Suites numériques

Convergence de suites

Exercice 1 [02249] [Correction]
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} n\in\mathbb{N}, u_n\leq a \text{ et } v_n\leq b \\ u_n+v_n\to a+b. \end{cases}$$

Montrer que $u_n\to a$ et $v_n\to b$.

Exercice 2 [02250] [Correction]
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (u_n+v_n) et (u_n-v_n) convergent. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 3 [02251] [Correction]
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\max(u_n,v_n).$$

Exercice 4 [02252] [Correction]
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$u_n^2+u_nv_n+v_n^2\to 0.$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 5 [02253] [Correction]
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$0\leq u_n\leq 1, 0\leq v_n\leq 1 \text{ et } u_nv_n\to 1.$$

Que dire de ces suites ?

Exercice 6 [03497] [Correction]
Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\to 0.$$

Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 7 [03184] [Correction]
Soient K un réel strictement supérieur à 1 et (ε_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit (u_n) une suite de réels de $[0\,;1]$ vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq u_{n+1}\leq\frac{u_n+\varepsilon_n}{K}.$$

La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ?

Calcul de limites

Exercice 8 [02254] [Correction]
Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

(a) $u_n=\frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$

(b) $u_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$

(c) $u_n=\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}$

(d) $u_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k$

Exercice 9 [02255] [Correction]
Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(b) $u_n=\sqrt[n]{n^2}$

(c) $u_n=\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

(d) $u_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

Exercice 10 [02256] [Correction]
Déterminer par comparaison, la limite des suites (u_n) suivantes :

(a) $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$
(b) $u_n = \frac{n!}{n^n}$
(c) $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$
(d) $u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}$
(e) $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

Exercice 11 [02257] [Correction]
Déterminer les limites des sommes suivantes :

(a) $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$
(b) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
(c) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$
(d) $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$
(e) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$
(f) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
(g) $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k!$

Exercice 12 [02258] [Correction]
Comparer

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m, \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 13 [02260] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

(a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
(b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
(c) Observer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 14 [02261] [Correction]
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(a) Établir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \le \frac{1}{p} \le \int_{p-1}^p \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

En déduire la limite de (S_n).
(b) Établir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

Exercice 15 [02263] [Correction]
Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}.$$

Exercice 16 [02264] [Correction]
Soit $p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \binom{n+p}{n}^{-1} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

(a) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}.$$

(b) Montrer par récurrence

$$S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1}).$$

(c) On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.
(d) En déduire $\lim S_n$ en fonction de p.

Exercice 17 [03039] [Correction]
Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Existence et calcul de

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^n \left(1+z^{2^k}\right).$$

Exercice 18 [03196] [Correction]
Étudier la convergence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{u_n}+\mathrm{e}^{v_n}\right)=2.$$

Exercice 19 [02262] [Correction]
Soit $a\in\mathbb{R}$ et pour $n\in\mathbb{N}$,

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}.$$

Montrer que

$$\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n=\frac{1}{2^n}\sin(a)$$

et déterminer $\lim_{n\to\infty}P_n$.

Exercice 20 [00298] [Correction]
Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n=\sqrt[n]{n}$

(b) $u_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

(c) $u_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

(d) $u_n=n^2\left(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n+1}\right)$

(e) $u_n=\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{n}\right)\right)^n$

(f) $u_n=\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$

(g) $u_n=\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{4}}{3}\right)^n$

(h) $u_n=\left(\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n}\right)^{n^2}$

Exercice 21 [00302] [Correction]
Nature de la suite de terme général

$$u_n=\cos(\pi n^2\ln(1-1/n)).$$

Exercice 22 [02781] [Correction]
Étudier la convergence de la suite $\left(\lfloor a^n\rfloor^{1/n}\right)$, où $a>0$.

Exercice 23 [00304] [Correction]
Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que $u_n\to+\infty$.

Exercice 24 [00320] [Correction]
Soient $\alpha>0$ et

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha+k^\alpha}.$$

(a) Montrer que si $\alpha>1$ alors $u_n\to 0$ tandis que si $\alpha<1$, $u_n\to+\infty$.

(b) Montrer que si $\alpha=1$, la suite est monotone et convergente.

(c) Toujours dans le cas $\alpha=1$ et en exploitant l'encadrement $\ln(1+x)\le x\le-\ln(1-x)$ valable pour tout $x\in[0\,;1[$, établir $u_n\to\ln 2$.

Exercice 25 [00321] [Correction]

(a) Établir que pour tout $x\ge 0$ on a

$$x-\frac{1}{2}x^2\le\ln(1+x)\le x.$$

(b) En déduire la limite de

$$u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 26 [00319] [Correction]

(a) Soit

$$u_n=\sum_{k=1}^{np}\frac{1}{n+k}$$

où $p\in\mathbb{N}^*$ est fixé. Montrer que la suite (u_n) converge. Sa limite sera notée ℓ (on ne demande pas ici de la calculer)

(b) Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0)=0$. Soit

$$v_n=\sum_{k=1}^{np}f\left(\frac{1}{n+k}\right).$$

Montrer que (v_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de ℓ.

(c) Calculer ℓ en utilisant $f(x)=\ln(1+x)$.

(d) Si f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ est continue et vérifie $f(0)=0$, montrer qu'il peut y avoir divergence de la suite (v_n).

Limites des suites monotones

Exercice 27 [02265] [Correction]
Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

(a) Montrer que (v_n) est croissante.
(b) Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
(c) En déduire que $v_n \to \ell$.

Exercice 28 [02266] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle convergente. Étudier la limite de la suite $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$.

Exercice 29 [02268] [Correction]
(Somme harmonique) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 30 [02270] [Correction]
On pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}.$$

(a) Exprimer u_n à l'aide de nombres factoriels.
(b) Montrer que la suite (u_n) converge.
(c) On pose

$$v_n = (n+1)u_n^2.$$

Montrer que la suite (v_n) converge. En déduire la limite de la suite (u_n)

(d) Simplifier

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

et comparer ce produit à $2u_n^2$.
(e) En déduire que la limite C de la suite (v_n) est strictement positive.

Exercice 31 [00300] [Correction]
Soient $a > 0$ et

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n).$$

(a) Montrer que si $a \geq 1$ alors $u_n \to +\infty$.
(b) On suppose $0 < a < 1$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On pourra exploiter la majoration $1 + x \leq e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Suites adjacentes

Exercice 32 [02271] [Correction]
Soient $\theta \in \left]0\,;\pi/2\right[$ et

$$u_n = 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}, v_n = 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 33 [00325] [Correction]
On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 34 [02272] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } S'_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.
On peut montrer que leur limite commune est $\pi^2/6$, mais c'est une autre histoire...

Exercice 35 [02275] [Correction]
(Moyenne arithmético-géométrique)

(a) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir :

$$2\sqrt{ab} \leq a + b.$$

(b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

(c) Établir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.

(d) Calculer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$ pour $a \in \mathbb{R}_+$.

(e) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 36 [00324] [Correction]
(Irrationalité de e*)* On pose pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

(a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) En exploitant l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, montrer que $u_n \to \mathrm{e}$.

(c) On suppose que $\mathrm{e} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. En considérant $q.q!u_q$ et $q.q!v_q$ obtenir une absurdité.

Suites extraites

Exercice 37 [02276] [Correction]
On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 38 [02278] [Correction]
Justifier que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

Exercice 39 [00327] [Correction]
Montrer que la suite de terme général $\sin(n)$ diverge.

Exercice 40 [02279] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que (u_n) tend vers 0.

Limite de suites de solutions d'une équation

Exercice 41 [02290] [Correction]
Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$.

(a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.

(b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 42 [02288] [Correction]
Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
Étudier la limite de (x_n).

Exercice 43 [02291] [Correction]
Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geq 1$.

(b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.

Exercice 44 [00314] [Correction]
Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

possède une unique racine x_n dans $]0\,;+\infty[$. Déterminer $\lim x_n$.

Exercice 45 [00315] [Correction]
Montrer que la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ définit une suite positive (u_n) unique.
Étudier sa convergence et préciser sa limite.

Expression du terme général d'une suite récurrente

Exercice 46 [02293] [Correction]
Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

(a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$

(b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$.

Exercice 47 [02294] [Correction]
Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + \mathrm{i}.y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 48 [02295] [Correction]
Soit (z_n) une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\overline{z}_n).$$

Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Exercice 49 [02296] [Correction]
Soit (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

(a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.

(b) Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

(c) Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 50 [03048] [Correction]
Étudier la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Exercice 51 [02056] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)u_n.$$

Donner l'expression du terme général u_n de cette suite.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 52 [02298] [Correction]
Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4\mathrm{i}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2\mathrm{i})u_{n+1} - (5 - 5\mathrm{i})u_n.$$

Exercice 53 [02299] [Correction]
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes :

(a) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

(b) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

(c) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 54 [02300] [Correction]
Soit $\theta \in]0\,;\pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos\theta u_{n+1} + u_n = 0.$$

Exercice 55 [02683] [Correction]
Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x).$$

Étude de suites récurrentes

Exercice 56 [02304] [Correction]
Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2.$$

Exercice 57 [02305] [Correction]
Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

Exercice 58 [02303] [Correction]
Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Exercice 59 [02307] [Correction]
Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1.$$

Exercice 60 [02308] [Correction]
Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}.$$

Exercice 61 [02309] [Correction]
Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-2\,;2] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

(a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-2\,;2].$$

(b) Quelles sont les limites finies possibles pour (u_n) ?

(c) Montrer que $\bigl(|u_n - 1|\bigr)$ converge puis que $\lim |u_n - 1| = 0$. En déduire $\lim u_n$.

Exercice 62 [02310] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}.$$

Montrer que (u_n) est bien définie et $|u_n| < 1$. Étudier la limite de (u_n).

Exercice 63 [02312] [Correction]
Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

(a) Étudier la convergence de la suite (u_n).

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.

(c) Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a

$$\bigl|u_n - \sqrt{a}\bigr| \le 2u_0.v_0^{2^n}.$$

Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On peut alors par des calculs élémentaires, déterminer une approximation de $\sqrt{a}$.

Exercice 64 [02313] [Correction]
On considère l'équation $\ln x + x = 0$ d'inconnue $x > 0$.

(a) Montrer que l'équation possède une unique solution α.

(b) Former, par l'algorithme de Newton, une suite récurrente réelle (u_n) convergeant vers α.

Exercice 65 [02311] [Correction]
Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a > 0, u_1 = b > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2.$$

À quelle condition (u_n) converge ?

Exercice 66 [02301] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une suite (u_n) par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

(a) Déterminer la limite de (u_n).

(b) Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 67 [03229] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1/2\,;1].$$

Soit (v_n) la suite déterminée par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n}.$$

Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 68 [00328] [Correction]
Étudier la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2.$$

Exercice 69 [00330] [Correction]
Soient $a > 0$,

$$u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, u_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, .$$

Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 70 [00331] [Correction]
Soit

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 1}{3}$$

et (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Justifier que l'équation $f(x) = x$ possède trois racines réelles (qu'on n'exprimera pas).

(b) Étudier le signe de $f(x) - x$ ainsi que la monotonie de f.

(c) Préciser le comportement de (u_n) en discutant selon la valeur de u_0.

Exercice 71 [00332] [Correction]
Soient

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$$

(avec $a > 0$) et (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Étudier les variations de f, le signe de $f(x) - x$ et en déduire le comportement de (u_n).

Exercice 72 [00333] [Correction]
Soient $u_0 \in \,]0\,;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Montrer que (u_n) est monotone de limite nulle. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \text{ et } \prod_{k=0}^{n} (1 - u_k).$$

Exercice 73 [00329] [Correction]
Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in]0\,;4[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - u_n^2.$$

(a) Montrer que (u_n) est bornée. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?

(b) Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) est soit stationnaire égale à 0, soit stationnaire égale à 3.

(c) En posant $u_0 = 4\sin^2\alpha$, déterminer les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire.

Exercice 74 [00336] [Correction]
Soient $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in]-\pi\,;\pi]$.
On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$z_0 = \rho e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

(a) Exprimer z_n à l'aide d'un produit.

(b) Déterminer la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 75 [00337] [Correction]
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites récurrentes réelles définies par :

$$u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

Exercice 76 [00326] [Correction]
Pour $\alpha \in]0\,;\pi/2]$, on étudie les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = \cos\alpha \\ v_0 = 1 \end{cases} \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}. \end{cases}$$

(a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n \cos\frac{\alpha}{2^n} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\alpha}{2^k}.$$

(b) Étudier $\sin\frac{\alpha}{2^n} v_n$ et en déduire les limites de (u_n) et (v_n).

Exercice 77 [02783] [Correction]
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout $n > 0$,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}.$$

(a) Ici $x_n = a$ pour tout n, où $a > 0$. Étudier la convergence de (y_n).

(b) Même question dans le cas où $x_n = ab^{2^n}$ pour tout n, avec $b > 0$.

(c) Montrer que (y_n) converge si, et seulement si, la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Exercice 78 [03165] [Correction]
Soient (a_n) une suite réelle positive, bornée et (u_n) la suite récurrente définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge.

Exercice 79 [00844] [Correction]
Montrer que la suite réelle (x_n) définie par $x_0 \in [a\,;b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(f(x_n) + x_n\big)$$

où f est 1-lipschitzienne de $[a\,;b]$ dans $[a\,;b]$, converge vers un point fixe de f.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On a l'encadrement

$$0 \leq a - u_n \leq (a - u_n) + (b - v_n) = (a + b) - (u_n + v_n) \to 0$$

donc $u_n \to a$ puis

$$v_n = (u_n + v_n) - u_n \to (a + b) - a = b.$$

Exercice 2 : [énoncé]
Supposons $u_n + v_n \to \ell$ et $u_n - v_n \to \ell'$.
$u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) + \frac{1}{2}(u_n - v_n) \to \frac{\ell+\ell'}{2}$ et de même $v_n \to \frac{\ell-\ell'}{2}$.

Exercice 3 : [énoncé]
On a

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}\big((a + b) + |a - b|\big)$$

donc

$$\max(u_n, v_n) = \frac{1}{2}\big((u_n + v_n) + |u_n - v_n|\big) \to \max(\lim u_n, \lim v_n).$$

Exercice 4 : [énoncé]
On a

$$0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 \leq 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \to 0.$$

Ainsi $u_n + v_n \to 0$ puis

$$u_n v_n = (u_n + v_n)^2 - (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \to 0$$

et donc

$$u_n^2 + v_n^2 = 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) - (u_n + v_n)^2 \to 0$$

qui permet de conclure $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.

Exercice 5 : [énoncé]
On a

$$u_n v_n \leq u_n, v_n \leq 1.$$

Par le théorème d'encadrement on obtient

$$\lim u_n = \lim v_n = 1.$$

Exercice 6 : [énoncé]
Puisque $|u_{n+1}/u_n| \to 0 < 1/2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N, |u_{n+1}/u_n| \leq 1/2$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq N, |u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|.$$

On a alors par récurrence

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-N}}|u_N|$$

et donc par comparaison $u_n \to 0$.

Exercice 7 : [énoncé]
Montrons que la suite (u_n) converge vers 0 par l'epsilontique...
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (ε_n) converge vers 0, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$\forall n \geq N, 0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$$

et alors pour tout $n \geq N$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon}{K}.$$

On en déduit

$$0 \leq u_{n+2} \leq \frac{u_n}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K}$$

et par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\varepsilon}{K^i}.$$

La suite (u_n) est majorée par 1 et on peut encore écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K}\frac{1 - (1/K)^p}{1 - 1/K} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K - 1}.$$

Pour p assez grand, on a $1/K^p \leq \varepsilon$ et alors

$$0 \leq u_{n+p} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{K - 1} = \lambda\varepsilon$$

avec λ une constante strictement positive ce qui permet de conclure.

Exercice 8 : [énoncé]

(a)
$$u_n = \frac{1-(-2/3)^n}{1+(-2/3)^n} \to 1.$$

(b)
$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to 1.$$

(c)
$$u_n = \frac{1-\sqrt{1+1/n^2}}{1+\sqrt{1-1/n^2}} \to 0.$$

(d)
$$u_n = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}.$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) $u_n = \mathrm{e}^{n(\ln(1+1/n))}$ or $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
Par suite $u_n \to \mathrm{e}$.

(b) $u_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln n} \to 1$ car $\frac{\ln n}{n} \to 0$.

(c) $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(\sin\frac{1}{n})}$ or $\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \to 0$ donc $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} \to 1$.

(d) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{2}{n+1})}$ or $n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \sim -2 \to -2$ donc $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \to \mathrm{e}^{-2}$.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) $|u_n| \le \frac{1}{n-1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

(b) $0 \le u_n \le \frac{1.2\ldots n}{n.n\ldots n} \le \frac{1}{n} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

(c) $\frac{n-1}{n+1} \le u_n \le \frac{n+1}{n-1}$ avec $\frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1} \to 1$ donc $u_n \to 1$.

(d) Pour $n \ge 3$, $0 \le u_n \le \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n \to 0$ donc $u_n \to 0$.

(e) $1 \le u_n \le \sqrt[n]{3} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 3} \to 1$ donc $u_n \to 1$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $S_n \ge \sum_{k=1}^n 1 = n \to +\infty$

(b) $S_n \ge \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$.

(c) $0 \le S_n \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

(d) $0 \le S_n \le \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{n}{(n+1)^2} \to 0$.

(e) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} \le S_n \le \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1}$ donc $\frac{n}{n+1} \le S_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$ puis $u_n \to 1$.

(f) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le S_n \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ par le théorème des gendarmes : $S_n \to 1$.

(g) $S_n = n! - (n-1)! + (n-2)! + \cdots + (-1)^n$. Par regroupement de termes.
Si n est pair alors $S_n \ge n! - (n-1)!$ et si n est impair $S_n \ge n! - (n-1)! - 1$.
Puisque $n! - (n-1)! = (n-1).(n-1)! \to +\infty$, on a $S_n \to +\infty$.

Exercice 12 : [énoncé]

$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 1^m$ et $\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 1$.

$\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 0$.

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n})} \to \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Soit $\rho = \frac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$.
Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < \rho$, il existe un rang N au delà duquel
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \rho.$$
On a alors
$$0 \le u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_{N+1}}{u_N}u_N \le \rho^{n-N}u_N \to 0$$
donc $u_n \to 0$.
On peut aussi raisonner en observant que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, donc convergente et que sa seule limite possible est nulle.

(b) Même démarche mais par minoration ou par croissance.

(c) $u_n = n$, $u_n = 1$ et $u_n = 1/n$ sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

Exercice 14 : [énoncé]

(a) On a

$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{p} = \frac{1}{p}$$

car la fonction décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$ est majorée par $\frac{1}{p}$ sur $[p\,;p+1]$.
Par un argument semblable

$$\int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x} \geq \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{p} = \frac{1}{p}.$$

Pour $n \geq 1$,

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

donne en sommant

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq S_n \leq \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Or

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln \frac{2n+1}{n+1} \to \ln 2$$

et

$$\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 2$$

donc $S_n \to \ln 2$.

(b) On a

$$S'_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

donc

$$S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = S_n.$$

Par suite $S'_{2n} \to \ln 2$. De plus $S'_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2$ donc

$$S'_n \to \ln 2.$$

Exercice 15 : [énoncé]

On a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} + \frac{1}{n} + 1.$$

Or pour $k \in \{2, \dots, n-2\}$,

$$\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \to 0$$

puis $u_n \to 2$.

Exercice 16 : [énoncé]

(a)

$$\binom{n+p+2}{n+2} = \frac{n+p+2}{n+2}\binom{n+p+1}{n+1}$$

d'où la relation.

(b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 1$:

$$S_1 = \frac{1}{\binom{p+1}{1}} \text{ et } \frac{1}{p-1}\left(1 - (p+2)\frac{2}{(p+2)(p+1)}\right) = \frac{1}{p+1}$$

ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \underset{HR}{=} \frac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \frac{1}{p-1}(1 - (n+2)u_{n+1}) = \frac{1}{p-1}$$

Récurrence établie.

(c)

$$0 \leq v_n = \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} = \frac{n!p!}{(n+p-1)!} \leq \frac{p!}{n+1} \to 0.$$

(d) Par opérations

$$S_n \to \frac{1}{p-1}.$$

Exercice 17 : [énoncé]
On a
$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=(1-z)(1+z)(1+z^2)\dots(1+z^{2^n}).$$
Or $(1-z)(1+z)=1-z^2$ donc
$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=(1-z^2)(1+z^2)\dots(1+z^{2^n}).$$
En répétant la manipulation
$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=(1-z^{2^{n+1}}).$$
Or $z^{2^{n+1}}\to 0$ donc
$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=\frac{1}{1-z}.$$

Exercice 18 : [énoncé]
Exploitons
$$S_n=\mathrm{e}^{u_n}+\mathrm{e}^{v_n}\to 2 \text{ et } P_n=\mathrm{e}^{u_n}.\mathrm{e}^{v_n}=\mathrm{e}^{u_n+v_n}\to 1.$$
Les nombres e^{u_n} et e^{v_n} sont solutions de l'équation
$$(X-\mathrm{e}^{u_n})(X-\mathrm{e}^{v_n})=0 \; i.e. X^2-S_nX+P_n=0.$$
À l'ordre près, on peut exprimer e^{u_n} et e^{v_n} à partir du discriminant de cette équation. Or $S_n\to 2$ et $P_n\to 1$, le discriminant tend alors vers 0 et les deux suites tendent vers 1. On en déduit $u_n\to 0$ puis $v_n\to 0$.

Exercice 19 : [énoncé]
En exploitant la formule $\sin(2x)=2\sin x\cos x$
$$\sin\frac{a}{2^n}P_n=\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^{n-1}}\cos\frac{a}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{a}{2}=\ldots=\frac{1}{2^n}\sin(a).$$
Si $a=0$ alors $P_n=1\to 1$.
Si $a\neq 0$ alors, pour n assez grand, $\sin(a/2^n)\neq 0$ et
$$P_n=\frac{\sin(a)}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}.$$
Puisque
$$\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(x)-\sin 0}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{}\cos(0)=1$$
on a
$$\frac{\sin a/2^n}{a/2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$
puis
$$P_n=\frac{\sin(a)}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\sin(a)}{a}$$
car
$$2^n\sin\frac{a}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}2^n\frac{a}{2^n}=a.$$

Exercice 20 : [énoncé]
(a) $u_n=\exp(\ln n/n)\to 1$.
(b)
$$u_n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=\exp\bigl(x+\mathrm{o}(1)\bigr)\to\mathrm{e}^x.$$
(c)
$$u_n=\exp\left((n+2)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\right)=\exp(-2+\mathrm{o}(1))\to\mathrm{e}^{-2}.$$
(d)
$$u_n=-2n^2\sin\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)/2\right)\sin\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)/2\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\to 0.$$
(e)
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{n}\right)=1+\frac{2\alpha}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc
$$u_n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{2\alpha}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=\exp(2\alpha+\mathrm{o}(1))\to\mathrm{e}^{2\alpha}.$$
(f)
$$u_n=\left(1+\frac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^{n\ln n}\to\mathrm{e}.$$

(g)
$$\sqrt[n]{2} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln 2\right) = 1 + \frac{1}{n}\ln 2 + \mathrm{o}(1).$$
$$u_n = \left(1 + \frac{\ln 24}{3n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to \sqrt[3]{24}.$$

(h) Par le théorème des accroissements finis
$$\ln\bigl(\arctan(n+1)\bigr) - \ln(\arctan n) = \frac{1}{1+c^2}\frac{1}{\arctan c}$$
avec $n \leq c \leq n+1$ donc
$$u_n = \exp\left(n^2 \frac{1}{1+c^2}\frac{1}{\arctan c}\right) \to \mathrm{e}^{2/\pi}.$$

Exercice 21 : [énoncé]
En développant $\ln(1-1/n)$
$$u_n = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)\right) = (-1)^{n+1}\sin(\mathrm{o}(1)) \to 0.$$

Exercice 22 : [énoncé]
Si $a \in \left]0\,;1\right[$, la suite est constante égale à 0.
Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1.
Si $a > 1$ alors $a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n$ donne $\left(a^n - 1\right)^{1/n} < \lfloor a^n \rfloor^{1/n} \leq a$ et donc, par encadrement, la suite converge vers a.

Exercice 23 : [énoncé]
$\forall A \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n < A\}$ est fini car il contient au plus $E(A)+1$ éléments.
Par suite il possède un plus grand élément N et alors $\forall n \geq N+1, u_n \notin E$ donc $u_n \geq A$. Ainsi $u_n \to +\infty$.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Si $\alpha > 1$ alors $0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^\alpha + 1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.
Si $\alpha < 1$ alors $u_n \geq \frac{n}{n^\alpha + n^\alpha} = \frac{1}{2}n^{1-\alpha} \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$.

(b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > 0$ donc (u_n) est croissante. De plus $u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ donc (u_n) est majorée et par conséquent convergente.

(c)
$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq -\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\right) = -\ln\frac{n}{2n} = \ln 2$$
et
$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right) = \ln\frac{2n+1}{n+1} \to \ln 2$$
donc $u_n \to \ln 2$.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Il suffit de dresser le tableau de variation des fonctions $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ et $x \mapsto x - \ln(1+x)$.

(b)
$$\ln u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}$$
et
$$\ln u_n \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4}\right) = \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{2}$$
donc
$$u_n \to \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Exercice 26 : [énoncé]

(a) La suite (u_n) est croissante car
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(p+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(p+1)} - \frac{1}{n+1} \geq 0$$
et $u_n \leq \frac{np}{n+1} \leq p$ donc (u_n) converge vers une limite ℓ.

(b) Commençons par le cas où $f'(0) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0\,;\alpha]$ on ait $\left|f'(x)\right| \leq \varepsilon$ et par l'inégalité des accroissements finis, on obtient
$$\forall x \in [0\,;\alpha], \left|f(x)\right| \leq \varepsilon\,|x|\,.$$

On a alors
$$|v_n| = \sum_{k=1}^{np} \frac{\varepsilon}{n+k} \leq p\varepsilon$$
et donc $v_n \to 0$.
Pour le cas général, il suffit d'introduire $g(x) = f(x) - xf'(0)$. Puisque $g'(0) = 0$, on a
$$\sum_{k=1}^{np} g\left(\frac{1}{n+k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et donc
$$v_n - u_n f'(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et finalement $v_n \to \ell f'(0)$.

(c) Pour $f(x) = \ln(1+x)$,
$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) = \ln(n(p+1)+1) - \ln(n+1) \to \ln(p+1).$$
On conclut $\ell = \ln(p+1)$.

(d) Pour $f(x) = \sqrt{x}$,
$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{np}{\sqrt{(n+1)p}} \to +\infty.$$

Exercice 27 : [énoncé]

(a)
$$v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} \geq 0$$
donc (v_n) est croissante.

(b)
$$v_{2n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}.$$

(c) On a $v_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et (v_n) croissante donc (v_n) converge vers un réel $\ell' \leq \ell$.
La relation précédente, passée à la limite, donne $2\ell' \geq \ell + \ell'$ ce qui permet de conclure $v_n \to \ell$.

Exercice 28 : [énoncé]
(u_n) converge donc (u_n) est bornée. La suite (v_n) est donc bien définie et elle-même bornée.
On a $v_{n+1} \leq v_n$ donc (v_n) est décroissante et donc converge.
Posons $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$.
$v_n \geq u_n$ donc à la limite $\ell' \geq \ell$.
Si $\ell' > \ell$ alors $\ell' > \frac{\ell'+\ell}{2} > \ell$.
À partir d'un certain rang $v_n > \frac{\ell+\ell'}{2}$ et $u_n < \frac{\ell+\ell'}{2}$. Impossible. Il reste $\ell' = \ell$.

Exercice 29 : [énoncé]
On a
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$
(H_n) est croissante car $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$.
Si (H_n) converge vers ℓ alors $H_{2n} - H_n \to \ell - \ell = 0$. Ceci est impossible puisque $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
Par suite (H_n) diverge, et puisque (H_n) est croissante, (H_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a)
$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(b) On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$$
donc (u_n) est décroissante. Or (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) converge.

(c)
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1}\frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2$$
or $(n+2)(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 = -3n - 2 < 0$ donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
(v_n) est décroissante et minorée par 0 donc (v_n) converge.
Nécessairement $\lim u_n = 0$ car sinon $v_n = (n+1)u_n^2 \to +\infty$.

(d) Par télescopage des facteurs
$$\prod_{k=2}^{2n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Parallèlement

$$u_n^2 = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Ainsi, $2u_n^2$ est supérieur au produit.

(e) On en déduit

$$(n+1)u_n^2 \geq \frac{(n+1)}{4n}$$

et donc $C \geq 1/4$.
On peut montrer que $C = 1/\pi$ en exploitant dès la première question la formule de Stirling (si celle-ci est connue...).

Exercice 31 : [énoncé]

(a) Si $a \geq 1$ alors $u_n \geq 2^n \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$.

(b) $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc (u_n) est croissante. De plus

$$u_n \leq \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{a^2} \dots \mathrm{e}^{a^n} = \exp\left(a\frac{1-a^n}{1-a}\right) \leq \exp\left(\frac{a}{1-a}\right)$$

donc (u_n) est majorée et par suite convergente.

Exercice 32 : [énoncé]
Via $\sin 2a = 2\sin a\cos a$, on obtient

$$u_n = 2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} \leq u_{n+1}.$$

Via $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$, on obtient

$$v_n = 2^{n+1}\frac{\tan(\theta/2^{n+1})}{1-\tan^2(\theta/2^{n+1})} \geq v_{n+1}$$

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u_n \to \theta$ et $v_n \to \theta$ d'où $v_n - u_n \to 0$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes de limite commune égale à θ.

Exercice 33 : [énoncé]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 0.$$

De même $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et aisément $v_n - u_n \to 0$ d'où l'adjacence de ces deux suites.
Notons ℓ leur limite commune, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + \mathrm{o}(1) = 2\sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}.$$

Exercice 34 : [énoncé]
On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

$$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \leq 0$$

et

$$S'_n - S_n = \frac{1}{n} \to 0.$$

Exercice 35 : [énoncé]

(a) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ donne l'inégalité demandée.

(b) Pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = v_n$ en vertu de a.
$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq \frac{2v_n}{2} = v_n$.

(c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ.
La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante est minorée par u_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ'.
En passant la relation $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ à la limite, on obtient $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$ d'où $\ell = \ell'$.

(d) Si $b = a$ alors les deux suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à a et donc $M(a,a) = a$.
Si $b = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante égale à 0 et donc $M(a,0) = 0$.

(e) Notons (u'_n) et (v'_n) les suites définies par le procédé précédent à partir de $u'_0 = \lambda a$ et $v'_0 = \lambda b$.
Par récurrence, $u'_n = \lambda u_n$ et $v'_n = \lambda v_n$ donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Aisément (u_n) est croissante (v_n) décroissante et $v_n - u_n \to 0$.

(b) Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \le \frac{M_{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x\in[0;1]}\left|(\mathrm{e}^x)^{(n+1)}\right| = \mathrm{e}$. Pour $x = 1$, on obtient

$$|\mathrm{e} - u_n| \le \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \to 0$$

donc $u_n \to \mathrm{e}$.

(c) Par la stricte monotonie des suites (u_n) et (v_n) on a $u_n < \mathrm{e} < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$q.q!u_q$ est un entier et $q.q!v_q$ est l'entier consécutif. Or $q.q!u_q < q.q!\mathrm{e} < q.q!v_q$ donc $q.q!\mathrm{e}$ ne peut être entier. Or $q.q!\mathrm{e} = p.q! \in \mathbb{N}$. Absurde.

Exercice 37 : [énoncé]

La suite (u_n) étant croissante, elle admet une limite (finie ou infinie).
La suite (u_{2n}) qui en est extraite a la même limite.
Or (u_{2n}) converge, il en est donc de même de (u_n).

Exercice 38 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons $\cos(n) \to \ell \in \mathbb{R}$.

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

donne

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos n\cos(1).$$

À la limite on obtient $2\ell = 2\ell\cos(1)$ d'où $\ell = 0$.
Or $\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$ donne alors à la limite $0 = -1$. Absurde.

Exercice 39 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons $\sin(n) \to \ell \in \mathbb{R}$.

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

donne

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n).$$

À la limite, on obtient $\cos(n) \to 0$.
Or $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$ donne alors à la limite $0 = -1$. Absurde.

Exercice 40 : [énoncé]

D'une part

$$0 \le u_{2n} \le \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0.$$

D'autre part

$$0 \le u_{2n+1} \le \frac{2n+1}{n(n+1)} \to 0.$$

On en déduit $u_n \to 0$.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Le tableau de variation de $f\colon x \mapsto x + \tan x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique

$$x_n = f^{-1}(n).$$

(b) On a $x_n + \tan x_n = n$ avec $x_n \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ donc

$$x_n = \arctan(n - x_n).$$

Or $n - x_n \to +\infty$ car (x_n) bornée et donc

$$x_n \to \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 42 : [énoncé]

Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
f est dérivable et $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$ donc f est strictement croissante.
$f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ donc l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède une unique solution x_n.
$x_n = f^{-1}(n) \to +\infty$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Le tableau de variation de $f_n\colon x \mapsto x^n \ln x$ permet d'affirmer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et que de plus $x_n \in [1\,;+\infty[$.

(b) $1 = x_{n+1}^{n+1} \ln x_{n+1} = x_{n+1} f_n(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}} \leq 1 = f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \leq x_n$ car f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. Posons ℓ sa limite, on a $\ell \geq 1$
Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \ln x_n \geq \ell^n \ln \ell \to +\infty$ ce qui est absurde car $x_n^n \ln x_n = 1$. Il reste $\ell = 1$.

Exercice 44 : [énoncé]
On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On observe que $f_n(0) = -1$, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f_{n+1}' = f_n$. La propriété est vrai pour $n = 1$ et si elle est vrai au rang n, le tableau de signe de f_n permet d'assurer que f_{n+1} est décroissante (et donc strictement négative) sur $[0\,;x_n]$ puis strictement croissante sur $[x_n\,;+\infty]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut assurer que f s'annule en un $x_{n+1} > x_n$ et celui-ci est unique.
La suite (x_n) est croissante. Si elle est majorée alors elle converge vers un réel ℓ et $\frac{x_n^n}{n!} \to 0$. Or la suite de terme général est $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^k}{k!}$ est croissante et strictement positive. Elle ne peut donc converger vers 0. Par conséquent la suite (x_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 45 : [énoncé]
L'étude des variations de la fonction $x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$ assure l'existence et l'unicité de $u_n > 0$ vérifiant la relation

$$nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1.$$

De plus on peut affirmer $u_n \geq 1$.
Puisque

$$u_n^n(n(u_n - 1) - 1) = 1 \text{ et } u_n^n \geq 1$$

on a

$$n(u_n - 1) - 1 \leq 1$$

puis

$$0 \leq u_n - 1 \leq 2/n$$

permet de conclure $u_n \to 1$.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Posons $v_n = u_n + 1$. (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 1$ donc $u_n = 2^n - 1 \to +\infty$.

(b) Posons $v_n = u_n - 1$. (v_n) est géométrique de raison $1/2$ et $v_0 = -1$ donc $u_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$.

Exercice 47 : [énoncé]
On a

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$$

donc

$$z_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n z_0.$$

Or $\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right| < 1$ donc $z_n \to 0$ puis $x_n, y_n \to 0$.

Exercice 48 : [énoncé]
Introduisons $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. On a

$$x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$$

$x_n \to x_0$ et $y_n \to 0$ donc $z_n \to \mathrm{Re}(z_0)$.

Exercice 49 : [énoncé]

(a) $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$ et $u_0 - v_0 = -1$ donc $(u_n - v_n)$ est constante égale à -1.

(b) $v_n = u_n + 1$ donc $u_{n+1} = 5u_n + 2$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

(c) $u_{n+1} - a = 5(u_n - a) + 4a + 2$. Pour $a = -1/2$, $(u_n - a)$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $3/2$. Ainsi

$$u_n = \frac{3.5^n - 1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3.5^n + 1}{2}.$$

Exercice 50 : [énoncé]
On peut écrire $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in]-\pi\,;\pi]$
On a alors

$$z_1 = \rho\frac{1+e^{i\theta}}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}, z_2 = \rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}e^{i\frac{\theta}{4}}, \ldots, z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}.$$

Si $\theta = 0$ alors $z_n = \rho \to \rho$.
Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin\frac{\theta}{2^n} \neq 0$ et

$$\sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n}$$

par exploitations successives de l'identité $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.
On en déduit

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \to \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Finalement

$$z_n \to \rho\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Exercice 51 : [énoncé]
$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$,...
Par récurrence, on montre aisément

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n+1.$$

Exercice 52 : [énoncé]
(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$r^2 - (3-2i)r + (5-5i) = 0$.
On obtient

$$u_n = (2+i)^n - (1-3i)^n.$$

Exercice 53 : [énoncé]
Ce sont des suites récurrentes linéaire d'ordre 2 dont le terme général s'obtient à partir de la résolution de l'équation caractéristique associée.

(a) $u_n = 2^n(1-n)$.

(b) . $u_n = -3 + 2^{2-n}$

(c) $u_n = 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$.

Exercice 54 : [énoncé]
(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$$

de solutions $r = e^{i\theta}$ et $r = e^{-i\theta}$.
Par suite, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta$$

$n = 0$ donne $\alpha = 1$ et $n = 1$ donne $\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 1$ donc

$$\beta = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2\theta/2}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n\theta + \tan\frac{\theta}{2}\sin n\theta = \frac{\cos((2n-1)\theta/2)}{\cos(\theta/2)}.$$

Exercice 55 : [énoncé]
Soit f une fonction solution.
Pour $x > 0$, on considère la suite (u_n) déterminée par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

La suite (u_n) est formée de réels strictement positifs et satisfait la relation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique associée sont 2 et -3 de sorte qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n.$$

Puisque la suite (u_n) n'est formée que de réels strictement positifs, il est nécessaire que μ soit nul.
Après résolution cela donne $f(x) = 2x$.
Inversement, cette fonction est bien solution.

Exercice 56 : [énoncé]
On a $u_0 = a, u_1 = a^2, u_2 = a^4$, par récurrence $u_n = a^{2^n}$.
Pour $|a| < 1$ alors $u_n \to 0$, pour $|a| = 1$, $u_n \to 1$ et pour $|a| > 1$, $u_n \to +\infty$.

Exercice 57 : [énoncé]
La suite (u_n) est bien définie et supérieure à 1 à partir du rang 1 car la fonction itératrice $f\colon x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1\,;+\infty[$.
$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 \geq 0$ car le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = -3 < 0$.
La suite (u_n) est croissante.
Si celle-ci converge vers un réel ℓ alors en passant à la limite la relation d'itération : $\ell = \ell^2 + 1$.
Or cette équation ne possède pas de racines réelles. Par suite (u_n) diverge, or elle est croissante, donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 58 : [énoncé]
Pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + u_{n-1}}}.$$

Puisque $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.
Si (u_n) converge vers ℓ alors $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ donne à la limite $\ell = \sqrt{1 + \ell}$ donc $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et $\ell \geq 0$.
Par suite

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha.$$

Par récurrence on montre aisément que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$ et par suite (u_n) converge vers α.

Exercice 59 : [énoncé]
La suite (u_n) est bien définie car sa fonction itératrice $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{u_{n-1}}$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.
La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de $u_1 - u_0 = \mathrm{e}^{u_0} - u_0 - 1$.
Étudions la fonction $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
g est dérivable et $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ du signe de x. $g(0) = 0$ donc g est positive.
Si $u_0 = 0$ alors (u_n) est constante égale à 0.
Si $u_0 > 0$ alors (u_n) est croissante. Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = \mathrm{e}^\ell - 1$ donc $\ell = 0$.
Or (u_n) est minorée par $u_0 > 0$ donc ne peut converger vers 0. Par suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $u_0 < 0$ alors (u_n) est croissante et majorée par 0 donc (u_n) converge vers la seule limite finie possible 0.

Exercice 60 : [énoncé]
La suite (u_n) est bien définie et strictement positive car de fonction itératrice $f\colon x \mapsto \frac{1}{2+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2+\ell}$ et $\ell \geq 0$ donc $\ell = -1 + \sqrt{2}$.

$$|u_{n+1} - \ell| = \left|\frac{1}{2 + u_n} - \frac{1}{2 + \ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{(2 + u_n)(2 + \ell)} \leq \frac{1}{4}\,|u_n - \ell|\,.$$

Par récurrence, on montre $|u_n - \ell| = \frac{1}{4^n}\,|u_0 - \ell|$ et on conclut $u_n \to \ell$.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) L'application $x \mapsto \sqrt{2 - x}$ est définie de $[-2\,;2]$ vers $[0\,;2] \subset [-2\,;2]$.

(b) Supposons $u_n \to \ell$. Puisque $\forall n \geq 1, u_n \in [0\,;2]$, à la limite $\ell \in [0\,;2]$.
La relation $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ donne à la limite $\ell = \sqrt{2 - \ell}$ donc $\ell^2 + \ell - 2 = 0$ d'où $\ell = 1$ ou $\ell = -2$.
Or $\ell \geq 0$ donc $\ell = 1$.

(c)
$$|u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{1 + \sqrt{2 - u_n}} \leq |u_n - 1|$$

donc $\left(|u_n - 1|\right)$ est décroissante et par suite converge vers $\alpha \geq 0$.
Si $\alpha > 0$ alors

$$1 + \sqrt{2 - u_n} = \frac{|u_n - 1|}{|u_{n+1} - 1|} \to 1$$

donc $\sqrt{2 - u_n} \to 0$ puis $u_n \to 2$. C'est impossible.
Nécessairement $|u_n - 1| \to 0$ et donc $u_n \to 1$.

Exercice 62 : [énoncé]
Par récurrence montrons u_n existe et $|u_n| < 1$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

Par HR, u_n existe et $|u_n| < 1$ donc $2 - u_n \neq 0$ d'où $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ existe et

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{|2-u_n|} \leq \frac{|u_n|}{2-|u_n|} < 1.$$

Récurrence établie.

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2-|u_n|} \leq |u_n|$$

donc $(|u_n|)$ est décroissante d'où $|u_n| \leq |a|$ puis

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2-|a|}$$

puis

$$|u_n| \leq \left(\frac{1}{2-|a|}\right)^n |a| \to 0.$$

Par suite $u_n \to 0$.

Exercice 63 : [énoncé]

La suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[\sqrt{a}\,;+\infty[$ à partir du rang 1 car de fonction itératrice

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $[\sqrt{a}\,;+\infty[$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$ et $\ell \geq 0$ donc $\ell = \sqrt{a}$.

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| = \frac{1}{2}\left|u_n + \frac{a}{u_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2\,|u_n|} = \frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{2}\frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{u_n}.$$

Pour $n \geq 1$,

$$\frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{u_n} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leq 1$$

donc

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{a}\right|.$$

Par récurrence :

$$\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left|u_1 - \sqrt{a}\right|$$

donc $u_n \to \sqrt{a}$.

b)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{u_n^2 + 2\sqrt{a}u_n + a} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2$$

donc $v_n = v_0^{2^n}$.

c)

$$\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq v_n\left|u_n + \sqrt{a}\right| \leq 2u_0 v_n = 2u_0 v_0^{2^n}.$$

Exercice 64 : [énoncé]

(a) $f\colon x \mapsto \ln x + x$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. L'équation proposée possède une unique solution $\alpha = f^{-1}(0)$.

(b) L'algorithme de Newton, propose de définir la suite (u_n) par la relation :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{\ln u_n + u_n}{1/u_n + 1} = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{u_n + 1}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ne s'annulent pas.
Pour $u_0 > 0$ tel que $f(u_0)f''(u_0) \geq 0$, la suite converge vers α.

Exercice 65 : [énoncé]

Par récurrence, on montre que u_n existe et $u_n > 0$. La relation de récurrence donne alors

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

La suite (u_{n+1}/u_n) est constante égale à $u_1/u_0 = b/a$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison b/a et finalement

$$u_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

La suite (u_n) converge si, et seulement si, $b \leq a$.

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k} - \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k} = \frac{u_n}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}} \geq 0$$

donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
Supposons $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$. On a $\ell \geq u_1 = \sqrt{a} > 0$
En passant la relation précédente à la limite : $0 = \frac{\ell}{\ell+\ell} = \frac{1}{2}$. C'est absurde.
Par suite $u_n \to +\infty$.

(b)
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_{n+1}+u_n}$$
donc
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1}{u_{n+1}+u_n} \to 0.$$
Par suite $u_{n+1} \sim u_n$ et
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}/u_n + 1} \to \frac{1}{2}.$$

Exercice 67 : [énoncé]
On vérifie sans difficultés que la suite (v_n) est définie et que ses termes sont positifs.
De plus, on vérifie par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 1$$
car
$$(1-u_{n+1})(1-v_n) \geq 0 \implies \frac{v_n + u_{n+1}}{1+u_{n+1}v_n} \leq 1.$$
On a alors
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}(1-v_n^2)}{1+u_{n+1}v_n} \geq 0$$
et la suite (v_n) est donc croissante et majorée. Par conséquent celle-ci converge vers une certaine limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Dans le cas où la suite (u_n) est constante égale à 1, on observe que $\ell = 1$.
Peut-être est-ce encore vrai dans le cas général ? Pour le voir, étudions la suite $(1-v_n)$. On a
$$0 \leq 1 - v_{n+1} = \frac{(1-u_{n+1})(1-v_n)}{1+u_{n+1}v_n} \leq \frac{1}{2}(1-v_n)$$
donc par récurrence
$$0 \leq 1 - v_n \leq \frac{1}{2^n}(1-v_0)$$
et on en déduit
$$v_n \to 1.$$

Exercice 68 : [énoncé]
Si (u_n) converge sa limite ℓ vérifie $\ell = 1 + \ell^2/4$ d'où $\ell = 2$.
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2 \geq 0$$
(u_n) est croissante.
Si $u_0 > 2$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $u_0 \in [0\,;2]$ alors on vérifie aisément que (u_n) est majorée par 2 et on conclut $u_n \to 2$.

Exercice 69 : [énoncé]
$u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante. Par récurrence montrons $u_n \leq a+1$. La relation est vraie pour $n = 1$ et l'hérédité s'obtient par
$u_{n+1} = \sqrt{a+u_n} \leq \sqrt{2a+1} \leq a+1$.

Exercice 70 : [énoncé]

(a) Il suffit de dresser le tableau de variation de f. On note $\alpha < \beta < \gamma$ ces trois racines.

(b) f est croissante et

x		α		β		γ	
$f(x)-x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

(c) $u_n \leq u_{n+1} \implies f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ donc $u_0 \leq f(u_0) \implies (u_n)$ croissante.
De même $u_n \geq u_{n+1} \implies f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ donc $u_0 \geq f(u_0) \implies (u_n)$ décroissante.
Les seules limites finies possibles pour (u_n) sont α, β, γ.
Enfin si $u_0 \leq \alpha$ (resp. β, γ) alors pour tout n, $u_n \leq \alpha$ (resp. β, γ) et de même pour $\geq$.
Au final on peut conclure :
$u_0 \in]-\infty\,;\alpha[$ donne (u_n) décroissant vers $-\infty$.
$u_0 = \alpha$ donne (u_n) constante égale à α.
$u_0 \in]\alpha\,;\gamma[$ donne (u_n) convergeant vers β.
$u_0 = \gamma$ donne (u_n) constante égale à γ.
$u_0 \in]\gamma\,;+\infty[$ donne (u_n) croissant vers $+\infty$.

Exercice 71 : [énoncé]
$f'(x)$ est du signe de $3(x^2-a)^2$ donc f est croissante et par suite (u_n) est monotone.
Les racines de l'équation $f(x) = x$ sont $0, \sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Ce sont les seules limites possibles pour (u_n).

$f(x)-x$ est du signe de $ax-x^3=-x(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$.
Si $u_0\in\,]0\,;\sqrt{a}]$ la suite est croissante est majorée par $\sqrt{a}$ donc converge vers $\sqrt{a}$
Si $u_0\in[\sqrt{a}\,;+\infty[$ la suite est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 72 : [énoncé]
$u_{n+1}-u_n=-u_n^2\leq 0$ donc (u_n) est décroissante. Aisément, on montre que $u_n\in\,]0\,;1[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc on peut conclure que (u_n) converge. Sa limite ℓ vérifie

$$\ell=\ell-\ell^2$$

d'où $\ell=0$.

$$\sum_{k=0}^n u_k^2=\sum_{k=0}^n u_k-u_{k+1}=u_0-u_{n+1}\to u_0$$

et

$$\prod_{k=0}^n(1-u_k)=\prod_{k=0}^n\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{u_{n+1}}{u_0}\to 0.$$

Exercice 73 : [énoncé]

(a) On observe que $x\mapsto 4x-x^2$ est une application de $[0\,;4]$ dans lui-même. Par suite $u_n\in[0\,;4]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si (u_n) converge alors, en posant ℓ sa limite, on a $\ell=4\ell-\ell^2$ d'où $\ell=0$ ou $\ell=3$.

(b) Supposons que $u_n\to 0$. S'il existe un rang n tel que $u_n=0$ alors la suite (u_n) est stationnaire égale à 0. Sinon on a $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc $u_{n+1}-u_n\sim 3u_n>0$. Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite est strictement croissante. De même si $u_n\to 3$ sans être stationnaire égale à 3, on observe que la suite $|u_n-3|$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

(c) On obtient aisément $u_n=4\sin^2 2^n\alpha$. La suite est stationnaire si, et seulement si, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n=0$ ou 3 *i.e.* $\sin^2(2^n\alpha)=0,\sqrt{3}/2,-\sqrt{3/2}$ soit encore $2^n\alpha=k\pi/3$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Ainsi les u_0 pour lesquels la suite est stationnaire sont les $\sin(k\pi/3.2^n)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 74 : [énoncé]

(a) $z_1=\frac{\rho e^{i\theta}+\rho}{2}=\rho\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Par ce principe :

$$z_n=\rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}e^{i\frac{\theta}{2^n}}.$$

(b) $e^{i\frac{\theta}{2^n}}\to 1$ et

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}\to\frac{\sin\theta}{\theta}\text{ (ou 1 si }\theta=0).$$

Finalement $z_n\to\frac{\sin\theta}{\theta}$.

Exercice 75 : [énoncé]
Les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et à termes positifs.
Sachant

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_+,\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$$

on a

$$\forall n\geq 1,u_n\leq v_n$$

puis

$$u_{n+1}\geq u_n\text{ et }v_{n+1}\leq v_n.$$

Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont respectivement croissante et décroissante et on a

$$\forall n\geq 1,u_0\leq u_n\leq v_n\leq v_0.$$

Par convergence monotone, (u_n) et (v_n) convergent vers des limites ℓ et ℓ'.
En passant la relation

$$v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$$

à la limite on obtient $\ell=\ell'$.

Exercice 76 : [énoncé]

(a) Exploiter $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ et raisonner par récurrence.

(b)

$$\sin\frac{\alpha}{2^n}v_n=\frac{1}{2^n}\sin\alpha$$

via $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$. Par suite

$$v_n\sim\frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}\to\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

et aussi

$$u_n\to\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Exercice 77 : [énoncé]
Notons que la suite (y_n) est croissante, elle est donc convergente si, et seulement si, elle est majorée.

(a) Ici $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$. Soit ℓ la racine positive de l'équation $\ell^2 - \ell - a = 0$ *i.e.*

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

On remarque que $y_1 = \sqrt{a} \leq \ell$ et on montre par récurrence $y_n \leq \ell$. La suite (y_n) est croissante et majorée donc convergente.

(b) On observe que la nouvelle suite (y_n) est désormais égale à b fois la précédente, elle est donc convergente.

(c) Si (y_n) converge vers ℓ alors $x_n^{2^{-n}} \leq y_n \leq \ell$ donc $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.
Si $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée par une certain M alors $x_n \leq M^{2^n}$, la suite (y_n) définie par (x_n) est alors inférieure à celle obtenue par (M^{2^n}), cette dernière étant convergente, la suite (y_n) converge.

Exercice 78 : [énoncé]
Posons

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

On vérifie aisément que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{M+2} \leq u_n \leq 1.$$

Supposons la convergence de la suite (u_n). Sa limite est strictement positive. En résolvant l'équation définissant u_{n+1} en fonction de u_n, on obtient

$$a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - u_n - 1.$$

On en déduit que la suite (a_n) converge.
Inversement, supposons que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ, $\ell \geq 0$.
Considérons la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On vérifie que la suite (v_n) est bien définie et à termes strictement positifs.
L'équation

$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$

possède une racine $L > 0$ et on a

$$|v_{n+1} - L| \leq \frac{|v_n - L|}{1 + L}$$

ce qui permet d'établir que la suite (v_n) converge vers L. Considérons ensuite la suite (α_n) définie par

$$\alpha_n = u_n - v_n.$$

On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + (\ell - a_n)}{(u_n + a_n + 1)(v_n + \ell + 1)}$$

et donc

$$|\alpha_{n+1}| \leq k\big(|\alpha_n| + |a_n - \ell|\big)$$

avec

$$k = \frac{1}{m+1} \in [0\,;1[$$

où $m > 0$ est un minorant de la suite convergente (v_n).
Par récurrence, on obtient

$$|\alpha_n| \leq k^n |\alpha_0| + \sum_{p=0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque la suite (a_n) converge vers ℓ, il existe p_0 tel que

$$\forall p \geq p_0, |a_p - \ell| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\sum_{p=p_0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} k^p = \frac{k\varepsilon}{1-k}.$$

Pour n assez grand

$$\sum_{p=0}^{p_0-1} k^{n-p} |a_p - \ell| = C^{te} k^n \leq \varepsilon \text{ et } k^n |\alpha_0| \leq \varepsilon$$

et on en déduit

$$|\alpha_n| \leq 2\varepsilon + \frac{k\varepsilon}{1-k}.$$

Ainsi $\alpha_n \to 0$ et par conséquent

$$u_n \to L.$$

Exercice 79 : [énoncé]
La fonction itératrice de cette suite récurrente est

$$g\colon x\mapsto \frac{1}{2}\big(f(x)+x\big).$$

On vérifie aisément que cette fonction est définie sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $[a\,;b]$.
On en déduit que la suite (x_n) est bien définie et que c'est une suite d'éléments de $[a\,;b]$.
On a

$$x_{n+1}-x_n=\frac{\big(f(x_n)-f(x_{n-1})\big)+\big(x_n-x_{n-1}\big)}{2}.$$

Puisque f est 1-lipschitzienne, on a

$$\big|f(x_n)-f(x_{n-1})\big|\leq |x_n-x_{n-1}|$$

et donc $x_{n+1}-x_n$ est du signe de x_n-x_{n-1}. Par conséquent, la suite (x_n) est monotone et sa monotonie découle du signe de x_1-x_0. La suite (x_n) étant de plus bornée, elle converge vers une certaine limite ℓ avec $\ell\in[a\,;b]$.
La relation

$$x_{n+1}=\frac{x_n+f(x_n)}{2}$$

donne à la limite sachant f continue

$$\ell=\frac{\ell+f(\ell)}{2}$$

donc $f(\ell)=\ell$.