Limite de suites de solutions d'une équation

Exercice 1 [02290] [Correction]
Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$.

(a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.

(b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 [02288] [Correction]
Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
Étudier la limite de (x_n).

Exercice 3 [02291] [Correction]
Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geq 1$.

(b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.

Exercice 4 [00314] [Correction]
Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

possède une unique racine x_n dans $\left]0\,;+\infty\right[$. Déterminer $\lim x_n$.

Exercice 5 [00315] [Correction]
Montrer que la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ définit une suite positive (u_n) unique.
Étudier sa convergence et préciser sa limite.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Le tableau de variation de $f\colon x \mapsto x + \tan x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $]-\pi/2\,;\pi/2[$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique

$$x_n = f^{-1}(n).$$

(b) On a $x_n + \tan x_n = n$ avec $x_n \in\,]-\pi/2\,;\pi/2[$ donc

$$x_n = \arctan(n - x_n).$$

Or $n - x_n \to +\infty$ car (x_n) bornée et donc

$$x_n \to \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2 : [énoncé]

Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
f est dérivable et $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$ donc f est strictement croissante.
$f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ donc l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède une unique solution x_n.
$x_n = f^{-1}(n) \to +\infty$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Le tableau de variation de $f_n\colon x \mapsto x^n \ln x$ permet d'affirmer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et que de plus $x_n \in [1\,;+\infty[$.

(b) $1 = x_{n+1}^{n+1} \ln x_{n+1} = x_{n+1} f_n(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}} \le 1 = f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \le x_n$ car f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. Posons ℓ sa limite, on a $\ell \ge 1$
Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \ln x_n \ge \ell^n \ln \ell \to +\infty$ ce qui est absurde car $x_n^n \ln x_n = 1$. Il reste $\ell = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]

On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On observe que $f_n(0) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f_{n+1}' = f_n$. La propriété est vrai pour $n = 1$ et si elle est vrai au rang n, le tableau de signe de f_n permet d'assurer que f_{n+1} est décroissante (et donc strictement négative) sur $[0\,;x_n]$ puis strictement croissante sur $[x_n\,;+\infty]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut assurer que f s'annule en un $x_{n+1} > x_n$ et celui-ci est unique.
La suite (x_n) est croissante. Si elle est majorée alors elle converge vers un réel ℓ et $\frac{x_n^n}{n!} \to 0$. Or la suite de terme général est $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^k}{k!}$ est croissante et strictement positive. Elle ne peut donc converger vers 0. Par conséquent la suite (x_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 5 : [énoncé]

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$ assure l'existence et l'unicité de $u_n > 0$ vérifiant la relation

$$nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1.$$

De plus on peut affirmer $u_n \ge 1$.
Puisque

$$u_n^n(n(u_n - 1) - 1) = 1 \text{ et } u_n^n \ge 1$$

on a

$$n(u_n - 1) - 1 \le 1$$

puis

$$0 \le u_n - 1 \le 2/n$$

permet de conclure $u_n \to 1$.