

# Suites et séries de fonctions

## Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

### Exercice 1 [00868] [Correction]

Établir que la limite simple d'une suite de fonctions de  $I$  vers  $\mathbb{R}$  convexes est convexe.

### Exercice 2 [00885] [Correction]

Soient  $(f_n)$  une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction  $f$  et  $g$  une fonction uniformément continue.

Montrer que la suite de fonctions  $(g \circ f_n)$  converge uniformément.

### Exercice 3 [00884] [Correction]

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions  $f$  et  $g$  supposées bornées.

Montrer que la suite de fonctions  $(f_n g_n)$  converge uniformément vers  $fg$ .

### Exercice 4 [00878] [Correction]

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions réelles continues et définies sur  $[a; b]$ . On suppose que  $f_n$  converge uniformément vers une fonction  $f$ .

Montrer

$$\inf_{[a;b]} f_n \rightarrow \inf_{[a;b]} f.$$

### Exercice 5 [00879] [Correction]

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $[a; b]$  vers  $\mathbb{R}$  convergeant uniformément vers une fonction  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Montrer que si  $(x_n)$  désigne une suite d'éléments de  $[a; b]$  convergeant vers  $x \in [a; b]$  alors

$$f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

### Exercice 6 [03461] [Correction]

Soit  $(P_n)$  une suite de fonctions polynômes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $f$  est polynomiale.

## Étude pratique de la convergence d'une suite de fonctions

### Exercice 7 [00871] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n(x) = x^n \ln(x) \text{ avec } x \in ]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0.$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq 1}$  sur  $[0; 1]$ .

### Exercice 8 [00872] [Correction]

Étudier la convergence uniforme de  $f_n: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

### Exercice 9 [00870] [Correction]

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+.$$

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(u_n)$  sur  $[0; +\infty[$ .
- Étudier la convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .
- Étudier la convergence uniforme sur  $[0; +\infty[$ .

### Exercice 10 [00873] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = nx^2 e^{-nx} \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+.$$

Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}_+$  puis sur  $[a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .

### Exercice 11 [00874] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}$  puis sur  $] -\infty; -a] \cup [a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .

**Exercice 12** [ 00875 ] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f_n(0) = 0.$$

- (a) Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b) Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $[-a; a]$  avec  $a > 0$ .

**Exercice 13** [ 02527 ] [Correction]

Étudier la convergence simple et uniforme sur  $\mathbb{R}$  de la suite de fonctions  $(f_n)$  donnée par

$$f_n(x) = \sin^n(x) \cos(x).$$

**Exercice 14** [ 02518 ] [Correction]

Étudier la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}.$$

**Exercice 15** [ 02830 ] [Correction]On pose, pour  $x \geq 0$ ,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 16** [ 00876 ] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

**Exercice 17** [ 00877 ] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) \text{ pour } x \in [0; 1].$$

Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

**Exercice 18** [ 00881 ] [Correction]Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n.$$

- (a) Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .  
 (b) Pour quels  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y a-t-il convergence uniforme ?

**Exercice 19** [ 02972 ] [Correction]Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0; n[ \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

Étudier le mode de convergence de  $(f_n)$ .

**Exercice 20** [ 00890 ] [Correction]Soit  $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

- (a) Étudier la limite simple de  $(f_n)$  et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq \lim f_n(x).$$

- (b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

justifier que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout intervalle  $[0; a]$  (avec  $a > 0$ ).

- (c) Établir qu'en fait, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 21** [ 00892 ] [Correction]Soit  $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1-nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

- (a) Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .  
 (b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt.$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction  $(f_n)$  ?

- (c) Étudier la convergence uniforme sur  $[a; 1]$  avec  $a > 0$ .

**Exercice 22** [ 00891 ] [Correction]

Pour  $x \in [0; \pi/2]$ , on pose  $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$ .

- (a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions  $(f_n)$ .  
 (b) Calculer

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx.$$

La suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément ?

- (c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans  $]0; \pi/2[$ .

**Exercice 23** [ 02532 ] [Correction]

- (a) Montrer que la suite de fonctions  $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  converge simplement vers une fonction  $f$  à déterminer.  
 (b) Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles il y a convergence uniforme.  
 (c) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx.$$

**Exercice 24** [ 02860 ] [Correction]

Soit  $(f_n)$  la suite de fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f_0(x) = x \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = \frac{x}{2 + f_n(x)} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 25** [ 02970 ] [Correction]

On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues.

On pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

pour toute  $f \in E$ .

On pose  $f_0 = 1$  puis  $f_{n+1} = \Phi(f_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Étudier la suite  $(f_n)$ .  
 (b) Soit  $f = \lim(f_n)$ .  
 Trouvez une équation différentielle dont  $f$  est solution.  
 Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

**Exercice 26** [ 05049 ] [Correction]

On considère la suite de fonctions  $(P_n)$  définie sur  $[0; 1]$  par

$$P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)).$$

- (a) Montrer que  $(P_n)$  converge uniformément sur  $[0; 1]$  vers la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$ .  
 (b) En déduire une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers la fonction valeur absolue sur  $[-1; 1]$ .

## Étude théorique de la convergence d'une suite de fonctions

**Exercice 27** [ 00883 ] [Correction]

Soit  $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = x + 1/n.$$

Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément mais pas  $(f_n^2)$ .

**Exercice 28** [ 00869 ] [Correction]

Soit  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}.$$

Montrer que chaque  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 29** [00887] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée. Montrer que la suite des fonctions

$$g_n: x \mapsto n(f(x + 1/n) - f(x))$$

converge uniformément vers  $f'$ .

**Exercice 30** [00888] [Correction]

Soit  $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  décroissante telle que  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.

Montrer que cette convergence est uniforme.

**Exercice 31** [02833] [Correction]

On note  $U$  l'ensemble des complexes de module 1 et on considère  $\omega$  un complexe de module  $\neq 1$ .

Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z - \omega}$$

soit limite uniforme sur  $U$  d'une suite de fonctions polynomiales.

**Exercice 32** [03902] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n(t) = n(f(t + 1/n) - f(t)).$$

Montrer que la suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$  vers une fonction à préciser.

## Fonction solution d'équations fonctionnelles

**Exercice 33** [00893] [Correction]

On définit  $(u_n)$  suite de fonctions de  $[0; 1]$  vers  $\mathbb{R}$  par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt.$$

(a) Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) En déduire la convergence pour tout  $x \in [0; 1]$  de la suite  $(u_n(x))$ .

(c) Établir que la suite  $(u_n)$  converge uniformément vers une fonction  $u$  non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2).$$

**Exercice 34** [00903] [Correction]

Pour  $x > 0$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Justifier que  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(b) Préciser le sens de variation de  $S$ .

(c) Établir

$$S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x} \text{ pour tout } x > 0.$$

(d) Donner un équivalent de  $S$  en 0.

(e) Donner un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .

**Exercice 35** [03777] [Correction]

Pour  $x > 0$ , on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Montrer que  $F$  est bien définie.

(b) Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

(c) Simplifier

$$F(x) + F(x+1).$$

(d) Montrer que pour  $x > 0$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

(e) Donner un équivalent de  $F$  en 0 et en  $+\infty$ .

**Exercice 36** [00913] [Correction]

Pour  $x > 0$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)}.$$

- Justifier que  $S$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .
- Former une relation liant  $S(x)$  et  $S(x+1)$ .
- Déterminer un équivalent de  $S(x)$  en  $+\infty$  et en  $0$ .

**Exercice 37** [00914] [Correction]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose

$$f_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th} n.$$

- Établir la convergence de la série de fonctions  $\sum f_n$ .
- Justifier que la fonction somme  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x+1) - S(x) = 1 - \text{th} x.$$

- Étudier la convergence de  $S$  en  $+\infty$ .

**Exercice 38** [03754] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue décroissante et intégrable.

Montrer l'existence d'une fonction  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x+1) - g(x) = f(x).$$

**Exercice 39** [00912] [Correction]

On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

- Justifier que  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Étudier les variations de  $S$  et préciser ses limites en  $0$  et en  $+\infty$ .
- Établir

$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

- Donner un équivalent de  $S$  en  $+\infty$  et en  $0^+$ .

**Exercice 40** [00898] [Correction]

Justifier l'existence de

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

Montrer que  $f$  est 1-périodique et qu'on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Exercice 41** [02973] [Correction]

Trouver les fonctions  $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  telles que

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

**Exercice 42** [04104] [Correction]

On étudie l'équation fonctionnelle

$$(E): f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2.$$

- Quelles sont les solutions constantes sur  $\mathbb{R}$  ?
- Soit  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose  $f(x) = xh(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . À quelle condition sur  $h$ , la fonction  $f$  est-elle solution de  $(E)$  ?
- On définit par récurrence une suite de fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  en posant :  $h_0: x \mapsto 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Pour  $x \in [0; 1]$ , soit  $T_x: y \mapsto y - xy^2/2$ . Montrer que  $T_x$  est 1-lipschitzienne sur  $[0; 1]$  et que  $T_x([0; 1]) \subset [0; 1]$ .

Montrer que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ .

- (d) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur  $[0; 1]$ .
- (e) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 43** [04186] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $u_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

- (a) Montrer que  $\sum u_n(x)$  converge si  $x > 0$ .  
Montrer que  $f: x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (b) Montrer que  $f$  est l'unique fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln x \\ f \text{ est convexe} \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

- (c) Montrer que, pour  $x > 0$ , on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

**Étude de la convergence d'une série de fonctions****Exercice 44** [00895] [Correction]

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 45** [00896] [Correction]

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 46** [00897] [Correction]

On note  $1_I$  la fonction caractéristique d'un intervalle  $I$  :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur  $[0; +\infty[$  de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x).$$

**Exercice 47** [03785] [Correction]

On introduit l'application sur  $[0; +\infty[$

$$f_n: x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

- (a) Étudier les convergences de la suite de fonctions  $(f_n)$ .
- (b) Étudier les convergences de la série de fonctions  $\sum f_n$ .

**Exercice 48** [03295] [Correction]

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive et décroissante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0; 1].$$

- (a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions  $\sum u_n$ .
- (b) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série  $\sum a_n/n$ .
- (c) Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément si, et seulement si,  $a_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 49** [02839] [Correction]

On pose

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

pour tout réel  $x \in [0; 1]$  et tout entier naturel  $n$ .

Montrer que la série de terme général  $u_n$  est normalement convergente.

**Exercice 50** [03988] [Correction]

Soit  $u_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1+n^2x)^2}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de  $\sum u_n$  et  $\sum u'_n$ .

**Exercice 51** [05050] [Correction]

Étudier la convergence simple, la convergence normale et la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{\sin(x)e^{-nx}}{\ln(n)} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \geq 2.$$

**Fonctions zêta****Exercice 52** [02834] [Correction]

Si  $x > 1$ , on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- Quelle est la limite de  $\zeta(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  ?
- Pour quels réels  $x$  la série  $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$  converge-t-elle ?
- Si

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

montrer que  $F$  est continue sur  $]-1; 1[$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-1; 1[$ .

- Donner une expression plus simple de  $F(x)$

**Exercice 53** [00908] [Correction]

On pose

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Montrer que la fonction  $\eta$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 54** [00909] [Correction]

On pose

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Montrer que  $\eta$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 55** [03853] [Correction]

Déterminer la limite quand  $x \rightarrow 0^+$  de

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

**Exercice 56** [00899] [Correction]

Soient

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

- Déterminer les domaines de définition des fonctions  $\zeta$  et  $\eta$ .
- Justifier que les fonctions  $\zeta$  et  $\eta$  sont continues.
- Établir la relation  $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$  pour tout  $x > 1$ .

**Exercice 57** [04187] [Correction]

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels strictement positifs de limite  $+\infty$ . Lorsque cela a un sens, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n^x}.$$

- Montrer que la fonction  $f$  est définie sur un intervalle  $I$  et que, s'il n'est pas vide, cet intervalle est non majoré.
- Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .
- Donner un exemple de suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  pour laquelle :
  - l'intervalle  $I$  est vide ;
  - l'intervalle  $I$  est ouvert non vide ;
  - l'intervalle  $I$  est fermé non vide.

**Exercice 58** [04174] [Correction]

Soit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{avec } s \in \mathbb{C}.$$

- (a) Montrer la définition de  $\zeta(s)$  pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .  
 (b) Montrer qu'alors

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

- (c) En déduire un prolongement continu de  $\zeta$  sur

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \setminus \{1\}.$$

**Intégration de la somme d'une série de fonctions****Exercice 59** [00911] [Correction]

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \quad \text{pour } x \in ]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0.$$

- (a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

- (b) Montrer que la série des  $u_n$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ .  
 (c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

**Exercice 60** [00920] [Correction]

On donne

$$\forall \alpha \in [0; 1], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \pi \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{sh} \pi \alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

(prolongée par continuité en 0).

En intégrant sur  $[0; 1]$ , en déduire la valeur de

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

**Limite et comportement asymptotique de la somme de série de fonctions****Exercice 61** [02558] [Correction]

Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

En trouver la limite en  $+\infty$  et un équivalent en  $0^+$ .**Exercice 62** [00139] [Correction]Pour  $t > 0$ , on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}.$$

Déterminer la limite de  $S(t)$  quand  $t \rightarrow 0^+$ .**Exercice 63** [00910] [Correction]Pour  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right).$$

- (a) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions  $\sum u_n$ .  
 (b) Déterminer la limite de sa somme en  $+\infty$ . On pourra exploiter la formule de Stirling

**Exercice 64** [00918] [Correction]Montrer que pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

On pourra exploiter le théorème d'inversion limite/somme infinie.

**Exercice 65** [00919] [Correction]Par une inversion série-limite, montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ 

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(z).$$



## Étude pratique de fonctions somme de série

### Exercice 66 [00901] [Correction]

Pour  $x > 0$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

- Montrer que  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Montrer que  $S$  est continue.
- Étudier la monotonie de  $S$ .
- Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $S$  puis un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .
- Déterminer un équivalent à  $S$  en 0.

### Exercice 67 [00902] [Correction]

Sur  $I = ]-1; +\infty[$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

- Montrer que  $S$  est définie et continue sur  $I$ .
- Étudier la monotonie de  $S$ .
- Calculer, pour  $x \in I$ ,

$$S(x+1) - S(x).$$

- Déterminer un équivalent de  $S(x)$  en  $-1^+$ .
- Établir

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

- En déduire un équivalent de  $S(x)$  en  $+\infty$ .

### Exercice 68 [00906] [Correction]

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

- Quel est le domaine de définition de  $f$  ? Étudier la continuité de  $f$  sur celui-ci.

- Montrer que  $f$  est strictement décroissante.
- Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Déterminer un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

### Exercice 69 [00915] [Correction]

Pour  $x \geq 0$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

- Pour quelles valeurs de  $x$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $S(x)$  est définie ?
- Former une relation entre  $S(x)$  et  $S(1/x)$  pour  $x \neq 0$ .
- Étudier la continuité de  $S$  sur  $[0; 1[$  puis sur  $]1; +\infty[$ .
- Dresser le tableau de variation de  $S$ .

### Exercice 70 [02837] [Correction]

On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de  $S$ . Donner un équivalent de  $S$  en 0 et en  $1^-$ .

### Exercice 71 [03203] [Correction]

Définition, continuité et dérivabilité de

$$S: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1 + n^2 x^2)}.$$

### Exercice 72 [02529] [Correction]

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$$

est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Exercice 73** [ 03427 ] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose

$$u_n(x) = \arctan \sqrt{n+x} - \arctan \sqrt{n}.$$

- (a) Étudier l'existence et la continuité de la fonction  $S$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

- (b) Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .

**Exercice 74** [ 03797 ] [Correction]

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

- (a) Montrer que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b) Donner, à l'aide d'une comparaison intégrale, un équivalent de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .  
 (c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de  $f$  en 0. On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Exercice 75** [ 03194 ] [Correction]

Définition, continuité et classe  $\mathcal{C}^1$  de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

**Exercice 76** [ 00904 ] [Correction]

Pour  $t > 0$ , on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}.$$

- (a) Justifier que  $S$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .  
 (b) Étudier la limite de  $S$  en  $+\infty$ .

- (c) Établir que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 77** [ 03644 ] [Correction]

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}.$$

- (a) Montrer que la fonction  $S$  est bien définie et étudier sa parité.  
 (b) Montrer que la fonction  $S$  est continue.  
 (c) Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .

**Exercice 78** [ 00916 ] [Correction]

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

- (a) Justifier que la fonction  $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .  
 (b) Établir que pour tout  $x \neq 0$ ,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

- (c) Établir que  $f$  est continue sur  $] -1; 1[$  puis que  $f$  est continue sur  $] -\infty; -1[$  et  $] 1; +\infty[$ .  
 (d) Établir la continuité de  $f$  en 1.

**Exercice 79** [ 02835 ] [Correction]

Si  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

- (a) Montrer l'existence de  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .  
 (b) Montrer

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x}{n} - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \right).$$

- (c) Montrer que  $\Gamma$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 80** [00905] [Correction]

On fixe  $\alpha > 0$  et on pose

$$f_n(x) = e^{-n^\alpha x} \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

- Domaine de définition de  $f$ ?
- Continuité de  $f$ ?
- Étudier  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Exercice 81** [02836] [Correction]

Soit  $\alpha$  un réel. Pour tout entier  $n > 0$  et tout réel  $x$ , on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

On note  $I$  le domaine de définition de

$$S: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

- Déterminer  $I$ .
- Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- A-t-on convergence normale sur  $\mathbb{R}_+^*$ ?
- On suppose  $\alpha \geq 2$ . Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La convergence de la série de fonctions  $\sum u_n$  est-elle uniforme sur  $I$ ?

- Étudier la continuité de  $S$  sur  $I$ .

**Exercice 82** [02971] [Correction]

Soient des suites réelles  $(a_n)$  et  $(x_n)$  avec  $a_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On suppose que la série de terme général  $a_n(1 + |x_n|)$  converge et on considère la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x - x_n|.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ .

**Exercice 83** [04173] [Correction]

On définit la suite de fonctions  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, S_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

- Écrire avec **Python** une fonction  $S(N, x)$  renvoyant  $S_N(x)$ .
- Écrire une fonction prenant trois paramètres  $N$ ,  $a$  et  $b$  et traçant le graphe de  $S_N$  sur le segment  $[a; b]$ .
- Montrer que la suite  $(S_N)$  converge simplement sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  vers une fonction que l'on notera  $S$ .
- Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .
- Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , impaire et 1-périodique.
- Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x).$$

- Montrer que la fonction  $f: x \mapsto \pi \cot(\pi x) - S(x)$  vérifie la même relation.
- Montrer que  $f$  se prolonge par continuité sur  $\mathbb{R}$ . En déduire  $S$ .

**Suites et séries de fonctions vectorielles****Exercice 84** [01186] [Correction]

Soit  $E$  une algèbre de dimension finie munie d'une norme  $\|\cdot\|$  vérifiant

$$\forall a, b \in E, \|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

- Soit  $a \in E$  vérifiant  $\|a\| < 1$ . Montrer que  $1_E - a$  est inversible et exprimer son inverse comme la somme d'une série.
- Montrer que l'application  $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$  est continue en  $1_E$ .
- Montrer que l'application  $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$  est continue.

**Exercice 85** [00573] [Correction]

On suppose  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$  vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour  $|t| < 1/\|A\|$  on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k.$$

- (a) Montrer que  $f$  est bien définie.
- (b) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que

$$(I - tA)f'(t) = A.$$

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

Supposons que la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  avec chaque  $f_n$  convexe.

Pour tout  $a, b \in I$  et  $\lambda \in [0; 1]$  on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f_n(a) + (1 - \lambda)f_n(b).$$

À la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

ce qui fournit la convexité de  $f$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

Par uniforme continuité, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - y| \leq \alpha \implies |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

Pour  $n$  assez grand, on a

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$$

et donc

$$\forall x \in I, |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, il y a convergence uniforme de  $(g \circ f_n)$  vers  $g \circ f$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

On peut écrire

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty.$$

Or  $\|f_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$  et donc la suite  $(\|f_n\|_\infty)$  est bornée car convergente. Par opération sur les limites, on obtient alors

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

car  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  et  $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

Posons

$$m_n = \inf_{t \in [a; b]} f_n(t).$$

Puisque la fonction  $f_n$  est continue sur le segment  $[a; b]$ , cet infimum est une valeur prise par  $f_n$  et donc il existe  $t_n \in [a; b]$  tel que

$$m_n = f_n(t_n).$$

Montrons que  $m_n \rightarrow m$  avec

$$m = \inf_{t \in [a; b]} f.$$

La fonction  $f$  est continue car limite uniforme d'une suite de fonctions continues et donc il existe  $t_\infty \in [a; b]$  pour lequel

$$m = f(t_\infty).$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a pour  $n$  assez grand,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

et donc

$$m_n = f_n(t_n) \geq f(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$$

et

$$m = f(t_\infty) \geq f_n(t_\infty) - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon.$$

Ainsi

$$|m_n - m| \leq \varepsilon.$$

On peut alors affirmer  $m_n \rightarrow m$ .

### Exercice 5 : [énoncé]

*Les hypothèses permettent de rapprocher  $f_n(x_n)$  de  $f(x)$  en transitant par la valeur  $f(x_n)$ .*

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a par l'inégalité triangulaire

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|.$$

Par convergence uniforme, on peut contrôler le premier terme de la somme et, par continuité de  $f$ , on contrôle aussi le second. On exprime ceci<sup>1</sup> en raisonnant par les  $\varepsilon$ .

1. On pourrait aussi écrire  $|f_n(x_n) - f(x)| \leq \sup_{[a; b]} |f_n - f| + |f_n(x_n) - f(x)|$  où le majorant est la somme de deux termes de limites nulles.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par convergence uniforme, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $n \geq N_1$ ,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in [a; b].$$

Ceci vaut en particulier pour  $t = x_n$  ce qui donne

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_1.$$

Aussi, par continuité de  $f$  en  $x$ , on sait que  $(f(x_n))$  tend vers  $f(x)$  et il existe donc  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_2.$$

On en déduit

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq 2\varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq \max(N_1, N_2).$$

Ainsi, on a obtenu la propriété traduisant la convergence de  $(f_n(x_n))$  vers  $f(x)$ .

### Exercice 6 : [énoncé]

Pour  $\varepsilon = 1$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, P_n - f \text{ est bornée et } \|P_n - f\|_\infty \leq 1.$$

Pour tout  $n \geq N$ , on peut alors affirmer que le polynôme  $P_n - P_N = (P_n - f) - (P_N - f)$  est borné et donc constant. Puisque la suite  $(P_n)$  converge uniformément vers  $f$ , la suite  $(P_n - P_N)_{n \geq N}$  converge uniformément vers  $f - P_N$ . Or cette suite étant formée de fonctions constantes, sa convergence équivaut à la convergence de la suite de ces constantes. En posant  $C$  la limite de cette suite, on obtient

$$f = P_N + C$$

et donc  $f$  est une fonction polynôme.

### Exercice 7 : [énoncé]

Les fonctions  $u_n$  sont continues sur  $[0; 1]$  pour  $n \geq 1$  et dérivables sur  $]0; 1]$  avec

$$u'_n(x) = x^{n-1}(1 + n \ln(x)).$$

Le tableau de variation de  $u_n$  donne

$$\sup_{[0;1]} |u_n| = -u_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \rightarrow 0.$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur  $[0; 1]$  vers la fonction nulle.

### Exercice 8 : [énoncé]

Pour  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$  car  $|f_n(x)| \leq \frac{x}{n}$ .

On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}.$$

Posons  $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$ .

$x$	0	$x_n$	$+\infty$
$f_n(x)$	0	$M_n$	0

donc

$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1+\frac{1}{n-1})} = \frac{e^{-\frac{1}{n} \ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \rightarrow 0.$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

### Exercice 9 : [énoncé]

(a) Soit  $x \in [0; +\infty[$ .

Si  $x = 0$  alors  $u_n(x) = 0 \rightarrow 0$ .

Si  $x > 0$  alors  $u_n(x) \rightarrow 0$  car  $e^{-nx} \rightarrow 0$ .

La suite de fonctions  $(u_n)$  converge donc simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .

(b) On a

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |u_n(x)| \leq e^{-na} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .

(c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geq u_n(\pi/2n) = e^{-\pi/2} \not\rightarrow 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Exercice 10 : [énoncé]

$f'_n(x) = nx(2 - nx)e^{-nx}$ , le tableau de variation de  $f_n$  donne

$$\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n| = f_n(2/n) = \frac{4}{n} e^{-2} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  et donc *a fortiori* sur  $[a; +\infty[$ .

**Exercice 11 :** [énoncé]

$f_n(0) \rightarrow 1$  et  $f_n(x) \rightarrow 0$  pour  $x \neq 0$ . La fonction limite n'étant pas continue, il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ . En revanche si  $|x| \geq |a|$  alors

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur  $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .

**Exercice 12 :** [énoncé]

(a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , nul ou non, on a  $f_n(x) \rightarrow 0$ . Il y a convergence simple vers la fonction  $f$  nulle. On a

$$f_n(x) - f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{nx} = \frac{x}{n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La fonction  $f_n - f$  n'étant pas bornée sur  $\mathbb{R}$ , il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Sur  $[-a; a]$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0$$

via  $|\sin t| \leq |t|$ . Par suite il y a convergence uniforme sur  $[-a; a]$ .

**Exercice 13 :** [énoncé]

Cas:  $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ . On a  $|\sin(x)| < 1$  et donc  $(f_n(x))$  tend vers 0.

Cas:  $x = \frac{\pi}{2} [\pi]$ . On a  $\cos(x) = 0$  et donc  $(f_n(x))$  est une suite constante égale à 0.

Ainsi,  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.

Par  $2\pi$  périodicité et parité, on ne poursuit l'étude qu'avec  $x \in [0; \pi]$ . La fonction  $f_n$  est dérivable avec

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1).$$

On peut dresser le tableau de variation de  $f_n$  sur  $[0; \pi]$  et l'on obtient

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \left| f_n \left( \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right) \right| = \left( 1 - \frac{1}{(n+1)} \right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite de fonction  $(f_n)$  converge donc uniformément vers la fonction nulle.

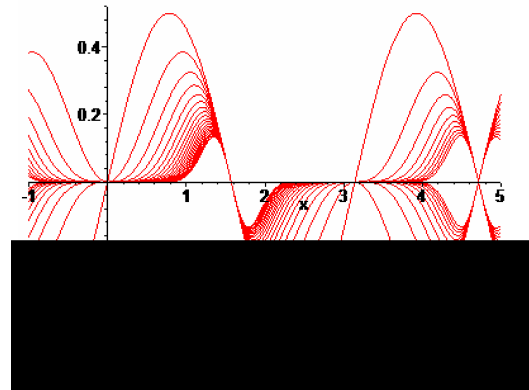


FIGURE 1 – Les premières fonctions de la suite  $(f_n)$

**Exercice 14 :** [énoncé]

$f_n$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et peut être prolongée par continuité en 0 en posant sur  $f_n(0) = n$ .

Pour  $x \leq 0$ ,  $f_n(x) \rightarrow +\infty$ .

Pour  $x > 0$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

Ainsi,  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Il ne peut y avoir convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+^*$  car alors, par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$$

donne  $0 = +\infty$ .

Pour  $a > 0$ , sur  $[a; +\infty[$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-a^2}}$$

et par étude fonctionnelle  $nx^2 e^{-nx} \leq \frac{4}{n} e^2$  (maximum en  $x = 2/n$ ) donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{4e^2}{n(1 - e^{-a^2})} \rightarrow 0$$

qui donne la convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$ .

**Exercice 15 :** [énoncé]

Quand  $p \rightarrow +\infty$ ,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \rightarrow \frac{1}{1+x} = f(x).$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$

Or, pour  $\alpha \in ]0; 1]$ , la fonction  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

pour tout  $x \geq 0$  et donc

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \frac{1}{p} \frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leq \frac{1}{p} \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{p}.$$

Puisque  $\|f - f_p\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{p}$ , la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 16 : [énoncé]**

La suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(\pm 1/\sqrt{n2^n})| = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

Or  $\pm 1/\sqrt{n2^n} \rightarrow 0$  et donc d'après le tableau de variation de  $f_n$ , pour tout  $a > 0$ , on a, pour  $n$  assez grand,

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a) \rightarrow 0.$$

Ainsi, il y a convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$  et de même sur  $]-\infty; -a]$ .

En revanche, il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 0.

**Exercice 17 : [énoncé]**

On a

$$\sup_{x \in [0; 1]} |f_n(x)| = f_n(1/\sqrt[2^n]{2}) = 4^{n-1} \rightarrow +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur  $[0; 1]$ .

Or  $1/\sqrt[2^n]{2} \rightarrow 1$  et donc d'après le tableau de variation de  $f_n$ , pour tout  $a \in [0; 1[$ , on a, pour  $n$  assez grand,

$$\sup_{x \in [0; a]} |f_n(x)| = f_n(a) \rightarrow 0.$$

Ainsi il y a convergence uniforme sur  $[0; a]$ . En revanche il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 1.

**Exercice 18 : [énoncé]**

(a) Cas:  $x = 0$ . On a  $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$ .

Cas:  $x \in ]0; 1]$ . On a aussi  $f_n(x) \rightarrow 0$  par comparaison des suites de référence.

(b) La fonction  $f_n$  est dérivable avec

$$f'_n(x) = n^\alpha(1-x)^n - n^{\alpha+1}x(1-x)^{n-1} = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x).$$

Après étude des variations

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^\alpha \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

avec

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n+1})} = e^{-1+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$$

donc

$$\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

Il y a convergence uniforme si, et seulement si,  $\alpha < 1$ .

**Exercice 19 : [énoncé]**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Pour  $n$  assez grand

$$f_n(x) = (1-x/n)^n = \exp(n \ln(1-x/n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x}.$$

La suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f: x \mapsto e^{-x}$  avec  $f_n \leq f$ .

Étudions  $\delta_n = f - f_n \geq 0$ .

Pour  $x \in [n; +\infty[$ ,  $\delta_n(x) = e^{-x} \leq e^{-n}$ .

Pour  $x \in [0; n[$ ,  $\delta_n(x) = e^{-x} - (1-x/n)^n$  et  $\delta'_n(x) = -e^{-x} + (1-x/n)^{n-1}$ .

Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1) \ln(1-x/n) + x.$$

On a

$$\varphi'_n(x) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{x/n-1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de  $1-x$ .

Par étude des variations de  $\varphi_n$ , on obtient l'existence de  $x_n \in [0; n[$  tel que

$\varphi_n(x) \geq 0$  pour  $x \leq x_n$  et  $\varphi_n(x) \leq 0$  pour  $x \geq x_n$ . On en déduit que pour  $x \leq x_n$ ,  $\delta'_n(x) \geq 0$  et pour  $x \geq x_n$ ,  $\delta'_n(x) \leq 0$ . Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0; n[} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n} e^{-x_n}.$$



Puisque la fonction  $x \mapsto xe^{-x}$  est bornée par un certain  $M$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0; n[} \leq \frac{M}{n}.$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0; +\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, e^{-n}\right) \rightarrow 0.$$

On peut donc affirmer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $f$ .

**Exercice 20 :** [énoncé]

(a)  $f_n(x) = \exp(-n \ln(1 + \frac{x}{n})) = \exp(-x + o(1)) \rightarrow e^{-x} = f(x)$ .  
On sait  $\ln(1+t) \leq t$  donc par opérations :  $f_n(x) \geq e^{-x}$

(b) On sait

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

donc

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln(1 + \frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$$

puis

$$e^{-x} \leq f_n(x) \leq e^{-x + \frac{x^2}{2n}} = e^{-x} e^{\frac{x^2}{2n}}.$$

Sur  $[0; a]$  on a  $e^{\frac{x^2}{2n}} \leq e^{\frac{a^2}{2n}} \rightarrow 1$ .

Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|e^{a^2/2n} - 1| \leq \varepsilon$ .

On a alors pour tout  $x \in [0; a]$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x}(e^{x^2/2n} - 1) \leq e^{a^2/2n} - 1 \leq \varepsilon.$$

Par suite  $f_n \xrightarrow[CU]{[0; a]} f$ .

(c) Les fonctions  $f_n$  sont décroissantes donc

$$\forall x \geq a, f_n(x) \leq f_n(a).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $e^{-a} \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} 0$ , il existe  $a \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall x \geq a$ ,

$$e^{-x} \leq \varepsilon/3.$$

Puisque  $f_n(a) \rightarrow e^{-a}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, |f_n(a) - e^{-a}| \leq \varepsilon/3.$$

Mais alors  $\forall x \geq a$ ,

$$|f_n(x) - e^{-x}| \leq f_n(x) + e^{-x} \leq f_n(a) + e^{-x} \leq (f_n(a) - e^{-a}) + e^{-a} + e^{-x} \leq \varepsilon.$$

De plus,  $f_n \xrightarrow[CU]{[0; a]} f$  donc il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N', \forall x \in [0; a] |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon.$$

Finalement

$$\forall n \geq \max(N, N'), \forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon.$$

Ainsi  $f_n \xrightarrow[CU]{\mathbb{R}_+} f$ .

**Exercice 21 :** [énoncé]

(a) Pour  $x = 0$ ,  $f_n(x) = 0$  et pour  $x > 0$ , on a aussi  $f_n(x) = 0$  pour  $n$  assez grand. Par suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.

(b) On a

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt) dt = \int_0^1 u(1-u) du = \frac{1}{6}.$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  puisque

$$\int_0^1 f_n(t) dt \not\rightarrow \int_0^1 0 dt.$$

(c) Pour  $n$  assez grand,  $\sup_{[a; 1]} |f_n(x)| = 0$  donc  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[a; 1]$ .

**Exercice 22 :** [énoncé]

(a) Pour  $x = 0$ ,  $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$ . Pour  $x \in ]0; \pi/2]$ ,  $\cos x \in [0; 1[$  donc  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

(b) Directement

$$I_n = \left[ -\frac{n}{n+1} \cos^{n+1} x \right]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}$$

donc  $I_n \rightarrow 1 \neq \int_0^{\pi/2} 0 dx$  et il n'y a pas convergence uniforme.

(c) On a

$x$	0	$x_n$	$\pi/2$
$f_n$	0	$f_n(x_n)$	0

avec  $x_n = \arccos \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightarrow 0$  et

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{(1 + 1/n)^{(n+1)/2}} \sim \sqrt{\frac{n}{e}} \rightarrow +\infty.$$

Soit  $[a; b] \subset ]0; \pi/2[$ . On a  $a > 0$  donc à partir d'un certain rang  $x_n < a$  et alors  $\sup_{[a; b]} |f_n| = f_n(a) \rightarrow 0$  donc il y a convergence uniforme sur  $[a; b]$ .

**Exercice 23 : [énoncé]**

- (a) En distinguant le cas  $x = 0$  du cas général, on obtient que la suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = x$ .
- (b) Par étude des variations de  $f_n(x) - f(x)$ , on obtient qu'il y a convergence uniforme si, et seulement si,  $\alpha < 1$ .
- (c) Par un argument de convergence uniforme, on peut échanger limite et intégrale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 24 : [énoncé]**

Pour  $x \geq 0$ , la suite numérique  $(f_n(x))$  est une suite homographique. L'équation  $r = \frac{x}{2+r}$  possède deux solutions  $r_1 = \sqrt{1+x} - 1$  et  $r_2 = -\sqrt{1+x} - 1$ . Posons

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}.$$

On a

$$g_{n+1}(x) = \frac{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_1}}{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_2}} = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2} \frac{2+r_2}{2+r_1} = \rho g_n(x)$$

avec

$$\rho = \frac{2+r_2}{2+r_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Puisque  $|\rho| < 1$ , la suite géométrique  $(g_n(x))$  converge vers 0. Or après résolution de l'équation

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}$$

on obtient

$$f_n(x) = \frac{r_1 - g_n(x)r_2}{1 - g_n(x)}$$

et on en déduit que la suite numérique  $(f_n(x))$  converge vers  $r_1 = \sqrt{1+x} - 1$ . Finalement, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f_\infty : x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$ .

Puisque les fonctions  $f_n$  sont rationnelles de degrés alternativement 0 et 1, la fonction  $|f_n - f_\infty|$  ne peut-être bornée sur  $\mathbb{R}_+$  car de limite  $+\infty$  en  $+\infty$ ; il n'y a donc pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

En revanche, on peut montrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f_\infty$  sur  $[0; a]$  pour tout  $a \geq 0$ .

En effet

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1 - g_n(x)} 2\sqrt{1+x}.$$

D'une part, la fonction  $x \mapsto 2\sqrt{1+x}$  est bornée sur  $[0; a]$ .

D'autre part,

$$g_n(x) = \left( \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right)^n g_0(x).$$

Sur  $[0; a]$ , la fonction

$$x \mapsto \left| \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right|$$

admet un maximum de valeur  $< 1$  et puisque la fonction continue  $g_0$  est bornée sur  $[0; a]$ , on peut montrer que la suite de fonctions  $(g_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0; a]$ .

La relation

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1 - g_n(x)} 2\sqrt{1+x}$$

permet alors d'établir que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f_\infty$  sur  $[0; a]$ .

**Exercice 25 : [énoncé]**

- (a) On vérifie sans peine que la suite  $(f_n)$  est bien définie.

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}, \dots$$

Si  $f(x) = \alpha x^\beta$  alors

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{\alpha} \int_0^x t^{\beta/2} dt = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2} x^{\beta/2+1}.$$

Ainsi  $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$  avec

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n + 2} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} + 1.$$

On a

$$\beta_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \rightarrow 2$$

et, pour  $n \geq 1$ ,

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

On a

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4 - \frac{1}{2^n}} - \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Or  $2^n \geq 2^{n-1}$  donne

$$\frac{2}{4 - \frac{1}{2^n}} \leq \frac{2}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leq \frac{2}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}} (\sqrt{\alpha_{n+1}} - \sqrt{\alpha_n}).$$

Puisque  $\alpha_1 = \alpha_0$ , on obtient alors par récurrence que la suite  $(\alpha_n)$  est décroissante.

Étant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\alpha_n \rightarrow 1/4.$$

On en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction

$$f: x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

De plus

$$f_n(x) - f(x) = \alpha_n(x^{\beta_n} - x^2) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)x^2.$$

Puisque  $\beta_n \leq 2$ , on a pour tout  $x \in [0; 1]$  et en exploitant  $e^u \leq 1 + u$

$$\begin{aligned} 0 \leq x^{\beta_n} - x^2 &= \int_{\beta_n}^2 |\ln(x)| x^t dt \\ &\leq (2 - \beta_n) |\ln(x)| x^{\beta_n} \leq (2 - \beta_n) |\ln(x)| x. \end{aligned}$$

Puisque la fonction  $x \mapsto x|\ln x|$  est bornée par  $1/e$  sur  $[0; 1]$ ,

$$0 \leq x^{\beta_n} - x^2 \leq 2 - \beta_n$$

et ainsi

$$|f_n(x) - f(x)| = \alpha_n(2 - \beta_n) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)$$

et ce majorant uniforme tend vers 0.

Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$  vers  $f$ .

(b) La relation

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt$$

donne à la limite

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

d'où l'on tire  $f$  dérivable et  $f'(x) = \sqrt{f(x)}$ .

Pour l'équation différentielle  $y' = \sqrt{y}$ , il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction  $y: x \mapsto (x/2)^2$  est justement solution.

### Exercice 26 : [énoncé]

(a) Pour tout  $x \in [0; 1]$ , on remarque

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right). \quad (1)$$

On compare la fonction  $x \mapsto \sqrt{x} - P_n(x)$  à une suite de fonctions convergeant uniformément<sup>2</sup> vers la fonction nulle.

Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  l'encadrement

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^n \text{ pour tout } x \in [0; 1].$$

La propriété est immédiate pour  $n = 0$ . Supposons celle-ci vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in [0; 1]$ . Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \text{ car } \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^n \leq 1.$$

2. Par une étude préalable, mais qui n'est pas nécessaire ici, on peut montrer la convergence simple de la suite de fonctions  $(P_n)$  en constatant que, pour tout  $x \in [0; 1]$ , la suite  $(P_n(x))$  est croissante et majorée par  $\sqrt{x}$  donc converge vers  $\ell$ , unique solution positive de l'équation  $\ell = \ell + \frac{1}{2}(x - \ell^2)$ .

On en déduit

$$1 - \sqrt{x} \leq 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \leq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

Le facteur  $\sqrt{x} - P_n(x)$  étant positif, la relation (??) donne

$$(\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)$$

ce qui entraîne, de nouveau par l'hypothèse de récurrence,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{n+1}.$$

La récurrence est établie.

Lorsque  $x$  parcourt  $[0; 1]$ , la valeur  $t = \sqrt{x}$  parcourt aussi  $[0; 1]$ . L'étude qui précède donne donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sup_{x \in [0;1]} |\sqrt{x} - P_n(x)| \leq \sup_{t \in [0;1]} f_n(t) \quad \text{avec} \quad f_n(t) = t\left(1 - \frac{1}{2}t\right)^n.$$

L'étude des variations de la fonction  $f_n$  montre que celle-ci atteint son maximum en la valeur  $2/(n+1)$  et on a donc

$$\sup_{t \in [0;1]} f_n(t) = f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Or

$$f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a donc la convergence uniforme de la suite  $(P_n)$  vers la fonction racine carrée sur  $[0; 1]$ .

(b) On sait  $\sqrt{x^2} = |x|$  pour tout  $x$  réel.

Considérons les fonctions  $Q_n$  définies sur  $[-1; 1]$  par  $Q_n(x) = P_n(x^2)$ . Les fonctions  $Q_n$  sont polynomiales car on vérifie par une récurrence facile que les fonctions  $P_n$  le sont. Aussi, on a

$$\sup_{x \in [-1;1]} |Q_n(x) - |x|| = \sup_{x \in [-1;1]} |P_n(x^2) - \sqrt{x^2}| = \sup_{t \in [0;1]} |P_n(t) - \sqrt{t}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite de fonctions  $(Q_n)$  converge donc uniformément sur  $[-1; 1]$  vers la fonction valeur absolue.

**Exercice 27 : [énoncé]**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) \rightarrow x$  et

$$|f_n(x) - x| = 1/n \rightarrow 0.$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction identité.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x)^2 \rightarrow x^2$  et

$$f_n(n)^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 \rightarrow 2.$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite  $(f_n^2)$ .

**Exercice 28 : [énoncé]**

Par opérations, les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  car  $\sqrt{\cdot}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

La suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  avec  $f(x) = |x|$  qui n'est pas dérivable en 0.

En multipliant par la quantité conjuguée :

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}}.$$

Par suite  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$  puis  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ .

Ainsi la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers une fonction  $f$  qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 29 : [énoncé]**

Par la formule de Taylor Lagrange :

$$\left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) - \frac{1}{n}f'(x)\right| \leq \frac{M}{n^2}$$

avec  $M = \sup|f''|$ .

Par suite

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq \frac{M}{n}$$

et donc

$$\|g_n(x) - f'(x)\|_{\infty, \mathbb{R}} \rightarrow 0.$$

**Exercice 30 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\forall x \in [0; 1], f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0)$$

donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n(0), -f_n(1)) \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|) \leq |f_n(0)| + |f_n(1)| \rightarrow 0.$$

**Exercice 31 :** [\[énoncé\]](#)

Si  $|\omega| > 1$  alors

$$\frac{1}{z - \omega} = -\frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\omega^n}$$

et la convergence normale sur  $U$  de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers

$$z \mapsto \frac{1}{z - \omega}.$$

Si  $|\omega| < 1$ , on peut remarquer que pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{e^{i\theta} - \omega} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \int_0^{2\pi} e^{-i(n+(k+1))\theta} d\theta = 0.$$

Si  $z \mapsto P_n(z)$  est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur  $U$  vers  $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$  alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{\overline{P_n(e^{i\theta})}}{e^{i\theta} - \omega} d\theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - \omega|^2} \neq 0.$$

Or par le calcul précédent, on peut affirmer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\overline{P_n(e^{i\theta})}}{e^{i\theta} - \omega} d\theta = 0.$$

On conclut à une absurdité.

La condition cherchée est  $|\omega| > 1$ .

**Exercice 32 :** [\[énoncé\]](#)

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$u_n(t) = \frac{f(t + 1/n) - f(t)}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(t).$$

La suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge simplement vers  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soient  $[a; b] \subset \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $f'$  est continue sur le compact  $[a; b + 1]$  dont uniformément continue. Il existe alors  $\alpha > 0$  vérifiant

$$\forall (s, t) \in [a; b + 1]^2, |s - t| \leq \alpha \implies |f'(s) - f'(t)| \leq \varepsilon.$$

Pour  $n$  assez grand de sorte que  $1/n \leq \alpha$  et  $t \in [a; b]$ . On peut écrire

$$n(f(t + 1/n) - f(t)) - f'(t) = n \int_t^{t+1/n} (f'(s) - f'(t)) ds$$

et donc

$$|u_n(t) - f'(t)| \leq n \int_t^{t+1/n} |f'(s) - f'(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la convergence de  $(u_n)_{n \geq 1}$  est uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 33 :** [\[énoncé\]](#)

(a) Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $n = 0$  :  $u_0(x) = 1$  et  $u_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$  donc

$0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x$ .

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) dt$$

or  $u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \geq 0$  donc  $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geq 0$  et

$$u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leq \frac{(t - t^2)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n + 1)!}$$

puis

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \frac{x^{n+2}}{(n + 2)!}.$$

Récurrence établie.

(b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}.$$

Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique

$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$

et donc convergence de la suite  $(u_n(x))$ .

(c) Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x)) \right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi  $(u_n)$  converge uniformément vers  $u$ . On en déduit que  $u$  est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in [0; 1], \int_0^x u_n(t - t^2) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^x u(t - t^2) dt.$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0; 1], u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt.$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car  $u(0) = 1$ ) et dérivable avec

$$u'(x) = u(x - x^2).$$

### Exercice 34 : [énoncé]

(a) Les fonctions  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

Par le critère spécial des séries alternées,  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  converge simplement sur  $]0; +\infty[$  vers  $S$ .

Soi  $a > 0$ . Sur  $[a; +\infty[$ ,

$$\|f'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{(n+a)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$$

donc  $\sum f'_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$  puis converge uniformément sur tout segment de  $[a; +\infty[$ .

Par théorème,  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ . Celle-ci est donc du signe de son premier terme  $\frac{-1}{x^2}$ . Ainsi  $S'(x) \leq 0$  et la fonction  $S$  est décroissante.

(c)

$$S(x+1) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}.$$

(d) Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$  et  $S(x+1) \rightarrow S(1)$  donc

$$S(x) \sim \frac{1}{x}.$$

(e) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{1}{2}(S(x) + S(x+1)) \leq S(x) \leq \frac{1}{2}(S(x) + S(x-1))$$

avec  $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$  donne

$$S(x) \sim \frac{1}{2x}.$$

### Exercice 35 : [énoncé]

Posons  $u_n : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Par le critère spécial,  $\sum u_n(x)$  converge pour chaque  $x > 0$ .

Il y a convergence simple de la série de fonctions définissant  $F$ .

(b) Les fonctions  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour  $n \geq 1$

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

On a

$$\|u'_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Il y a convergence normale  $\sum u'_n$  pour  $n \geq 1$ .

Il y a donc convergence uniforme de  $\sum u'_n$  (pour  $n \geq 0$ ) et l'on peut donc conclure que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

De la même manière, on obtient  $F$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

(c) Par décalage d'indice

$$F(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

et donc

$$F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$$

(d) Posons

$$G(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

L'intégrale est bien définie pour  $x > 0$  et l'on remarque

$$G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}.$$

Posons  $H = F - G$ . La fonction  $H$  est 2-périodique, montrons qu'elle tend vers 0 en  $+\infty$ .

Par application du critère spécial, on a

$$\forall x > 0, F(x) \geq 0$$

donc

$$0 \leq F(x) \leq F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et par encadrement  $F$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

Le même raisonnement se transpose à  $G$ .

On peut conclure que  $H$  tend vers 0 en  $+\infty$  puis finalement  $H$  est nulle.

(e) Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $F(x+1) \rightarrow F(1)$  par continuité et donc

$$F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On vérifie aisément que  $F$  est décroissante et puisque

$$\frac{1}{x} = F(x) + F(x+1) \leq 2F(x) \leq F(x) + F(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

on obtient

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

**Exercice 36 :** [énoncé]

(a)  $f_n: x \mapsto \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)}$ ,  $f_n$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

Soit  $a > 0$ . Sur  $[a; +\infty[$ ,

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{a} \frac{1}{n!}.$$

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$  donc converge uniformément sur tout segment de  $]0; +\infty[$ . Par théorème, la somme  $S$  de la série  $\sum f_n$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

(b)

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+1+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} S(x+1).$$

(c) Par convergence uniformément sur  $[a; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} S(x+1) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$

Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$S(x+1) \rightarrow S(1)$$

par continuité et

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = e - 1$$

donc

$$S(x) = \frac{1 + S(x+1)}{x} \sim \frac{e}{x}.$$

**Exercice 37 :** [énoncé]

(a) Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire  $f_n(x) = x(\text{th})'(c)$  avec  $c \in ]n; x+n[$ . Puisque  $(\text{th})'(c) = \frac{1}{\text{ch}^2(c)}$ , on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{\text{ch}^2(n)} \sim \frac{4x}{e^{2n}}.$$

Par suite  $n^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\sum f_n(x)$  est absolument convergente donc convergente. Ainsi  $\sum f_n$  converge simplement.

(b) Pour  $a \in \mathbb{R}_+$ , l'étude qui précède donne

$$\|f_n\|_{\infty, [0; a]} \leq \frac{a}{\operatorname{ch}^2(n)}$$

donc  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0; a]$ . Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonction continue, on peut affirmer que  $S$  est continue. De plus, les fonctions sommées étant toutes strictement croissantes, la somme  $S$  l'est aussi.

En effet, pour  $x < y$ ,

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) < \sum_{k=1}^n f_k(y)$$

donne à la limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)$$

et puisque  $f_0(x) < f_0(y)$ , on parvient à

$$S(x) < S(y).$$

(c)

$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n+1)) + \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(n+1) - \operatorname{th}(n))$$

avec convergence des deux séries introduites.

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n+1)) = S(x) - \operatorname{th} x$$

et par étude la limite des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(n+1) - \operatorname{th} n) = 1.$$

On conclut à la relation proposée.

(d)  $S$  admet une limite en  $+\infty$  car c'est une fonction monotone. Pour déterminer celle-ci, étudions la limite de la suite  $(S(n))$ . La nature de la suite  $S(n)$  est celle de la série de terme général

$$S(n+1) - S(n) = 1 - \operatorname{th} n.$$

Or

$$1 - \operatorname{th} n = \frac{\operatorname{ch} n - \operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n} = \frac{e^{-n}}{\operatorname{ch} n} \sim \frac{1}{2e^{-2n}}$$

est terme général d'une série absolument convergente.

On en déduit que la suite  $(S(n))$  converge et donc que la fonction  $S$  converge.

**Exercice 38 : [énoncé]**

Puisque la fonction  $f$  est décroissante, elle admet une limite en  $+\infty$ . Puisque la fonction  $f$  est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction  $f$  est positive.

Par télescopage, on observe

$$g(x+N) - g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x+k)$$

et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à  $g$  en  $+\infty$ , on est tenté de poser

$$g(x) = - \sum_{k=0}^{+\infty} f(x+k).$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . On a pour  $k \geq 1$

$$0 \leq f(x+k) \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x+k)| \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

Par intégrabilité de  $f$ , il y a convergence de la série

$$\sum \int_{k-1}^k f(t) dt$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k \geq 1} f(x+k).$$

L'adjonction du terme d'indice  $k = 0$  ne change rien et l'on peut conclure.

On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.



**Exercice 39 : [énoncé]**

On introduit les fonctions sommées :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \quad \text{avec } x > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction  $S$  apparaît comme la somme de la série de fonctions  $\sum f_n$ .

(a) Pour tout  $x > 0$ , la série numérique  $\sum f_n(x)$  satisfait les hypothèse du critère spécial des séries alternées car

$$f_n(x) = (-1)^n |f_n(x)| \quad \text{et} \quad |f_n(x)| = \frac{1}{n!(x+n)} \quad \text{décroit vers } 0$$

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]0; +\infty[$ . Aussi, les fonctions  $f_n$  sont toutes de classe  $\mathcal{C}^1$  avec

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Le critère spécial s'applique aussi à la série numérique  $\sum f'_n(x)$  ce qui donne la convergence simple de  $\sum f'_n$  sur  $]0; +\infty[$ . Au surplus, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , le critère spécial permet de majorer le reste de la série par le premier terme qui l'exprime

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(x+k)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+1)^2} = \alpha_n.$$

Puisque ce majorant uniforme est de limite nulle, on peut affirmer la convergence de la série  $\sum f'_n$  sur  $]0; +\infty[$ . On en déduit que la fonction  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  avec

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

(b) Par le critère spécial appliqué à  $\sum f'_n(x)$ , la somme donnant  $S'(x)$  est du signe de son premier terme, c'est à dire négatif : la fonction  $S$  est décroissante. Aussi, par le critère spécial appliqué cette fois-ci à  $\sum f_n(x)$ , on peut encadrer  $S(x)$  par des sommes partielles consécutives. En particulier,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq S(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Par théorème d'encadrement, on obtient que  $S$  tend vers 0 en  $+\infty$ . Par théorème de minoration, on obtient que  $S$  tend vers  $+\infty$  en  $0^+$ .

(c) Par glissement d'indice dans la deuxième somme et en isolant le premier terme dans l'autre, on écrit

$$\begin{aligned} xS(x) - S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{x}{n!(x+n)} + \frac{1}{(n-1)!(x+n)} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

car on reconnaît dans la dernière somme la valeur de la série exponentielle en  $-1$ .

(d) On emploie la relation fonctionnelle obtenue à la question précédente pour déterminer les équivalents souhaités.

Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $S(x+1)$  est de limite nulle. Par conséquent,

$$xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \quad \text{donc} \quad S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{ex}.$$

Quand  $x$  tend vers  $0^+$ ,  $S(x+1)$  tend vers  $S(1)$  par continuité de  $S$ . Ceci donne

$$xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e} + S(1)$$

avec

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{1}{e}.$$

On en déduit

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

**Exercice 40 : [énoncé]**

On a

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où l'existence de la somme.

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+k}.$$

Or

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+1+k} = \sum_{k=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+k}$$

donc à la limite quand  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient  $f(x+1) = f(x)$ .

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} = 2 \sum_{k=-2N+1}^{2N+1} \frac{1}{x+k}$$

donne à la limite

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x).$$

**Exercice 41 : [énoncé]**

Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.

Soit  $f$  une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer  $f(0) = 0$ .

On a

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

donc

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^{n+1})}{2^n}.$$

Posons  $h(x) = \sup_{[0;x]} |f|$ .

Pour  $x > 0$ , on a  $x^{n+1} \in [0; x^2]$  pour tout  $n \geq 1$ . On en déduit

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} h(x^2) = h(x^2).$$

Ainsi  $h(x) \leq h(x^2)$  puis en itérant  $0 \leq h(x) \leq h(x^{2^n})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Or pour  $x \in [0; 1[$ ,  $x^{2^n} \rightarrow 0$  et  $\lim_{0+} h = 0$  (car  $f(0) = 0$ ) donc  $h(x) = 0$  sur  $[0; 1[$ .

Finalement  $f$  est nulle sur  $[0; 1[$  puis en 1 par continuité.

**Exercice 42 : [énoncé]**

(a) Si  $f$  est constante égale à  $C$  alors l'équation (E) est vérifiée si, et seulement si,  $C = 2C - 2C^2$ . Cette dernière équation est vérifiée pour  $C = 0$  et  $C = 1/2$  seulement.

(b) Après substitution et étude séparée du cas  $x = 0$ , on obtient  $f$  solution de (E) si, et seulement si,  $h$  vérifie

$$h(2x) = h(x) - xh(x)^2.$$

(c) L'application  $T_x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $T'_x(y) = 1 - xy$ . Sur  $[0; 1]$ , on vérifie  $|T'_x(y)| \leq 1$  et la fonction  $T_x$  est donc 1-lipschitzienne sur  $[0; 1]$ . Au surplus, la fonction  $T_x$  est croissante sur  $[0; 1]$  avec  $T_x(0) = 0$  et  $T_x(1) = 1 - x/2$ . On

en déduit  $T_x([0; 1]) \subset [0; 1]$ .

Par une récurrence immédiate, on vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], h_n(x) \in [0; 1].$$

Pour  $n \geq 1$  et  $x \in [0; 1]$ , on a par lipschitzianité

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right|.$$

En répétant cette majoration

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La série télescopique  $\sum h_{n+1}(x) - h_n(x)$  converge donc absolument et la suite  $(h_n(x))$  est donc convergente. La suite de fonctions  $(h_n)$  converge donc simplement vers une fonction  $h$ . Au surplus

$$|h(x) - h_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La convergence de la suite  $(h_n)$  est donc uniforme sur  $[0; 1]$ .

(d) La fonction  $h$  est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur  $[0; 1]$ . En passant à la limite la relation

$$\forall x \in [0; 1], h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient l'identité

$$\forall x \in [0; 1], h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Puisque  $h_n(0) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $h(0) = 1$  et la fonction  $h$  n'est pas nulle. On peut alors définir la fonction  $f: x \mapsto xh(x)$  qui est continue, non constante et vérifie

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

(e) On peut ensuite définir une solution sur  $[0; 2]$  en posant

$$\forall x \in ]1; 2], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Cette solution est bien continue en 1 car

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1).$$

De même, on prolonge la solution sur  $[0; 4]$ ,  $[0; 8]$ , etc.

**Exercice 43 : [énoncé]**

(a) Pour  $x > 0$ ,  $u_n(x) = O(1/n^2)$ . La série  $\sum u_n(x)$  converge absolument.

La série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ , les fonctions  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  avec

$$u'_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}.$$

Soit  $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$ . Par monotonie, pour tout  $x \in [a; b]$

$$|u'_n(x)| \leq |u'_n(a)| + |u'_n(b)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il y a donc convergence normale de  $\sum u'_n$  sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction somme de  $\sum u_n$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  et la fonction  $f$  l'est aussi par opérations.

(b) La fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Il est immédiat que  $f(1)$  est nul et, pour tout  $x > 0$ , on a après télescopage

$$f'(x+1) - f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = \frac{1}{x}$$

et

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= f(2) = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut affirmer  $f(x+1) - f(x) = \ln x$ . Enfin,  $f$  est convexe en tant que somme de fonctions qui le sont.

Inversement, soit  $g$  une autre fonction vérifiant les conditions proposées. Étudions la fonction  $h = f - g$ .

La fonction  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , 1-périodique et prend la valeur 0 en 1. Nous allons montrer qu'elle est constante en observant que sa dérivée est nulle. Pour  $x > 0$ , on a par croissance des dérivées de  $f$  et de  $g$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \leq f'(\lfloor x \rfloor + 1) - g'(\lfloor x \rfloor) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor} + h'(\lfloor x \rfloor)$$

et parallèlement

$$h'(x) \geq h'(\lfloor x \rfloor) - \frac{1}{\lfloor x \rfloor}.$$

La fonction  $h'$  est 1-périodique, les valeurs  $h'(\lfloor x \rfloor)$  sont donc constantes égales à  $C$ .

En passant à la limite quand  $x \rightarrow +\infty$  l'encadrement

$$C - \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \leq h'(x) \leq C + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$$

on obtient que la fonction  $h'$  présente une limite en  $+\infty$ . Puisque  $h'$  est périodique cette fonction est constante et, puisque la fonction  $h$  est périodique, la fonction  $h'$  est constante égale à 0.

(c) On reconnaît en premier membre la fonction  $\Gamma$  « connue » indéfiniment dérivable avec

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On sait aussi  $\Gamma > 0$ ,  $\Gamma(1) = 1$  et  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

Considérons alors  $f(x) = \ln(\Gamma(x))$ .

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $f(x+1) - f(x) = \ln x$ ,  $f(1) = 0$  et  $f$  convexe car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

ce qui conduit à  $f'' \geq 0$ .

On peut donc affirmer

$$\Gamma(x) = e^{f(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^n \frac{(1 + \frac{1}{k})^x}{1 + \frac{x}{k}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et on peut conclure sachant  $n+1$  équivalent à  $n$ .

**Exercice 44 : [énoncé]**

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq 1/n^2.$$

Puisque  $\sum 1/n^2$  converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 45 : [énoncé]**

On a  $\|f_n\|_\infty = 1/n$  or  $\sum 1/n$  diverge donc il n'y a pas convergence normale sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , la série numérique  $\sum f_n(x)$  satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur  $\mathbb{R}$  et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$

donc  $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$ . Il y a donc convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 46 : [énoncé]**

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , introduisons  $k = \lfloor x \rfloor$ . Pour  $N \geq k+1$ , on a

$$\sum_{n=0}^N u_n(x) = \frac{1}{k+1}$$

et donc la série de fonctions converge simplement sur  $[0; +\infty[$  vers  $S$  avec

$$S(x) = \frac{1}{k+1} \text{ pour } x \in [k; k+1[.$$

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a

$$S(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < N+1 \\ S(x) & \text{si } x \geq N+1 \end{cases}$$

et donc

$$\left| S(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Il y a donc convergence uniforme sur  $[0; +\infty[$ .

Enfin,  $\|u_n\|_\infty = 1/(n+1)$  n'est pas sommable, il n'y a pas convergence normale.

**Exercice 47 : [énoncé]**

(a) Par croissance comparée, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.

La fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} (n-x) e^{-x}.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de  $f_n$  et affirmer

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n}.$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0; +\infty[$ .

(b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et sa somme est égale à 1.

Il ne peut y avoir convergence normale sur  $[a; +\infty[$  car  $f_n(n)$  n'est pas sommable.

En revanche sur  $[0; a]$ , il y a convergence normale car pour  $n$  assez grand de sorte que  $n \geq a$ , on a

$$\sup_{x \in [0; a]} |f_n(x)| = f_n(a).$$

Il y a aussi *a fortiori* convergence uniforme sur  $[0; a]$ .

Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de  $+\infty$ , on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité  $1 = 0$ .

Il n'y a donc pas convergence uniforme sur  $[0; +\infty[$ .

### Exercice 48 : [énoncé]

- (a) Pour  $x = 1$ ,  $u_n(x) = 0$  et la série numérique  $\sum u_n(x)$  est convergente.  
 Pour  $x \in [0; 1[$ , on peut écrire  $0 \leq u_n(x) \leq a_0 x^n (1-x) = \lambda x^n$ . Or il y a convergence de la série numérique  $\sum x^n$  et donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum u_n(x)$  converge.
- (b) Après étude de fonction, on obtient

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |u_n(x)| = \frac{a_n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{a_n}{en}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la convergence normale de  $\sum u_n$  équivaut à la convergence de  $\sum a_n/n$ .

- (c) Considérons le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x).$$

Par la décroissance de la suite  $(a_n)$

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x).$$

Ainsi, pour  $x \in [0; 1[$  ou  $x = 1$ , on obtient

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1}.$$

Par cette majoration uniforme, on peut affirmer que, si  $(a_n)$  tend vers 0, alors la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément.

Inversement, supposons la série  $\sum u_n$  uniformément convergente.

La suite  $(a_n)$  étant décroissante et positive, elle admet nécessairement une limite  $\ell \geq 0$ . On a alors

$$\forall x \in [0; 1[, R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k (1-x) = \ell x^{n+1} \geq 0.$$

On obtient donc

$$\forall x \in [0; 1[, \ell x^{n+1} \leq \|R_n\|_\infty.$$

En faisant  $x \rightarrow 1^-$ ,

$$\ell \leq \|R_n\|_\infty$$

et ceci valant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on conclut  $\ell = 0$

### Exercice 49 : [énoncé]

Remarquons que pour tout  $t \in [0; 1]$ ,

$$t - t^2 \in [0; 1/4].$$

Pour  $x \in [0; 1/4]$ ,

$$|u_{n+1}(x)| \leq x \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4} \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]}.$$

Par une récurrence facile, on obtient

$$\|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

Par la remarque initiale, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$|u_{n+1}(x)| \leq \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\|u_{n+1}\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

On peut conclure que la série  $\sum u_n$  est normalement convergente.

### Exercice 50 : [énoncé]

La fonction  $u_n$  est dérivable avec

$$u'_n(x) = \frac{1 - n^2 x}{(1 + n^2 x)^3}.$$

Les variations de  $u_n$  sur  $[0; +\infty[$  fournissent

$$\|u_n\|_\infty = u_n(1/n^2) = \frac{1}{4n^2}.$$

La série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[0; +\infty[$ , *a fortiori* uniformément et simplement.

Soit  $a > 0$ . Pour  $x \geq a$ ,

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1 + n^2 x}{(1 + n^2 x)^3} = \frac{1}{(1 + n^2 a)^2} \sim \frac{1}{a^2 n^4}.$$

La série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$ .

En revanche, il n'y a pas convergence en 0, ni convergence uniforme sur  $]0; a]$  car le théorème de la double limite ne peut s'appliquer en 0.

**Exercice 51 : [énoncé]**

Étudions la convergence simple.

Pour  $x = 0$ , la série  $\sum f_n(0)$  converge car tous ses termes sont nuls.

Pour  $x > 0$ , la série  $\sum f_n(x)$  converge absolument car son terme général est négligeable devant  $1/n^2$  puisque

$$n^2 f_n(x) = \frac{\sin(x)e^{-nx+2\ln(n)}}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin(x)e^{-nx+o(n)}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .

Étudions la convergence normale. Les fonctions  $f_n$  sont bornées sur  $\mathbb{R}_+$  car continues et de limites nulles en  $+\infty$ . On peut alors introduire  $\|f_n\|_\infty$  que l'on peut calculer en étudiant les variations de  $f_n$ . On peut cependant être plus efficace :

*On peut minorer  $\|f_n\|_\infty$  en prenant appui sur une valeur.*

En considérant la valeur de la fonction en  $x = 1/n$ ,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in ]0; +\infty[} |f_n(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \frac{e^{-1}}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n \ln(n)}.$$

La série de terme général  $\frac{1}{n \ln(n)}$  diverge<sup>3</sup> et, donc par équivalence de série à termes positifs, il en est de même de la série des  $\|f_n\|_\infty$ . Il n'y a pas convergence normale sur  $\mathbb{R}_+$  de la série de fonctions étudiée.

Étudions la convergence uniforme. On introduit  $R_n$  le reste de rang  $n$  de la série de fonctions. Pour  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|e^{-kx}}{\ln(k)}.$$

*Par majoration, on extrait le logarithme de la somme afin de se ramener à la somme d'une série que l'on sait calculer.*

Pour  $k \geq n + 1$ , on a  $\ln(k) \geq \ln(n + 1)$  et donc

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n + 2)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\sin(x)|e^{-kx}.$$

Lorsque  $x = 0$ , les termes sommés sont tous nuls et, lorsque  $x > 0$ , on obtient par sommation géométrique de raison  $e^{-x} \in [0; 1[$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n + 2)} \frac{\sin(x)e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n + 2)} \frac{|\sin(x)|e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

3. Voir sujet 20171101.

Introduisons alors la fonction  $\varphi$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x)e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Celle-ci est bornée car continue, de limite nulle en  $+\infty$  et admet une limite finie en  $0^+$

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{(x + o(x))e^{-x}}{1 - (1 - x + o(x))} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1.$$

On a donc, pour tout  $x > 0$  et aussi pour  $x = 0$ ,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n + 2)} \sup_{t \in ]0; +\infty[} |\varphi(t)|.$$

Ce majorant uniforme étant de limite nulle, il y a convergence uniforme de la série de fonctions étudiée.

**Exercice 52 : [énoncé]**

(a) Posons  $u_n(x) = 1/n^x$  définie sur  $]1; +\infty[$ .

La série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $]1; +\infty[$  ce qui assure la bonne définition de  $\zeta(x)$ .

Plus précisément, pour  $a > 1$ , on a

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \text{ avec } \sum u_n(a) \text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions  $u_n$  sur  $[a; +\infty[$ .

Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que  $\zeta$  tend en  $+\infty$  vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

(b) Posons  $v_n(x) = \zeta(n)x^n/n$ . Pour  $x \neq 0$ , on a

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour  $|x| < 1$  et diverge pour  $|x| > 1$  (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1).

Pour  $x = 1$ , il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

Pour  $x = -1$ , il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite  $((-1)^n \zeta(n)/n)$  est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car  $\zeta(n+1) \leq \zeta(n)$ .

- (c) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction  $F$  est assurément de classe  $\mathcal{C}^1$  (et même  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $] -1; 1[$ .

Les fonctions  $v_n$  sont continues sur  $[-1; 0]$  et l'on vérifie que la série  $\sum v_n(x)$  satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout  $x \in [-1; 0]$ . On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq |v_{n+1}(x)| \leq \frac{\zeta(n)}{n}.$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions  $\sum v_n$  sur  $[-1; 0]$  et sa somme  $F$  est donc continue.

- (d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour  $x \in ] -1; 1[$ ,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}.$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p \geq 1} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right| \text{ et } \sum_{n \geq 1} \sum_{p=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right|.$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{p-x} - \frac{1}{p} \right).$$

La série de fonction associée converge normalement sur tout segment de

$] -1; 1[$  et on peut donc intégrer terme à terme

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{p-t} - \frac{1}{p} \right) dt \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{p-t} - \frac{1}{p} dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{p}{p-x} \right) - \frac{x}{p}. \end{aligned}$$

**Exercice 53 : [énoncé]**

Chaque  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  et

$$f'_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^x}.$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement vers  $\eta$  sur  $]0; +\infty[$ .

La suite  $(f'_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est alternée. Étudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}.$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}.$$

Pour  $\ln t \geq 1/x$ ,  $\varphi'(t) \leq 0$  donc  $\varphi$  décroissante sur  $[e^{1/x}; +\infty[$ . Ainsi  $(f'_n(x))_{n \geq 1}$  est décroissante à partir du rang  $[e^{1/x}] + 1$  et tend vers 0. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour  $a > 0$  et pour  $n \geq [e^{1/a}] + 1$  on a pour tout  $x \in [a; +\infty[$ ,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \rightarrow 0$$

$\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[a; +\infty[$  donc converge uniformément sur tout segment de  $]0; +\infty[$ .

On peut alors conclure que la fonction  $\eta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 54 : [énoncé]**

Par le critère spécial des séries alternées,  $\eta$  est bien définie sur  $]0; +\infty[$ .

$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$  et

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p} \frac{(\ln n)^p}{n^x}.$$

La suite  $(f_n^{(p)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est alternée. Étudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{(\ln t)^p}{t^x}.$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{\ln(t)^{p-1}(p - x \ln t)}{t^{x+1}}.$$

Pour  $\ln t \geq p/x$ ,  $\varphi'(t) \leq 0$  donc  $\varphi$  décroissante sur  $[e^{p/x}; +\infty[$ . Ainsi  $(f_n^{(p)}(x))_{n \geq 1}$  est décroissante à partir du rang  $\lfloor e^{p/x} \rfloor + 1$  et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour  $a > 0$  et pour  $n \geq \lfloor e^{p/a} \rfloor + 1$  on a pour tout  $x \in [a; +\infty[$ ,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} (\ln k)^p}{k^x} \right| \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^x} \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a} \rightarrow 0$$

$\sum f_n^{(p)}$  converge uniformément sur  $[a; +\infty[$  (pour tout  $a > 0$ ) donc converge simplement sur  $]0; +\infty[$  et converge uniformément sur tout segment de  $]0; +\infty[$ . Par théorème, on peut alors conclure que  $\eta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 55 : [énoncé]**

La convergence pour  $x > 0$  de la série définissant  $\zeta_2(x)$  est acquise par le critère spécial des séries alternées.

On peut combiner les termes d'indices impairs avec les termes d'indices pairs qui suivent

$$\zeta_2(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(2p-1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \right).$$

Considérons alors la fonction  $f : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(t) = \frac{1}{(2t-1)^x} - \frac{1}{(2t)^x}.$$

La fonction  $f$  est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

puis en sommant ces encadrements

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \zeta_2(x) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2(1-x)} \left[ (2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} \right]_1^{+\infty}$$

avec

$$(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} = -(2t)^{1-x} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2t} \right)^{1-x} \right) \sim (x-1)(2t)^{-x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2(1-x)} (2^{1-x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}.$$

De plus

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2^x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

et donc par encadrement

$$\zeta_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}.$$

**Exercice 56 : [énoncé]**

(a)  $\zeta$  est définie sur  $]1; +\infty[$  et  $\eta$  est définie sur  $]0; +\infty[$  (via le critère spécial des séries alternées)

(b)  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$  est continue.  
Pour tout  $a > 1$ ,

$$\left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^a}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{n^a}$$

or  $\sum \frac{1}{n^a}$  converge donc  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$  puis converge uniformément sur tout segment inclus dans  $]1; +\infty[$ . Par théorème, on obtient que la fonction  $\zeta$  est continue.



$g_n: x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$  est continue.

Par le critère spécial des séries alternées

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x}.$$

Pour tout  $a > 0$ ,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{(N+1)^a}$$

donc  $\sum g_n$  converge uniformément sur  $[a; +\infty[$  puis converge uniformément sur tout segment inclus dans  $]0; +\infty[$ . Par théorème on obtient que la fonction  $\eta$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

(c) Pour  $x > 1$

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^x} = \zeta(x) - 2^{1-x} \zeta(x).$$

**Exercice 57 : [énoncé]**

(a) Supposons le domaine de définition  $I$  non vide. Considérons  $x \in I$ . Puisque la suite  $(u_n)$  tend vers l'infini, il existe un rang  $N$  au-delà duquel tous ses termes sont supérieurs à 1. Pour tout réel  $y \geq x$  et tout  $n \geq N$

$$u_n^y = e^{y \ln u_n} \geq e^{x \ln u_n} = u_n^x \text{ donc } \frac{1}{u_n^y} \leq \frac{1}{u_n^x}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série définissant  $f(y)$ . Ainsi

$$x \in I \implies [x; +\infty[ \subset I.$$

Lorsqu'il n'est pas vide, le domaine est donc un intervalle non majoré.

(b) Les fonctions  $f_n: x \mapsto 1/u_n^x$  sont continues sur  $I$  et on a la convergence normale de la série de fonctions  $\sum_{n \geq N} f_n$  sur tout intervalle  $[a; +\infty[$  inclus dans  $I$  car

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a; +\infty[, \left| \frac{1}{u_n^x} \right| = \frac{1}{u_n^x} \leq \frac{1}{u_n^a} = \alpha_n$$

avec  $\sum \alpha_n$  convergente.

Par théorème, on peut affirmer que la fonction  $f$  somme de  $\sum f_n$  est continue.

- (c) — Pour  $u_n = \ln n, I = \emptyset$ .
- Pour  $u_n = n, I = ]1; +\infty[$  (cf. séries de Riemann).
- Pour  $u_n = n(\ln n)^2, I = [1; +\infty[$  (cf. séries de Bertrand).

**Exercice 58 : [énoncé]**

(a) Soit  $s = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^a}.$$

Par conséquent, si  $a > 1$ , la série  $\sum 1/n^s$  converge absolument et donc converge.

(b) Soit  $s$  tel que  $\text{Re}(s) > 1$ . En développant

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^s}.$$

Par absolue convergence, on peut séparer la première somme en deux paquets, celui des termes d'indices pairs et celui des termes d'indices impairs. Il vient alors

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^s} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^s}. \tag{2}$$

En regroupant ces sommes, on obtient

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

avec sommabilité de la somme en second membre.

(c) En reprenant, l'expression (??), étudions

$$F(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^s} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^s} = \sum_{p=1}^{+\infty} u_p(s)$$

avec

$$u_p(s) = \frac{(2p)^s - (2p-1)^s}{(2p)^s(2p-1)^s}$$

définie pour  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(s) > 0$ .

Pour  $s = a + ib$  fixé, la fonction  $f : t \mapsto t^s$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[2p - 1; 2p]$  et

$$|f'(t)| = |st^{s-1}| = |s|t^{a-1} \leq |s|((2p - 1)^{a-1} + (2p)^{a-1}).$$

Par l'inégalité des accroissements finis

$$|(2p)^s - (2p - 1)^s| \leq |s|((2p - 1)^{a-1} + (2p)^{a-1})$$

donc

$$\begin{aligned} |u_p(s)| &\leq |s| \frac{((2p - 1)^{a-1} + (2p)^{a-1})}{(2p)^a(2p - 1)^a} \\ &\leq |s| \left( \frac{1}{(2p)^a(2p - 1)} + \frac{1}{(2p)(2p - 1)^a} \right). \end{aligned}$$

Introduisons alors

$$\Omega_{\alpha,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \alpha \text{ et } |z| \leq R\} \quad \text{pour } \alpha, R > 0.$$

Les fonctions  $u_n$  sont continues sur  $\Omega_{\alpha,R}$  et pour tout  $s \in \Omega_{\alpha,R}$

$$|u_n(s)| \leq |R| \left( \frac{1}{(2p)^\alpha(2p - 1)} + \frac{1}{(2p)(2p - 1)^\alpha} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right).$$

La série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $\Omega_{\alpha,R}$  et sa fonction somme  $F$  est définie et continue sur  $\Omega_{\alpha,R}$ . Ceci valant pour tous  $\alpha$  et  $R$  strictement positifs, on obtient que  $F$  est définie et continue sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)\}$ . Enfin, la fonction  $s \mapsto 1 - 2^{1-s}$  étant continue et ne s'annulant pas sur  $\Omega$ , on peut prolonger  $\zeta$  par continuité sur  $\Omega$  en posant

$$\zeta(s) = \frac{F(s)}{1 - 2^{1-s}}.$$

**Exercice 59 : [énoncé]**

(a) Pour  $x \in ]0; 1[$ , on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1 + x^2}.$$

Cette relation vaut aussi pour  $x = 0$  ou  $x = 1$ .

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x \right| \leq x^{2(n+2)} |\ln x|.$$

L'étude de  $\varphi : x \mapsto x^{2(n+2)} |\ln x|$  donne

$$\forall x \in [0; 1], x^{2(n+2)} |\ln x| \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)} \rightarrow 0.$$

(c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \ln x dx - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1 + x^2} dx$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur  $[0; 1]$ . Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

**Exercice 60 : [énoncé]**

$$\left\| \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \right\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{n^2}$$

est le terme générale d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment  $[0; 1]$  :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} d\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{2\alpha d\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \pi \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{sh} \pi \alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

donc

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} d\alpha = \left[ \ln \frac{\operatorname{sh} \pi \alpha}{\alpha} \right]_0^1 = \ln \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}.$$

On en déduit que

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\text{sh } \pi}{\pi}.$$

**Exercice 61 : [énoncé]**

Pour  $x \leq 0$ , il y a divergence grossière.

Pour  $x > 0$ ,  $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n} + 2 \ln n} \rightarrow 0$  donc  $\sum e^{-x\sqrt{n}}$  est absolument convergente. Ainsi  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$ .

Pour  $a > 0$ , sur  $[a; +\infty[$ ,  $|e^{-x\sqrt{n}}| \leq e^{-a\sqrt{n}}$ . Cela permet d'établir la convergence normale de la série de fonctions sur  $[a; +\infty[$ . Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

Par convergence uniforme sur  $[1; +\infty[$ , on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 1.$$

Pour  $x > 0$  fixé, la fonction  $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$  est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

En sommant (avec  $n = 0$  à part pour la majoration) on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2}.$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2}$$

quand  $x \rightarrow 0^+$ .

**Exercice 62 : [énoncé]**

Par le critère spécial des séries alternées, il est immédiate de justifier que  $S(t)$  est définie pour tout  $t > 0$ .

On peut réorganiser l'expression de  $S(t)$  de la façon suivante :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^{2p}}{2pt+1} + \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)t+1} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t}{(2pt+1)((2p+1)t+1)}.$$

La fonction  $f_t: x \mapsto \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}$  est décroissante.

Par comparaison avec une intégrale, on obtient l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f_t(x) dx \leq S(t) \leq \int_0^{+\infty} f_t(x) dx.$$

Puisque par les calculs précédents

$$\frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} = \frac{1}{2xt+1} - \frac{1}{(2x+1)t+1}.$$

On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} dx = \left[ \frac{1}{2t} \ln \frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)} \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(1+t)}{2t}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} dx = \left[ \frac{1}{2t} \ln \frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)} \right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1+3t) - \ln(1+2t)}{2t}.$$

Quand  $t \rightarrow 0^+$ , on obtient par encadrement  $S(t) \rightarrow 1/2$ .

**Exercice 63 : [énoncé]**

- (a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série numérique  $\sum u_n(x)$  satisfait le critère spécial des séries alternées donc la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ . De plus

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right\|_{\infty} \leq \ln \left( 1 + \frac{x^2}{(N+1)(1+x^2)} \right) \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{N+1} \right) \rightarrow 0$$

donc la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

- (b)  $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(1+1/n)$ . Par convergence uniformément

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+1/n).$$

Pour calculer cette somme, manipulons les sommes partielles et séparons les termes d'indice pair de ceux d'indice impair

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^N \ln(2n+1) - \ln(2n) + \sum_{n=1}^N \ln(2n-1) - \ln(2n)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\left(\frac{(2N)!}{(2^N N!)^2}\right)^2 (2N+1)\right).$$

Or

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1 + 1/n) \sim \ln(2/\pi).$$

On en déduit

$$\ell = \ln(2/\pi).$$

**Exercice 64 : [énoncé]**

Posons

$$f_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \text{ pour } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon.}$$

Pour  $k \in \mathbb{N}$  fixé,

$$f_k(n) \rightarrow \exp(-k\alpha).$$

Pour  $k \leq n$

$$|f_k(n)| = \exp(n\alpha \ln(1 - k/n)) \leq e^{-k\alpha}$$

et cette majoration vaut aussi pour  $k > n$ .

Ainsi

$$\|f_k\|_{\infty, \mathbb{N}} \leq e^{-k\alpha}$$

et donc la série  $\sum f_k$  converge normalement sur  $A = \mathbb{N}$ .

Par interversion limite/somme infinie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\alpha}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

**Exercice 65 : [énoncé]**

Par la formule du binôme

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k}.$$

Considérons  $f_k : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  définies par

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k} \text{ si } x \geq k \text{ et } f_k(x) = 0 \text{ sinon.}$$

En tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k} = \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p.$$

La série de fonctions  $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$  converge simplement vers  $x \rightarrow \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x$  en tout

$p \in \mathbb{N}$ . De plus, puisque  $|f_k(x)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$ , la convergence est normale sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour  $k$  fixé, quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} \frac{z^k}{k!} \rightarrow \frac{z^k}{k!}.$$

Par le théorème de la double limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

**Exercice 66 : [énoncé]**

Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x} \text{ avec } x > 0.$$

- (a) Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . On a  $f_n(x) \sim 1/n^2 x$  donc  $\sum f_n(x)$  converge absolument. On en déduit que la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]0; +\infty[$  et donc la fonction  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est bien définie.

(b) Les  $f_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $a > 0$ ,

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{n + n^2 a} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$  donc converge uniformément sur tout segment de  $]0; +\infty[$ .

On peut donc conclure que  $S$  est continue.

(c) Chaque  $f_n$  est décroissante donc la fonction  $S$  l'est aussi.

(d) Par convergence normale sur  $[1; +\infty[$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

On remarque

$$x f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Posons  $g_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx)}$ . La fonction  $g_n$  croît de 0 à  $1/n^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  donc

$$\|g_n\|_{\infty, [0; +\infty[} = \frac{1}{n^2}.$$

La série de fonctions  $\sum g_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par suite  $xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$  puis

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

(e) La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$  est décroissante donc par comparaison avec une intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) dt = \left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$$

donc

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x).$$

**Exercice 67 : [énoncé]**

(a)  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$  est définie et continue sur  $] -1; +\infty[$   
Soient  $-1 < a \leq 0 \leq 1 \leq b$ .

$$\|f_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{b}{n(n+a)}.$$

La série de fonction  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a; b]$  et donc converge uniformément sur tout segment inclus dans  $] -1; +\infty[$ .

(b) Chaque  $f_n$  est croissante donc par sommation de monotonie,  $S$  est croissante.

(c)

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

donc

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

(d) Quand  $x \rightarrow -1$ ,  $S(x+1) \rightarrow S(0) = 0$  puis

$$S(x) = -\frac{1}{x+1} + S(x+1) \sim -\frac{1}{x+1}.$$

(e)  $S(0) = 0$  et  $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

(f) On sait  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$  et on sait  $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ .  
Puisque  $S(\lfloor x \rfloor) \leq S(x) \leq S(\lfloor x \rfloor + 1)$  on obtient

$$S(x) \sim \ln(\lfloor x \rfloor) \sim \ln(x).$$

**Exercice 68 : [énoncé]**

(a) Posons  $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$

Pour  $x \leq 0$ , la série  $\sum e^{-x\sqrt{n}}$  diverge grossièrement.

Pour  $x > 0$ ,  $n^2 f_n(x) \rightarrow 0$  donc  $\sum e^{-x\sqrt{n}}$  converge absolument.

La fonction  $f$  est donc définie sur  $]0; +\infty[$ .

Pour  $a > 0$ ,

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a)$$

et  $\sum f_n(a)$  converge donc  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$ . Comme somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, on peut affirmer que  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

- (b)  $f$  est somme de fonction strictement décroissante, elle donc elle-même strictement décroissante.  
 (c) Par convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$ , on peut intervertir limite en  $+\infty$  et somme infinie. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

- (d) Par monotonie de  $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ ,

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

En sommant

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \sim \frac{2}{x^2}$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

**Exercice 69 : [énoncé]**

- (a) Notons :  $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ .  
 Pour  $x = 0$ ,  $f_n(x) = 0$  donc  $S(x)$  est bien définie.  
 Pour  $x \in ]0; 1[$  :  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \sim x < 1$  et  $S(x)$  est bien définie.  
 Pour  $x = 1$  :  $f_n(x) = 1/2$  et  $S(x)$  n'est pas définie.  
 Pour  $x \in ]1; +\infty[$  :  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \rightarrow \frac{1}{x} < 1$  donc  $S(x)$  est bien définie.  
 Finalement  $S$  est définie sur  $[0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  par convergence simplement de  $\sum f_n$  sur ce domaine.

- (b)

$$\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[, S(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = S(x).$$

- (c) Soit  $0 < a < 1$ . Sur  $[0; a]$ ,

$$\|f_n\|_{\infty, [0; a]} \leq a^n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} a^n < 1$$

donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[0; a]$  et donc converge uniformément sur tout segment de  $[0; 1[$ . Par théorème  $S$  est continue sur  $[0; 1[$ .

Par composition de fonctions continues  $S : x \mapsto S(1/x)$  est aussi continue sur  $]1; +\infty[$ .

- (d)

$$f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - 2nx^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}.$$

Chaque  $f_n$  est croissante sur  $[0; 1[$  et décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

Par sommation de monotonie, la fonction  $S$  est croissante sur  $[0; 1[$  et décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

$S(0) = 0$ .

Quand  $x \rightarrow 1^-$ ,

$$S(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{2x}{1-x} \rightarrow +\infty$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$ .

Puisque  $S(1/x) = S(x)$ , on obtient par composition de limites,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$ .

**Exercice 70 : [énoncé]**

Pour  $|x| \geq 1$ , la série est grossièrement divergente.

Pour  $|x| < 1$ ,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.

La fonction  $S$  est définie sur  $] -1; 1[$ .

Posons  $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ .

$u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\sum u_n$  converge simplement,

$$u'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour  $a \in [0; 1[$ ,

$$\|u'_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq n \frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de  $\sum u'_n$  sur tout segment de  $] -1; 1[$ .

Par suite la fonction  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Pour  $x \in [0; 1[$ ,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)}.$$

Puisque  $\sum_{p \geq 0} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$  converge et  $\sum_{n \geq 1} \sum_{p=0}^{+\infty} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$  aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_p(x)$$

avec  $u_p(x) = x^{p+1} \frac{1-x}{1-x^{p+1}}$  pour  $x \in [0; 1[$ .

La fonction  $u_p$  est continue sur  $]0; 1[$  et prolonge par continuité en 1 en posant  $u_p(1) = 1/(p+1)$ .

Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série  $\sum (-1)^p u_p(x)$  et donc

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k u_k(x) \right\|_{\infty} \leq u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer  $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$ . Ainsi, la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $]0; 1[$  et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}.$$

**Exercice 71 :** [\[énoncé\]](#)

Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Sachant

$$2|nx| \leq 1 + n^2x^2$$

on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions  $f_n$  étant continue, la somme  $S$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}.$$

Soit  $a > 0$ . Pour  $|x| \geq a$ ,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)}.$$

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f'_n$  converge normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}^*$ .

La somme  $S$  est donc une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

Montrons que la fonction  $S$  n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)}.$$

Par le changement de variable  $u = tx$

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) \geq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{u(1+u^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

car la fonction positive  $u \mapsto 1/u(1+u^2)$  n'est pas intégrable sur  $]0; 1]$ .

**Exercice 72 :** [\[énoncé\]](#)

Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan(nx).$$

Chaque  $f_n$  est continue et  $\|f_n\|_{\infty} = \frac{\pi}{2n^2}$  est terme général d'une série convergente.

Par convergence normale, on peut affirmer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Chaque  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n(1+(nx)^2)}.$$

Pour  $a > 0$ , sur  $[a; +\infty[$  ou  $]-\infty; -a]$ ,

$$\|f'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n(1+(na)^2)}$$

ce qui donne la convergence normale de la série des dérivées.  
Ainsi, par convergence uniforme sur tout segment, on obtient  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

### Exercice 73 : [énoncé]

(a) En vertu du théorème des accroissements finis

$$|u_n(x)| \leq (\sqrt{n+x} - \sqrt{n}) \sup_{[\sqrt{n}; \sqrt{n+x}]} |(\arctan)'| = \frac{\sqrt{n+x} - \sqrt{n}}{1+n}$$

donc

$$|u_n(x)| \leq \frac{x}{(1+n)(\sqrt{n} + \sqrt{n+x})} \leq \frac{x}{2\sqrt{n}(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

On en déduit que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement et donc la fonction  $S$  est bien définie.

Les fonctions  $u_n$  sont continue et pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\forall x \in [0; a], |u_n(x)| \leq \frac{a}{2\sqrt{n}(n+1)}.$$

On peut donc affirmer la convergence uniforme sur tout segment de la série  $\sum u_n$  ce qui assure la continuité de  $S$ .

(b) Montrons que  $S$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

Remarquons que par le théorème des accroissements finis

$$u_n(n) = \arctan \sqrt{2n} - \arctan \sqrt{n} \geq \frac{\sqrt{2n} - \sqrt{n}}{1+2n} \sim \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{n}}$$

et il y a donc divergence vers  $+\infty$  de la série  $\sum u_n(n)$ .

Soit  $A \in \mathbb{R}_+$ . Il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{n=0}^N u_n(n) \geq A.$$

Pour  $x \geq N$ ,

$$S(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(N) \geq \sum_{n=0}^N u_n(n) \geq A.$$

On peut donc affirmer

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

### Exercice 74 : [énoncé]

(a) Posons

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Les fonctions  $u_n$  sont définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

La série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  car  $u_n(x) \sim 1/n^2$ .

On a

$$u'_n(x) = \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}$$

donc sur  $[-a; a]$ ,

$$\|u'_n\|_\infty \leq \frac{2a}{n^4}$$

et la série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement et donc uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

On peut conclure que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(b) La fonction  $t \mapsto 1/(t^2 + x^2)$  est décroissante donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$



(c) On peut écrire

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{1 + x^2/n^2} \right) = \frac{1}{n^2} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n^4} \frac{x^4}{n^2 + x^2}$$

et par convergence des sommes introduites

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^4} + x^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)}.$$

Or

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} < +\infty$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}x^2 + O(x^4).$$

**Exercice 75 : [énoncé]**

Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Puisque les fonctions  $f_n$  sont toutes impaires, on limite l'étude à  $x \in [0; +\infty[$ . À partir d'un certain rang  $N_x$ , on a  $x/n \leq \pi/2$  et alors

$$\sin(x/n) \in [0; 1].$$

La série numérique  $\sum f_n(x)$  vérifie alors les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang  $N_x$  et par conséquent cette série converge. Ainsi la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et donc sa fonction somme, que nous noterons  $S$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

de sorte que

$$\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f'_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  et donc la fonction  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , a fortiori cette fonction est continue.

**Exercice 76 : [énoncé]**

(a) Posons  $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+nt}$  pour  $t > 0$ .

Par application du critère spécial des séries alternées,  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]0; +\infty[$  et

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{1+na} \rightarrow 0$$

pour tout  $a > 0$ .

Par convergence uniformément sur tout segment d'une série de fonctions continue,  $S$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .

(b) Par convergence uniformément sur  $[a; +\infty[$ ,

$$\lim_{+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt} = 1.$$

Par application du critère spécial des séries alternées

$$1 - \frac{1}{1+t} \leq S(t) \leq 1.$$

(c) Les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement.

$$f'_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}.$$

La série  $\sum f'_n(t)$  est alternée avec  $|f'_n(t)| = \frac{n}{(1+nt)^2}$ .

Puisque

$$|f'_n(t)| - |f'_{n+1}(t)| = \frac{n(n+1)t^2 - 1}{(1+nt)^2(1+(n+1)t)^2}$$

la suite  $(|f'_n(t)|)$  décroît vers 0 à partir d'un certain rang.

Soit  $a > 0$ .

À partir d'un certain rang  $n_0$ ,

$$n(n+1)a^2 - 1 \geq 0$$

et alors pour tout  $t \geq a$ , on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à partir du rang  $n_0$ .

On a alors

$$|R_n(t)| \leq \frac{n}{(1+nt)^2} \leq \frac{n}{(1+na)^2}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{n}{(1+na)^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi la série de fonctions  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[a; +\infty[$ .  
Par théorème, on peut alors conclure que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 77 : [énoncé]**

On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}.$$

(a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum u_n(x)$  satisfait le critère spécial des séries alternées et donc  $\sum u_n$  converge simplement. La fonction  $S$  est donc bien définie, elle est évidemment impaire.

(b) Soit  $a > 0$ . Par le critère spécial des séries alternées

$$|R_n(x)| \leq \frac{x}{(n+1)+x^2} \leq \frac{a}{n+1} \text{ pour } x \in [-a; a]$$

et donc

$$\|R_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0.$$

Il y a convergence uniforme sur  $[-a; a]$  pour tout  $a > 0$  et donc convergence uniforme<sup>4</sup> sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

De plus chaque fonction  $u_n$  est continue donc  $S$  est continue.

(c) Par le critère spécial des séries alternées, on peut encadrer  $S$  par deux sommes partielles consécutives

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2+x^2} \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$$

et on peut donc affirmer  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 78 : [énoncé]**

(a) Pour  $x \in ]-1; 1[$ ,

$$|u_n(x)| = o(|x|^n)$$

donc  $\sum u_n(x)$  est absolument convergente donc convergente.

Pour  $x = 1$ ,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

4. Une étude des variations de la fonction  $x \mapsto x/(n+1+x^2)$  permet aussi d'établir qu'il y a convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

donc  $\sum u_n(x)$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées.  
Pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ ,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{|x|^n}\right)$$

donc  $\sum u_n(x)$  est somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

(b)

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1/x^n}{1+1/x^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(c) Soit  $a \in [0; 1[$ .

$$\|f\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{a^n}{1-a^n} \leq \frac{a^n}{1-a}$$

donc  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[-a; a]$ .

Par convergence uniforme d'une série de fonctions continues sur tout segment de  $] -1; 1[$ , on peut affirmer que  $f$  est continue sur  $] -1; 1[$ . Puisque  $f(x) = C^{te} - f(1/x)$ ,  $f$  est aussi continue sur  $] -\infty; -1[$  et sur  $]1; +\infty[$  par composition de fonctions continues.

(d) Pour  $x \in [0; 1]$ , la série  $\sum u_n(x)$  est alternée et la suite  $\left(\frac{1}{n} \frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n \geq 0}$  décroît vers 0 (après étude non détaillée ici) donc le critère spécial des séries alternées s'applique et

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

puis

$$\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

La série de fonctions continues  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $[0; 1]$  donc  $f$  est continue sur  $[0; 1]$  et donc continue à gauche en 1. Par la relation du b) on obtient aussi  $f$  continue à droite en 1.

**Exercice 79 : [énoncé]**

(a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série  $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$  converge donc la suite  $(\ln f_n(x))$  converge puis  $(f_n(x))$  converge vers un réel strictement positif.

(b)

$$\ln \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) \right)$$

avec  $x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right)$ .

Or la série  $\sum \left( \frac{x}{n} - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \right)$  est absolument convergente car de terme général en  $O(1/n^2)$  et

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{x}{k} - \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right) \right) = x \ln n + \gamma x + o(1) - \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right)$$

donc

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x}{n} - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \right).$$

(c) Posons  $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right)$  pour  $x > 0$  et  $n \geq 1$ .  $f_n$  est  $\mathcal{C}^1$ ,  $\sum f_n$  converge simplement et  $f'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$  ce qui permet d'affirmer  $\sum f'_n$  converge normalement sur tout segment  $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 80 : [énoncé]**

(a) Si  $x \leq 0$ , la série numérique  $\sum f_n(x)$  diverge grossièrement. Si  $x > 0$  alors  $n^2 f_n(x) = e^{2 \ln n - x n^\alpha} \rightarrow 0$  donc  $\sum f_n(x)$  est absolument convergente.

Ainsi  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]0; +\infty[$ .  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$ .

(b) Les fonctions  $f_n$  sont continues.

Pour  $a > 0$ ,  $\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a)$  et  $\sum f_n(a)$  converge donc  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$ . Par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que  $f$  est continue.

(c) Par convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$ , on peut intervertir limite en  $+\infty$  et somme infinie. Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ .

**Exercice 81 : [énoncé]**

(a) Pour  $x < 0$ ,  $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$  donc  $\sum u_n(x)$  diverge grossièrement.

Pour  $x = 0$ ,  $u_n(x) = 0$  donc  $\sum u_n(0)$  converge

Pour  $x > 0$ ,  $u_n(x) = o(1/n^2)$  par croissance comparée et donc  $\sum u_n(x)$  converge absolument.

On conclut  $I = \mathbb{R}_+$

(b) Pour  $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\|u_n\|_{\infty, [a; b]} = \sup_{x \in [a; b]} |u_n(x)| \leq \frac{n^\alpha b e^{-na}}{n^2 + 1}$$

donc  $\sum u_n$  est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . Sa somme est alors continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x)| = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}.$$

Il y a convergence normale si, et seulement si,  $\alpha < 2$ .

(d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha e^{-k/n}}{k^2 + 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1} e^{-k/n} \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k/n}.$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k/n} = \frac{1}{2n} \frac{e^{-(n+1)/n}}{1 - e^{-1/n}} \rightarrow \frac{1}{2e}$$

donc  $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$  ne peut tendre vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . S'il y avait convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  alors

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \rightarrow 0$$

ce qui vient d'être exclu.

(e) Si  $S$  est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq S(1/n) \rightarrow S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

**Exercice 82 : [énoncé]**

Puisque  $a_n > 0$  et  $\sum a_n(1 + |x_n|)$  converge, les séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_n x_n$  sont absolument convergentes. Posons  $f_n(x) = a_n |x - x_n|$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Comme

$$|a_n|x - x_n| \leq |a_n||x| + |a_n x_n| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

la série des fonctions  $f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

Les fonctions  $f_n$  sont continues et pour tout  $M > 0$

$$\sup_{[-M;M]} |f_n| \leq M a_n + a_n |x_n|.$$

Par convergence normale d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme  $f$  est continue sur  $[-M; M]$ . Ceci valant pour tout  $M > 0$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $]\alpha; \beta[ \in \mathbb{R}$  tel que  $x_n \notin ]\alpha; \beta[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]\alpha; \beta[$  et  $f'_n(x) = \varepsilon_n a_n$  avec  $|\varepsilon_n| = 1$ . Par convergence normale de la série des dérivées sur  $]\alpha; \beta[$ , on peut affirmer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout intervalle ouvert  $]a; b[$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin ]a; b[.$$

Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  vérifiant  $x_n = a$ .

En considérant  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a\}$ , on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n \in A} a_n |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A} a_n |x - x_n| = \alpha |x - a| + g(x)$$

avec  $\alpha > 0$ .

Puisque la série  $\sum a_n$  converge, pour  $N$  assez grand,  $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_n \leq \frac{\alpha}{2}$ .

On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \geq N+1} a_n |x - x_n| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \leq N} a_n |x - x_n|.$$

La fonction  $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \leq N} a_n |x - x_n|$  est dérivable au voisinage de  $a$ .

Cependant, la fonction

$$\varphi : x \mapsto \alpha |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \geq N+1} a_n |x - x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en  $a$ .

En effet, pour  $h > 0$ ,

$$\frac{1}{h} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour  $h < 0$ ,

$$\frac{1}{h} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \leq -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

On conclut que  $f$  n'est pas dérivable en  $a$ .

### Exercice 83 : [énoncé](#)

(a) def S(N,x):

if N == 0:

return 1/x

return S(N-1,x) + 1/(x-N) + 1/(x+N)

(b) import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

def trace(N,a,b):

X = linspace(a,b,100)

Y = [S(N,x) for x in X]

plt.plot(X,Y)

(c) Posons  $u_n : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$u_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2x}{n^2}.$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant, la série  $\sum u_n(x)$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . On peut alors affirmer la convergence simple de la suite de fonctions  $(S_N)$  vers une certaine fonction  $S$  sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

(d) Soit  $[a; b]$  inclus dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Pour  $N_0$  assez grand, on a

$$[a; b] \subset [-N_0; N_0].$$

Soit  $x \in [a; b]$ . Pour tout  $N > N_0$  et tout  $P \in \mathbb{N}$ ,

$$S_{N+P}(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Le facteur  $x^2 - n^2$  est négatif pour chaque terme sommé et par conséquent

$$|S_{N+P}(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2N_0}{n^2 - N_0^2}.$$

En passant à la limite quand  $P$  tend vers  $+\infty$ , on obtient la majoration uniforme

$$|S(x) - S_N(x)| \leq \alpha_N \quad \text{avec} \quad \alpha_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2N_0}{n^2 - N_0^2}.$$

Puisque  $\alpha_N$  est le reste de rang  $N$  d'une série convergente,  $\alpha_N$  est de limite nulle et on peut conclure que la suite de fonctions  $(S_N)$  converge uniformément vers  $S$  sur  $[a; b]$ .

- (e) Les fonctions  $S_N$  sont continues et par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que la fonction  $S$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

Les fonctions  $S_N$  sont impaires et par convergence simple, on peut affirmer que  $S$  est une fonction impaire.

Enfin, on obtient que la fonction  $S$  est 1-périodique en passant à la limite l'égalité

$$S_N(x+1) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} = S_N(x) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N}$$

valable pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

- (f) Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on remarque

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{x}{2}\right) + S_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=-N}^N \frac{2}{x-2n} + \sum_{n=-N}^N \frac{2}{x-(2n-1)} \\ &= \sum_{n=-2N-1}^{2N} \frac{2}{x-n} = 2S_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}. \end{aligned}$$

On obtient la relation voulue en passant à la limite quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

- (g) Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on a

$$\cot\left(\pi \frac{x}{2}\right) + \cot\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Après réduction au même dénominateur

$$\cot\left(\pi \frac{x}{2}\right) + \cot\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) = \frac{2 \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2 \cot(\pi x).$$

L'ensemble des fonctions vérifiant la relation proposée étant un sous-espace vectoriel, la fonction  $f$  vérifie aussi cette relation.

- (h) Pour  $x \in ]-1; 1[ \setminus \{0\}$ , on peut écrire

$$S(x) = \frac{1}{x} + T(x) \quad \text{avec} \quad T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Par les arguments précédents, on peut affirmer que la fonction  $T$  est continue sur  $] -1; 1[$ . Aussi, on a par développement limité

$$\pi \cot(\pi x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{x} + o(1)$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1) - T(x)$$

ce qui permet de prolonger  $f$  par continuité en 0 avec la valeur  $-T(0) = 0$ . Par périodicité, on peut prolonger  $f$  par continuité avec la valeur 0 en tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

La fonction  $f$  est continue sur le compact  $[0; 1]$  et y présente un maximum de valeur  $M$ . Celui-ci est atteint en un certain  $x_0 \in [0; 1]$ . Or

$$\underbrace{f\left(\frac{x_0}{2}\right)}_{\leq M} + \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\leq M} = 2f(x_0) = 2M$$

et donc

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = M.$$

Ainsi, le maximum de  $f$  est aussi atteint en  $x_0/2$ , puis en  $x_0/4$ , etc. Finalement, le maximum de  $f$  est atteint en 0 et il est donc de valeur nulle. De même, on montre que le minimum de  $f$  est nul et on peut conclure

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, S(x) = \pi \cot(\pi x).$$

### Exercice 84 : [énoncé]

- (a) Puisque  $\|a\| < 1$  et  $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ , la série  $\sum a^n$  est absolument convergente et sa somme  $S$  vérifie  $(1_E - a)S = S(1_E - a) = 1_E$  donc  $1_E - a$  est inversible d'inverse  $S$ .
- (b) Pour  $\alpha \in [0; 1[$ , on montre par convergence normale la continuité de  $a \mapsto (1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$  sur  $\overline{B}(0, \alpha)$ . On en déduit que  $x \mapsto x^{-1}$  est continue en  $1_E$ .
- (c) Soit  $a \in U(E)$ . Quand  $x \in U(E) \rightarrow a$  alors  $xa^{-1} \rightarrow 1_E$  donc  $(xa^{-1})^{-1} \rightarrow 1_E^{-1} = 1_E$  puis  $x^{-1} = a^{-1}(xa^{-1})^{-1} \rightarrow a^{-1}$ . Ainsi  $x \mapsto x^{-1}$  est continue en chaque  $a \in U(E)$ .

### Exercice 85 : [énoncé]

- (a)  $\left\| \frac{1}{k} t^k A^k \right\| = \frac{1}{k} |t|^k \|A\|^k$  avec  $|t| \|A\| < 1$  donc la série converge simplement.
- (b) Soit  $\rho \in [0; 1/\|A\|]$ .  $t \mapsto \frac{1}{k} t^k A^k$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et de dérivée  $t^{k-1} A^k$  avec

$$\|t^{k-1} A^k\|_{\infty, [-\rho; \rho]} \leq \rho^{k-1} \|A\|^k$$

terme général d'une série convergente. La série des fonctions dérivées converge donc normalement sur  $[-\rho; \rho]$  ce qui assure que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1/\|A\| ; 1/\|A\| [$  et

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^{k+1} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k \right) A.$$

Or

$$(I - tA) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k - \sum_{k=1}^{+\infty} t^k A^k = I$$

donc  $(I - tA)f'(t) = A$ .