(t_\infty) \geq Q_n(t_\infty) - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon$  donc  $|m_n - m| \leq \varepsilon$ . Ainsi  $m_n \rightarrow m$ . Il suffit ensuite de considérer  $P_n = Q_n - m_n + m$  pour obtenir une solution au problème posé.

1. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite n'est pas immédiatement l'adhérence de l'ensemble de ses termes, par exemple, pour  $u_n = n$ , la suite  $(u_n)$  n'a pas de valeurs d'adhérence!

**Exercice 62 :** [énoncé]

Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(Q_n)$  de fonctions polynomiales telle  $N_\infty(Q_n - f') \rightarrow 0$ .

Posons alors  $P_n(x) = f(a) + \int_a^x Q_n(t) dt$ . L'inégalité

$|P_n(x) - f(x)| \leq \int_a^x |f'(t) - Q_n'(t)| dt$  permet d'établir que  $N_\infty(f - P_n) \rightarrow 0$  et puisque  $P_n' = Q_n$ , la suite  $(P_n)$  est solution du problème posé.

**Exercice 63 :** [énoncé]

(a) On a

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = (x + (1-x))^n = 1$$

On a

$$\sum_{k=0}^n k B_{n,k}(x) = nx$$

via  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  et la relation précédente

De manière semblable

$$\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n k B_{n,k}(x) = nx(1 + (n-1)x)$$

(b) On a

$$n^2 \alpha^2 \sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in A} (k - nx)^2 B_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} (k - nx)^2 B_{n,k}(x)$$

car les  $B_{n,k}$  sont positifs sur  $[0; 1]$ .

Par suite

$$n^2 \alpha^2 \sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq nx(1-x)$$

d'où

$$\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

(c) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , par l'uniforme continuité de  $f$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x, y \in [0; 1], |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

On a alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{x \in A} |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) + \sum_{x \in B} |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x)$$

donc

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2 \|f\|_\infty \sum_{x \in A} B_{n,k}(x) + \sum_{x \in B} \varepsilon B_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \varepsilon$$

Pour  $n$  assez grand, on a

$$\|f\|_\infty / 2n\alpha^2 \leq \varepsilon$$

et donc  $|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$  uniformément en  $x$ .

**Exercice 64 :** [énoncé]

(a) On a

$$\int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{1}{2(n+1)}$$

On en déduit

$$a_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq 2 \int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

(b) Sur  $[\alpha; 1]$ ,

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{(1-\alpha^2)^n}{a_n} \leq (n+1)(1-\alpha^2)^n \rightarrow 0$$

(c) Sur le compact  $[-1; 1]$ ,  $f$  est uniformément continue car  $f$  est continue.

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in [-1; 1], |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Pour  $\alpha' = \min(\alpha, 1/2)$ , on a pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $|x - y| \leq \alpha'$

Si  $x, y \in [-1; 1]$  alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Sinon  $x, y \in [1/2; +\infty[$  ou  $x, y \in ]-\infty; -1/2]$  et alors

$$|f(x) - f(y)| = 0 \leq \varepsilon$$

(d) On a

$$f_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(u)\varphi_n(x-u) du$$

Or

$$\varphi_n(x-u) = \sum_{k=0}^{2n} a_k(u)x^k$$

donc

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \left( \int_{x-1}^{x+1} f(u)a_k(u) du \right) x^k$$

Mais

$$\int_{x-1}^{x+1} f(u)a_k(u) du = \int_{-1/2}^{1/2} f(u)a_k(u) du$$

pour  $x \in [-1/2; 1/2]$  car  $x-1 \leq -1/2$  et  $x+1 \geq 1/2$  alors que  $f$  est nulle en dehors que  $[-1/2; 1/2]$ . Il s'ensuit que  $f_n$  est polynomiale.

(e) On observe que

$$\int_{-1}^1 \varphi_n(t) dt = 1$$

et la relation proposée est alors immédiate sur  $[-1/2; 1/2]$ .

(f) On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

et alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x) - f(x-t)| \varphi_n(t) dt + 4 \|f\|_\infty \int_{\alpha}^1 \varphi_n(t) dt \leq \varepsilon + 4 \|f\|_\infty \int_{\alpha}^1 \varphi_n(t) dt$$

Or

$$\int_{\alpha}^1 \varphi_n(t) dt \rightarrow 0$$

donc pour  $n$  assez grand

$$4 \|f\|_\infty \int_{\alpha}^1 \varphi_n(t) dt \leq \varepsilon$$

et alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

(g) Il suffit de commencer par approcher la fonction  $x \mapsto f(2ax)$  qui vérifie les conditions de la question précédente.

(h) Soit  $A > 0$  tel que  $[a; b] \subset [-A; A]$ . Il suffit de prolonger  $f$  par continuité de sorte qu'elle soit nulle en dehors de  $[-A; A]$ .

**Exercice 65 :** [énoncé]

- (a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ .

$$0 \leq \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f - P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f - P) \leq (b - a) \|f\|_\infty \varepsilon$$

En faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient  $\int_a^b f^2 = 0$  et donc  $f = 0$ .

- (b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties,

$$(n + 1)I_n = (1 - i)I_{n+1}$$

Or  $I_0 = \frac{1+i}{2}$  donc

$$I_n = \frac{(1 + i)^{n+1}}{2^{n+1}} n!$$

- (c)  $I_{4p+3} \in \mathbb{R}$  donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4p+3} \sin(x) e^{-x} dx = 0$$

puis

$$\int_0^{+\infty} u^p \sin(u^{1/4}) e^{-u^{1/4}} du = 0$$

pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 66 : [énoncé]**

- (a) Supposons  $f$  constante égale à  $C$ .

$$\int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx = C \int_a^b |\sin(nx)| dx$$

Posons  $p = \lfloor \frac{an}{\pi} \rfloor + 1$  et  $q = \lfloor \frac{bn}{\pi} \rfloor$ .

$$\int_a^b |\sin(nx)| dx = \int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| dx + \sum_{k=p+1}^q \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin(nx)| dx + \int_{\frac{q\pi}{n}}^b |\sin(nx)| dx$$

On a

$$\left| \int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| dx \right| \leq \frac{\pi}{n}$$

donc

$$\int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| dx \rightarrow 0$$

et aussi

$$\int_{\frac{q\pi}{n}}^b |\sin(nx)| dx \rightarrow 0$$

De plus

$$\sum_{k=p+1}^q \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin(nx)| dx = \frac{(q-p)}{n} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2(q-p)}{n} \rightarrow \frac{2(b-a)}{\pi}$$

Ainsi

$$\int_a^b |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi} (b-a)$$

puis

$$\int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx$$

- (b) Supposons  $f$  en escalier. Soit  $a_0, \dots, a_n$  une subdivision adaptée à  $f$ . Par l'étude qui précède,

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f$$

Puis en sommant par la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_a^b f$$

- (c) Supposons enfin  $f$  continue par morceaux. Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi$  en escalier vérifiant

$$\|f - \varphi\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Puisque

$$\int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi$$

pour  $n$  assez grand, on a

$$\left| \int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi \right| \leq \varepsilon$$

Or

$$\left| \int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| dx - \int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx \right| \leq \varepsilon$$

et

$$\left| \int_a^b \varphi - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left| \int_a^b f(x) |\sin(nx)| \, dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b f \right| \leq 2\varepsilon + \frac{2}{\pi} \varepsilon$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x) |\sin(nx)| \, dx \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_a^b f$$