

Suites et séries de fonctions

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Exercice 1 [00868] [Correction]

Établir que la limite simple d'une suite de fonctions de I vers \mathbb{R} convexes est convexe.

Exercice 2 [00885] [Correction]

Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue. Montrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

Exercice 3 [00884] [Correction]

Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg .

Exercice 4 [00878] [Correction]

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues et définies sur $[a; b]$. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction f . Montrer

$$\inf_{[a;b]} f_n \rightarrow \inf_{[a;b]} f.$$

Exercice 5 [00879] [Correction]

On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a; b]$ vers \mathbb{R} converge uniformément vers $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a; b]$ convergeant vers x . Montrer

$$f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Exercice 6 [03461] [Correction]

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur \mathbb{R} . Montrer que la fonction f est polynomiale.

Étude pratique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 7 [00871] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0.$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ sur $[0; 1]$.

Exercice 8 [00872] [Correction]

Étudier la convergence uniforme de $f_n: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

Exercice 9 [00870] [Correction]

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+.$$

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0; +\infty[$.
- Étudier la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.
- Étudier la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Exercice 10 [00873] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = nx^2 e^{-nx} \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+.$$

Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R}_+ puis sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 11 [00874] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R} puis sur $] -\infty; -a] \cup [a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 12 [00875] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f_n(0) = 0.$$

- (a) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R} .
 (b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a; a]$ avec $a > 0$.

Exercice 13 [02527] [Correction]

Étudier la convergence simple et uniforme sur \mathbb{R} de la suite de fonctions (f_n) donnée par

$$f_n(x) = \sin^n(x) \cos(x).$$

Exercice 14 [02518] [Correction]

Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}.$$

Exercice 15 [02830] [Correction]On pose, pour $x \geq 0$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 16 [00876] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 17 [00877] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) \text{ pour } x \in [0; 1].$$

Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 18 [00881] [Correction]Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n.$$

- (a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .
 (b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 19 [02972] [Correction]Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0; n[\text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

Étudier le mode de convergence de (f_n) .

Exercice 20 [00890] [Correction]Soit $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

- (a) Étudier la limite simple de (f_n) et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq \lim f_n(x).$$

- (b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0; a]$ (avec $a > 0$).

- (c) Établir qu'en fait, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 21 [00892] [Correction]Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1-nx) \text{ si } x \in [0; 1/n[\text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

- (a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .
 (b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt.$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

- (c) Étudier la convergence uniforme sur $[a; 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 22 [00891] [Correction]

Pour $x \in [0; \pi/2]$, on pose $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$.

- (a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n) .
 (b) Calculer

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx.$$

La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?

- (c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0; \pi/2]$.

Exercice 23 [02532] [Correction]

- (a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ définies sur \mathbb{R}_+ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
 (b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
 (c) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx.$$

Exercice 24 [02860] [Correction]

Soit (f_n) la suite de fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f_0(x) = x \text{ et } f_{n+1}(x) = \frac{x}{2 + f_n(x)} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 25 [02970] [Correction]

On note E l'ensemble des fonctions $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues.

On pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

pour toute $f \in E$.

On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Étudier la suite (f_n) .
 (b) Soit $f = \lim(f_n)$.

Trouvez une équation différentielle dont f est solution.

Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Étude théorique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 26 [00883] [Correction]

Soit $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + 1/n.$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2) .

Exercice 27 [00869] [Correction]

Soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}.$$

Montrer que chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 et que la suite (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 28 [00887] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.

Montrer que la suite des fonctions

$$g_n: x \mapsto n(f(x + 1/n) - f(x))$$

converge uniformément vers f' .

Exercice 29 [00888] [Correction]

Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 30 [02833] [Correction]

On note U l'ensemble des complexes de module 1 et on considère ω un complexe de module $\neq 1$.

Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z - \omega}$$

soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 31 [03902] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(t) = n(f(t + 1/n) - f(t)).$$

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} vers une fonction à préciser.

Fonction solution d'équations fonctionnelles

Exercice 32 [00893] [Correction]

On définit (u_n) suite de fonctions de $[0; 1]$ vers \mathbb{R} par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt.$$

(a) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) En déduire la convergence pour tout $x \in [0; 1]$ de la suite $(u_n(x))$.

(c) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2).$$

Exercice 33 [00903] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Justifier que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

(b) Préciser le sens de variation de S .

(c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x.$$

(d) Donner un équivalent de S en 0.

(e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 34 [03777] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Montrer que F est bien définie.

(b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 , de classe \mathcal{C}^∞ .

(c) Simplifier

$$F(x) + F(x+1).$$

(d) Montrer que pour $x > 0$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

(e) Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 35 [00913] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)}.$$

(a) Justifier que S est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

(b) Former une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$.

(c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0.

Exercice 36 [00914] [Correction]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th} n.$$

- Établir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.
- Justifier que la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x+1) - S(x) = 1 - \text{th} x.$$

- Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 37 [03754] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable.

Montrer l'existence d'une fonction $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x+1) - g(x) = f(x).$$

Exercice 38 [00912] [Correction]

On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

et on pose pour $x > 0$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

- Justifier que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Préciser le sens de variation de S .
- Établir que

$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}.$$

- Donner un équivalent de S en $+\infty$.
- Donner un équivalent de S en 0.

Exercice 39 [00898] [Correction]

Justifier l'existence de

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Montrer que f est 1-périodique et qu'on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 40 [02973] [Correction]

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 41 [04104] [Correction]

On étudie l'équation fonctionnelle

$$(E): f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2.$$

- Quelles sont les solutions constantes sur \mathbb{R} ?
- Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur h , la fonction f est-elle solution de (E) ?
- On définit par récurrence une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} en posant : $h_0: x \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Pour $x \in [0; 1]$, soit $T_x: y \mapsto y - xy^2/2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0; 1]$ et que $T_x([0; 1]) \subset [0; 1]$.

Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

- Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0; 1]$.

(e) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 42 [04186] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n sur \mathbb{R}_+^* par

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

- (a) Montrer que $\sum u_n(x)$ converge si $x > 0$.
Montrer que $f: x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- (b) Montrer que f est l'unique fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln x \\ f \text{ est convexe} \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

(c) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Étude de la convergence d'une série de fonctions

Exercice 43 [00895] [Correction]

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 44 [00896] [Correction]

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 45 [00897] [Correction]

On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0; +\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x).$$

Exercice 46 [03785] [Correction]

On introduit l'application sur $[0; +\infty[$

$$f_n: x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

- (a) Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n) .
- (b) Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 47 [03295] [Correction]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0; 1].$$

- (a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
- (b) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.
- (c) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \rightarrow 0$.

Exercice 48 [02839] [Correction]

On pose

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

pour tout réel $x \in [0; 1]$ et tout entier naturel n .

Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

Exercice 49 [03988] [Correction]

Soit $u_n: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1+n^2x)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum u_n$ et $\sum u'_n$.

Fonctions zêta

Exercice 50 [02834] [Correction]

Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- (a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$?
 (b) Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?
 (c) Si

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

montrer que F est continue sur $[-1; 1[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1; 1[$.

- (d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

Exercice 51 [00908] [Correction]

On pose

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Montrer que la fonction η est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Exercice 52 [00909] [Correction]

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Montrer que ζ_2 est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 53 [03853] [Correction]

Déterminer la limite quand $x \rightarrow 0^+$ de

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

Exercice 54 [00899] [Correction]

Soient

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

- (a) Déterminer les domaines de définition des fonctions ζ et ζ_2 .
 (b) Justifier que les fonctions ζ et ζ_2 sont continues.
 (c) Établir la relation $\zeta_2(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 55 [04187] [Correction]

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs de limite $+\infty$. Lorsque cela a un sens, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n^x}.$$

- (a) Montrer que la fonction f est définie sur un intervalle I et que, s'il n'est pas vide, cet intervalle est non majoré.
 (b) Montrer que la fonction f est continue sur I .
 (c) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n \geq 1}$ pour laquelle :
 — l'intervalle I est vide ;
 — l'intervalle I est ouvert non vide ;
 — l'intervalle I est fermé non vide.

Intégration de la somme d'une série de fonctions

Exercice 56 [00911] [Correction]

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0.$$

- (a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

- (b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0; 1]$.
 (c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 57 [00920] [Correction]

On donne

$$\forall \alpha \in [0; 1], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \pi \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{sh} \pi \alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

(prolongée par continuité en 0).

En intégrant sur $[0; 1]$, en déduire la valeur de

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Limite et comportement asymptotique de la somme de série de fonctions**Exercice 58** [02558] [Correction]

Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+ .**Exercice 59** [00139] [Correction]Pour $t > 0$, on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt + 1}.$$

Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t \rightarrow 0^+$.**Exercice 60** [00910] [Correction]Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right).$$

- Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
- Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

Exercice 61 [00918] [Correction]Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

On pourra exploiter le théorème d'interversion limite/somme infinie.

Exercice 62 [00919] [Correction]Par une interversion série-limite, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(z).$$

Étude pratique de fonctions somme de série**Exercice 63** [00901] [Correction]Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

- Montrer que S est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que S est continue.
- Étudier la monotonie de S .
- Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
- Déterminer un équivalent à S en 0.

Exercice 64 [00902] [Correction]Sur $I =]-1; +\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

- Montrer que S est définie et continue sur I .
- Étudier la monotonie de S .
- Calculer

$$S(x+1) - S(x).$$

(d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+ .

(e) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

(f) En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 65 [00906] [Correction]

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

(a) Quel est le domaine de définition de f ?

Étudier la continuité de f sur celui-ci.

(b) Montrer que f est strictement décroissante.

(c) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 66 [00915] [Correction]

Pour $x \geq 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

(a) Pour quelles valeurs de x dans \mathbb{R}_+ , $S(x)$ est définie ?

(b) Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \neq 0$.

(c) Étudier la continuité de S sur $[0; 1[$ puis sur $]1; +\infty[$.

(d) Dresser le tableau de variation de S .

Exercice 67 [02837] [Correction]

On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S . Donner un équivalent de S en 0 et en 1^- .

Exercice 68 [03203] [Correction]

Définition, continuité et dérivabilité de

$$S: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Exercice 69 [02529] [Correction]

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$$

est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Exercice 70 [03427] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x) = \arctan \sqrt{n+x} - \arctan \sqrt{n}.$$

(a) Étudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur \mathbb{R}_+ par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

(b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 71 [03797] [Correction]

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

(a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

(b) Donner, à l'aide d'une comparaison intégrale, un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

(c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 72 [03194] [Correction]Définition, continuité et classe \mathcal{C}^1 de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Exercice 73 [00904] [Correction]Pour $t > 0$, on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}.$$

- (a) Justifier que S est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
- (b) Étudier la limite de S en $+\infty$.
- (c) Établir que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Exercice 74 [03644] [Correction]Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}.$$

- (a) Montrer que la fonction S est bien définie et étudier sa parité.
- (b) Montrer que la fonction S est continue.
- (c) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 75 [00916] [Correction]Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

- (a) Justifier que la fonction $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- (b) Établir que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

- (c) Établir que f est continue sur $] -1; 1[$ puis que f est continue sur $] -\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$.

- (d) Établir la continuité de f en 1.

Exercice 76 [02835] [Correction]Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

- (a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- (b) Montrer

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right).$$

- (c) Montrer que Γ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 77 [00905] [Correction]On fixe $\alpha > 0$ et on pose

$$f_n(x) = e^{-n^\alpha x} \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

- (a) Domaine de définition de f ?
- (b) Continuité de f ?
- (c) Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 78 [02836] [Correction]Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x , on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

On note I le domaine de définition de

$$S: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

- (a) Déterminer I .
- (b) Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- (c) A-t-on convergence normale sur \mathbb{R}_+ ?

(d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?

(e) Étudier la continuité de S sur I .

Exercice 79 [02971] [Correction]

Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n .

On suppose que la série de terme général $a_n(1 + |x_n|)$ converge.

On pose

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x - x_n|.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

Exercice 80 [04173] [Correction]

On définit la suite de fonctions $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, S_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

- (a) Écrire avec **Python** une fonction $S(N, x)$ renvoyant $S_N(x)$.
- (b) Écrire une fonction prenant trois paramètres N , a et b et traçant le graphe de S_N sur le segment $[a; b]$.
- (c) Montrer que la suite (S_N) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S .
- (d) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- (e) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.
- (f) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x).$$

- (g) Montrer que la fonction $f: x \mapsto \pi \cot(\pi x) - S(x)$ vérifie la même relation.
- (h) Montrer que f se prolonge par continuité sur \mathbb{R} . En déduire S .

Suites et séries de fonctions vectorielles

Exercice 81 [01186] [Correction]

Soit E une algèbre de dimension finie munie d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall a, b \in E, \|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

- (a) Soit $a \in E$ vérifiant $\|a\| < 1$. Montrer que $1_E - a$ est inversible et exprimer son inverse comme la somme d'une série.
- (b) Montrer que l'application $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$ est continue en 1_E .
- (c) Montrer que l'application $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$ est continue.

Exercice 82 [00573] [Correction]

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k.$$

- (a) Montrer que f est bien définie.
- (b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et que

$$(I - tA)f'(t) = A.$$

Exercice 83 [04174] [Correction]

Soit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{avec } s \in \mathbb{C}.$$

- (a) Montrer la définition de $\zeta(s)$ pour $\text{Re}(s) > 1$.
- (b) Montrer qu'alors

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

- (c) En déduire un prolongement continu de ζ sur

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\} \setminus \{1\}.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Supposons que la suite (f_n) converge simplement vers f sur I avec chaque f_n convexe.

Pour tout $a, b \in I$ et $\lambda \in [0; 1]$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f_n(a) + (1 - \lambda)f_n(b).$$

À la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

ce qui fournit la convexité de f .

Exercice 2 : [énoncé]

Par uniforme continuité, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - y| \leq \alpha \implies |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

Pour n assez grand, on a

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$$

et donc

$$\forall x \in I, |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, il y a convergence uniforme de $(g \circ f_n)$ vers $g \circ f$.

Exercice 3 : [énoncé]

On peut écrire

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty.$$

Or $\|f_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$ et donc la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée car convergente. Par opération sur les limites, on obtient alors

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

car $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$.

Exercice 4 : [énoncé]

Posons

$$m_n = \inf_{t \in [a; b]} f_n(t).$$

Puisque la fonction f_n est continue sur le segment $[a; b]$, cet infimum est une valeur prise par f_n et donc il existe $t_n \in [a; b]$ tel que

$$m_n = f_n(t_n).$$

Montrons que $m_n \rightarrow m$ avec

$$m = \inf_{t \in [a; b]} f.$$

La fonction f est continue car limite uniforme d'une suite de fonctions continues et donc il existe $t_\infty \in [a; b]$ pour lequel

$$m = f(t_\infty).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

et donc

$$m_n = f_n(t_n) \geq f(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$$

et

$$m = f(t_\infty) \geq f_n(t_\infty) - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon.$$

Ainsi

$$|m_n - m| \leq \varepsilon.$$

On peut alors affirmer $m_n \rightarrow m$.

Exercice 5 : [énoncé]

On a

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \|f_n - f\|_{\infty, [a; b]} \leq \varepsilon$$

et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_2, |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon$$

car $f(x_n) \rightarrow f(x)$ en vertu de la continuité de f .

Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a

$$\forall n \geq n_0, |f_n(x_n) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Exercice 6 : [énoncé]

Pour $\varepsilon = 1$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, P_n - f \text{ est bornée et } \|P_n - f\|_\infty \leq 1.$$

Pour tout $n \geq N$, on peut alors affirmer que le polynôme $P_n - P_N = (P_n - f) - (P_N - f)$ est borné et donc constant. Puisque la suite (P_n) converge uniformément vers f , la suite $(P_n - P_N)_{n \geq N}$ converge uniformément vers $f - P_N$. Or cette suite étant formée de fonctions constantes, sa convergence équivaut à la convergence de la suite de ces constantes. En posant C la limite de cette suite, on obtient

$$f = P_N + C$$

et donc f est une fonction polynôme.

Exercice 7 : [énoncé]

Les fonctions u_n sont continues sur $[0; 1]$ pour $n \geq 1$ et dérivables sur $]0; 1]$ avec

$$u'_n(x) = x^{n-1}(1 + n \ln x).$$

Le tableau de variation de u_n donne

$$\sup_{[0;1]} |u_n| = -u_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \rightarrow 0.$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 8 : [énoncé]

Pour $x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) \rightarrow 0$ car $|f_n(x)| \leq \frac{x}{n}$.

On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}.$$

Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0	x_n	$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow M_n$	$\searrow 0$

donc

$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1+\frac{1}{n-1})} = \frac{e^{-\frac{1}{n} \ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \rightarrow 0.$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Soit $x \in [0; +\infty[$.

Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Si $x > 0$ alors $u_n(x) \rightarrow 0$ car $e^{-nx} \rightarrow 0$.

La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .

(b) On a

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |u_n(x)| \leq e^{-na} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

(c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geq u_n(\pi/2n) = e^{-\pi/2} \not\rightarrow 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 10 : [énoncé]

$f'_n(x) = nx(2 - nx)e^{-nx}$, le tableau de variation de f_n donne

$$\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n| = f_n(2/n) = \frac{4}{n} e^{-2} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur \mathbb{R} et donc *a fortiori* sur $[a; +\infty[$.

Exercice 11 : [énoncé]

$f_n(0) \rightarrow 1$ et $f_n(x) \rightarrow 0$ pour $x \neq 0$. La fonction limite n'étant pas continue, il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R} . En revanche si $|x| \geq |a|$ alors

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nul ou non, on a $f_n(x) \rightarrow 0$. Il y a convergence simple vers la fonction f nulle. On a

$$f_n(x) - f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{nx} = \frac{x}{n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La fonction $f_n - f$ n'étant pas bornée sur \mathbb{R} , il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R} .

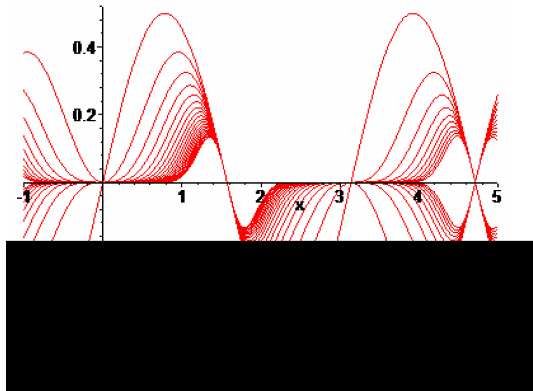


FIGURE 1 – Les premières fonctions de la suite (f_n)

(b) Sur $[-a; a]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0$$

via $|\sin t| \leq |t|$. Par suite il y a convergence uniforme sur $[-a; a]$.

Exercice 13 : [\[énoncé\]](#)

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ on a $|\sin x| < 1$ et donc $f_n(x) \rightarrow 0$.

Pour $x = \frac{\pi}{2} [\pi]$, $\cos x = 0$ et donc $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Par 2π périodicité et parité on ne poursuit l'étude qu'avec $x \in [0; \pi]$. La fonction f_n est dérivable avec

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1).$$

On peut dresser le tableau de variation de f_n sur $[0; \pi]$ et on obtient

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \left| f_n \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right| = \left(1 - \frac{1}{(n+1)} \right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0.$$

La suite de fonction (f_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 14 : [\[énoncé\]](#)

f_n est définie sur \mathbb{R}^* et peut être prolongée par continuité en 0 en posant sur $f_n(0) = n$.

Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \rightarrow +\infty$.

Pour $x > 0$, $f_n(x) \rightarrow 0$.

Ainsi, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+^* .

Il ne peut y avoir convergence uniforme sur \mathbb{R}_+^* car alors, par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$$

donne $0 = +\infty$.

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-a^2}}$$

et par étude fonctionnelle $nx^2 e^{-nx} \leq \frac{4}{n} e^2$ (maximum en $x = 2/n$) donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{4e^2}{n(1 - e^{-a^2})} \rightarrow 0$$

qui donne la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$.

Exercice 15 : [\[énoncé\]](#)

Quand $p \rightarrow +\infty$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \rightarrow \frac{1}{1+x} = f(x).$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$

Or, pour $\alpha \in]0; 1]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

pour tout $x \geq 0$ et donc

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \frac{1}{p} \frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leq \frac{1}{p} \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{p}.$$

Puisque $\|f - f_p\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 16 : [\[énoncé\]](#)

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(\pm 1/\sqrt{n2^n})| = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur \mathbb{R} .

Or $\pm 1/\sqrt{n2^n} \rightarrow 0$ et donc d'après le tableau de variation de f_n , pour tout $a > 0$, on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a) \rightarrow 0.$$

Ainsi, il y a convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ et de même sur $]-\infty; -a]$.

En revanche, il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 0.

Exercice 17 : [énoncé]

On a

$$\sup_{x \in [0;1]} |f_n(x)| = f_n(1/\sqrt[2^n]{2}) = 4^{n-1} \rightarrow +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0; 1]$.

Or $1/\sqrt[2^n]{2} \rightarrow 1$ et donc d'après le tableau de variation de f_n , pour tout $a \in [0; 1[$, on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x \in [0;a]} |f_n(x)| = f_n(a) \rightarrow 0.$$

Ainsi il y a convergence uniforme sur $[0; a]$. En revanche il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 1.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Si $x \in]0; 1]$ alors $f_n(x) \rightarrow 0$ par comparaison des suites de référence.

(b) $f'_n(x) = n^\alpha(1-x)^n - n^{\alpha+1}x(1-x)^{n-1} = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$.

Après étude des variations

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^\alpha \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n+1})} = e^{-1+o(1)} \rightarrow e^{-1}$$

donc $\|f_n\|_\infty \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}$.

Il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 19 : [énoncé]

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n = \exp(n \ln(1 - x/n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x}.$$

La suite (f_n) converge simplement vers $f: x \mapsto e^{-x}$ avec $f_n \leq f$.

Étudions $\delta_n = f - f_n \geq 0$.

Pour $x \in [n; +\infty[$, $\delta_n(x) = e^{-x} \leq e^{-n}$.

Pour $x \in [0; n[$, $\delta_n(x) = e^{-x} - (1 - x/n)^n$ et $\delta'_n(x) = -e^{-x} + (1 - x/n)^{n-1}$.

Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1) \ln(1 - x/n) + x.$$

On a

$$\varphi'_n(x) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{x/n-1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1-x$.

Par étude des variations de φ_n , on obtient l'existence de $x_n \in [0; n[$ tel que

$\varphi_n(x) \geq 0$ pour $x \leq x_n$ et $\varphi_n(x) \leq 0$ pour $x \geq x_n$. On en déduit que pour $x \leq x_n$, $\delta'_n(x) \geq 0$ et pour $x \geq x_n$, $\delta'_n(x) \leq 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0;n[} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n} e^{-x_n}.$$

Puisque la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est bornée par un certain M sur \mathbb{R}_+ , on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0;n[} \leq \frac{M}{n}.$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0;+\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, e^{-n}\right) \rightarrow 0.$$

On peut donc affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers f .

Exercice 20 : [énoncé]

(a) $f_n(x) = \exp(-n \ln(1 + \frac{x}{n})) = \exp(-x + o(1)) \rightarrow e^{-x} = f(x)$.

On sait $\ln(1+t) \leq t$ donc par opérations : $f_n(x) \geq e^{-x}$

(b) On sait

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

donc

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

puis

$$e^{-x} \leq f_n(x) \leq e^{-x+\frac{x^2}{2n}} = e^{-x} e^{\frac{x^2}{2n}}.$$

Sur $[0; a]$ on a $e^{\frac{x^2}{2n}} \leq e^{\frac{a^2}{2n}} \rightarrow 1$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|e^{a^2/2n} - 1| \leq \varepsilon$.

On a alors pour tout $x \in [0; a]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x}(e^{x^2/2n} - 1) \leq e^{a^2/2n} - 1 \leq \varepsilon.$$

Par suite $f_n \xrightarrow[0;a]{CU} f$.

(c) Les fonctions f_n sont décroissantes donc

$$\forall x \geq a, f_n(x) \leq f_n(a).$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $e^{-a} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq a$,

$$e^{-x} \leq \varepsilon/3.$$

Puisque $f_n(a) \rightarrow e^{-a}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |f_n(a) - e^{-a}| \leq \varepsilon/3.$$

Mais alors $\forall x \geq a$,

$$|f_n(x) - e^{-x}| \leq f_n(x) + e^{-x} \leq f_n(a) + e^{-x} \leq (f_n(a) - e^{-a}) + e^{-a} + e^{-x} \leq \varepsilon.$$

De plus, $f_n \xrightarrow[0;a]{CU} f$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N', \forall x \in [0; a] |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon.$$

Finalement

$$\forall n \geq \max(N, N'), \forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CU} f$.

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$ pour n assez grand. Par suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

(b) On a

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt) dt = \int_0^1 u(1-u) du = \frac{1}{6}.$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n) puisque

$$\int_0^1 f_n(t) dt \not\rightarrow \int_0^1 0 dt.$$

(c) Pour n assez grand, $\sup_{[a;1]} |f_n(x)| = 0$ donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a; 1]$.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$. Pour $x \in]0; \pi/2]$, $\cos x \in [0; 1[$ donc $f_n(x) \rightarrow 0$.

(b) Directement

$$I_n = \left[-\frac{n}{n+1} \cos^{n+1} x \right]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}$$

donc $I_n \rightarrow 1 \neq \int_0^{\pi/2} 0 \cdot dx$ et il n'y a pas convergence uniforme.

(c) On a

x	0	x_n	$\pi/2$
f_n	0	$f_n(x_n)$	0

avec $x_n = \arccos \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightarrow 0$ et

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{(1+1/n)^{(n+1)/2}} \sim \sqrt{\frac{n}{e}} \rightarrow +\infty.$$

Soit $[a; b] \subset]0; \pi/2]$. On a $a > 0$ donc à partir d'un certain rang $x_n < a$ et alors $\sup_{[a;b]} |f_n| = f_n(a) \rightarrow 0$ donc il y a convergence uniforme sur $[a; b]$.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) En distinguant le cas $x = 0$ du cas général, on obtient que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par $f(x) = x$.

(b) Par étude des variations de $f_n(x) - f(x)$, on obtient qu'il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

(c) Par un argument de convergence uniforme, on peut échanger limite et intégrale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

Pour $x \geq 0$, la suite numérique $(f_n(x))$ est une suite homographique.

L'équation $r = \frac{x}{2+r}$ possède deux solutions $r_1 = \sqrt{1+x} - 1$ et $r_2 = -\sqrt{1+x} - 1$.

Posons

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}.$$

On a

$$g_{n+1}(x) = \frac{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_1}}{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_2}} = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2} \frac{2+r_2}{2+r_1} = \rho g_n(x)$$

avec

$$\rho = \frac{2+r_2}{2+r_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Puisque $|\rho| < 1$, la suite géométrique $(g_n(x))$ converge vers 0.

Or après résolution de l'équation

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}$$

on obtient

$$f_n(x) = \frac{r_1 - g_n(x)r_2}{1 - g_n(x)}$$

et on en déduit que la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $r_1 = \sqrt{1+x} - 1$.

Finalement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f_\infty : x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$.

Puisque les fonctions f_n sont rationnelles de degrés alternativement 0 et 1, la fonction $|f_n - f_\infty|$ ne peut-être bornée sur \mathbb{R}_+ car de limite $+\infty$ en $+\infty$; il n'y a donc pas convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

En revanche, on peut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0; a]$ pour tout $a \geq 0$.

En effet

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1 - g_n(x)} 2\sqrt{1+x}.$$

D'une part, la fonction $x \mapsto 2\sqrt{1+x}$ est bornée sur $[0; a]$.

D'autre part,

$$g_n(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right)^n g_0(x).$$

Sur $[0; a]$, la fonction

$$x \mapsto \left| \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right|$$

admet un maximum de valeur < 1 et puisque la fonction continue g_0 est bornée sur $[0; a]$, on peut montrer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0; a]$.

La relation

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1 - g_n(x)} 2\sqrt{1+x}$$

permet alors d'établir que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0; a]$.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) On vérifie sans peine que la suite (f_n) est bien définie.

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}, \dots$$

Si $f(x) = \alpha x^\beta$ alors

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{\alpha} \int_0^x t^{\beta/2} dt = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2} x^{\beta/2+1}.$$

Ainsi $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n + 2} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} + 1.$$

On a

$$\beta_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \rightarrow 2$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

On a

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4 - \frac{1}{2^n}} - \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Or $2^n \geq 2^{n-1}$ donne

$$\frac{2}{4 - \frac{1}{2^n}} \leq \frac{2}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leq \frac{2}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}} (\sqrt{\alpha_{n+1}} - \sqrt{\alpha_n}).$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_0$, on obtient alors par récurrence que la suite (α_n) est décroissante.

Étant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\alpha_n \rightarrow 1/4.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f: x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

De plus

$$f_n(x) - f(x) = \alpha_n(x^{\beta_n} - x^2) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)x^2.$$

Puisque $\beta_n \leq 2$, on a pour tout $x \in [0; 1]$ et en exploitant $e^u \leq 1 + u$

$$\begin{aligned} 0 \leq x^{\beta_n} - x^2 &= \int_{\beta_n}^2 |\ln(x)| x^t dt \\ &\leq (2 - \beta_n) |\ln(x)| x^{\beta_n} \leq (2 - \beta_n) |\ln(x)| x. \end{aligned}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x |\ln x|$ est bornée par $1/e$ sur $[0; 1]$,

$$0 \leq x^{\beta_n} - x^2 \leq 2 - \beta_n$$

et ainsi

$$|f_n(x) - f(x)| = \alpha_n(2 - \beta_n) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)$$

et ce majorant uniforme tend vers 0.

Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f .

(b) La relation

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt$$

donne à la limite

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

d'où l'on tire f dérivable et $f'(x) = \sqrt{f(x)}$.

Pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y: x \mapsto (x/2)^2$ est justement solution.

Exercice 26 : [énoncé]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \rightarrow x$ et

$$|f_n(x) - x| = 1/n \rightarrow 0.$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction identité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)^2 \rightarrow x^2$ et

$$f_n(n)^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 \rightarrow 2.$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n^2) .

Exercice 27 : [énoncé]

Par opérations, les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 car $\sqrt{\cdot}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . La suite (f_n) converge simplement vers f avec $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

En multipliant par la quantité conjuguée :

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}}.$$

Par suite $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ puis $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$.

Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 28 : [énoncé]

Par la formule de Taylor Lagrange :

$$\left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) - \frac{1}{n} f'(x) \right| \leq \frac{M}{n^2}$$

avec $M = \sup |f''|$.

Par suite

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq \frac{M}{n}$$

et donc

$$\|g_n(x) - f'(x)\|_{\infty, \mathbb{R}} \rightarrow 0.$$

Exercice 29 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\forall x \in [0; 1], f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0)$$

donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n(0), -f_n(1)) \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|) \leq |f_n(0)| + |f_n(1)| \rightarrow 0.$$

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

Si $|\omega| > 1$ alors

$$\frac{1}{z - \omega} = -\frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\omega^n}$$

et la convergence normale sur U de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers

$$z \mapsto \frac{1}{z - \omega}.$$

Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{e^{i\theta} - \omega} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \int_0^{2\pi} e^{-i(n+(k+1))\theta} d\theta = 0.$$

Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur U vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{P_n(e^{i\theta})}{P_n(e^{i\theta})} \frac{1}{e^{i\theta} - \omega} d\theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - \omega|^2} \neq 0.$$

Or par le calcul précédent, on peut affirmer

$$\int_0^{2\pi} \frac{P_n(e^{i\theta})}{P_n(e^{i\theta})} \frac{1}{e^{i\theta} - \omega} d\theta = 0.$$

On conclut à une absurdité.

La condition cherchée est $|\omega| > 1$.

Exercice 31 : [\[énoncé\]](#)

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n(t) = \frac{f(t + 1/n) - f(t)}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(t).$$

La suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f' sur \mathbb{R} .

Soient $[a; b] \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction f' est continue sur le compact $[a; b + 1]$ dont uniformément continue. Il existe alors $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (s, t) \in [a; b + 1]^2, |s - t| \leq \alpha \implies |f'(s) - f'(t)| \leq \varepsilon.$$

Pour n assez grand de sorte que $1/n \leq \alpha$ et $t \in [a; b]$. On peut écrire

$$n(f(t + 1/n) - f(t)) - f'(t) = n \int_t^{t+1/n} (f'(s) - f'(t)) ds$$

et donc

$$|u_n(t) - f'(t)| \leq n \int_t^{t+1/n} |f'(s) - f'(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la convergence de $(u_n)_{n \geq 1}$ est uniforme sur tout segment de \mathbb{R} .

Exercice 32 : [\[énoncé\]](#)

(a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$: $u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$ donc

$$0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x.$$

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) dt$$

or $u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \geq 0$ donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geq 0$ et

$$u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leq \frac{(t - t^2)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n + 1)!}$$

puis

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \frac{x^{n+2}}{(n + 2)!}.$$

Récurrence établie.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}.$$

Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique

$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$

et donc convergence de la suite $(u_n(x))$.

(c) Pour tout $x \in [0; 1]$,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x)) \right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi (u_n) converge uniformément vers u . On en déduit que u est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in [0; 1], \int_0^x u_n(t - t^2) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^x u(t - t^2) dt.$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0; 1], u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt.$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car $u(0) = 1$) et dérivable avec

$$u'(x) = u(x - x^2).$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ vers S .

Soi $a > 0$. Sur $[a; +\infty[$,

$$\|f'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{(n+a)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$$

donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $[a; +\infty[$.

Par théorème, S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leq 0$ et la fonction S est décroissante.

(c)

$$S(x+1) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}.$$

(d) Quand $x \rightarrow 0$, $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$ et $S(x+1) \rightarrow S(1)$ donc

$$S(x) \sim \frac{1}{x}.$$

(e) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{2}(S(x) + S(x+1)) \leq S(x) \leq \frac{1}{2}(S(x) + S(x-1))$$

avec $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$ donne

$$S(x) \sim \frac{1}{2x}.$$

Exercice 34 : [énoncé]

Posons $u_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Par le critère spécial, $\sum u_n(x)$ converge pour chaque $x > 0$.

Il y a convergence simple de la série de fonctions définissant F .

(b) Les fonctions u_n sont de classe \mathcal{C}^1 et pour $n \geq 1$

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

On a

$$\|u'_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Il y a convergence normale $\sum u'_n$ pour $n \geq 1$.

Il y a donc convergence uniforme de $\sum u'_n$ (pour $n \geq 0$) et l'on peut donc conclure que F est de classe \mathcal{C}^1 .

De la même manière, on obtient F de classe \mathcal{C}^{∞} .

(c) Par décalage d'indice

$$F(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

et donc

$$F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}.$$

(d) Posons

$$G(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

L'intégrale est bien définie pour $x > 0$ et l'on remarque

$$G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}.$$

Posons $H = F - G$. La fonction H est 2-périodique, montrons qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.

Par application du critère spécial, on a

$$\forall x > 0, F(x) \geq 0$$

donc

$$0 \leq F(x) \leq F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et par encadrement F tend vers 0 en $+\infty$.

Le même raisonnement se transpose à G .

On peut conclure que H tend vers 0 en $+\infty$ puis finalement H est nulle.

(e) Quand $x \rightarrow 0$, $F(x+1) \rightarrow F(1)$ par continuité et donc

$$F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On vérifie aisément que F est décroissante et puisque

$$\frac{1}{x} = F(x) + F(x+1) \leq 2F(x) \leq F(x) + F(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

on obtient

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

(a) $f_n: x \mapsto \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)}$, f_n est continue sur $]0; +\infty[$.

Soit $a > 0$. Sur $[a; +\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{a^n}.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$. Par théorème, la somme S de la série $\sum f_n$ est continue sur $]0; +\infty[$.

(b)

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+1+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} S(x+1).$$

(c) Par convergence uniformément sur $[a; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} S(x+1) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$

Quand $x \rightarrow 0$,

$$S(x+1) \rightarrow S(1)$$

par continuité et

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = e - 1$$

donc

$$S(x) = \frac{1 + S(x+1)}{x} \sim \frac{e}{x}.$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire $f_n(x) = x(\text{th})'(c)$ avec $c \in]n; x+n[$. Puisque $(\text{th})'(c) = \frac{1}{\text{ch}^2(c)}$, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{\text{ch}^2(n)} \sim \frac{4x}{e^{2n}}.$$

Par suite $n^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement.

(b) Pour $a \in \mathbb{R}_+$, l'étude qui précède donne

$$\|f_n\|_{\infty,[0;a]} \leq \frac{a}{\operatorname{ch}^2(n)}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0; a]$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonction continue, on peut affirmer que S est continue. De plus, les fonctions sommées étant toutes strictement croissantes, la somme S l'est aussi.

En effet, pour $x < y$,

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) < \sum_{k=1}^n f_k(y)$$

donne à la limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)$$

et puisque $f_0(x) < f_0(y)$, on parvient à

$$S(x) < S(y).$$

(c)

$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n+1)) + \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(n+1) - \operatorname{th}(n))$$

avec convergence des deux séries introduites.

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n+1)) = S(x) - \operatorname{th} x$$

et par étude la limite des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(n+1) - \operatorname{th} n) = 1.$$

On conclut à la relation proposée.

(d) S admet une limite en $+\infty$ car c'est une fonction monotone. Pour déterminer celle-ci, étudions la limite de la suite $(S(n))$. La nature de la suite $S(n)$ est celle de la série de terme général

$$S(n+1) - S(n) = 1 - \operatorname{th} n.$$

Or

$$1 - \operatorname{th} n = \frac{\operatorname{ch} n - \operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n} = \frac{e^{-n}}{\operatorname{ch} n} \sim \frac{1}{2e^{-2n}}$$

est terme général d'une série absolument convergente.

On en déduit que la suite $(S(n))$ converge et donc que la fonction S converge.

Exercice 37 : [énoncé]

Puisque la fonction f est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$. Puisque la fonction f est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction f est positive.

Par télescopage, on observe

$$g(x+N) - g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x+k)$$

et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à g en $+\infty$, on est tenté de poser

$$g(x) = - \sum_{k=0}^{+\infty} f(x+k).$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a pour $k \geq 1$

$$0 \leq f(x+k) \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x+k)| \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

Par intégrabilité de f , il y a convergence de la série

$$\sum \int_{k-1}^k f(t) dt$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k \geq 1} f(x+k).$$

L'adjonction du terme d'indice $k = 0$ ne change rien et l'on peut conclure.

On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$$

$\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ vers S .

$$\forall a > 0, \|f'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ converge}$$

donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$. Par théorème S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}.$$

Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leq 0$ et S est décroissante.

(c)

$$xS(x) - S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

(d)

$$xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1) \text{ et } S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{e}.$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $xS(x) \rightarrow 1$ d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{x}.$$

(e) Par le critère spécial des séries alternées,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!(x+1+n)} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Par converge uniformément sur $]0; +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1) \rightarrow \frac{1}{e}$$

d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{ex}.$$

Exercice 39 : [énoncé]

On a

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où l'existence de la somme.

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+k}.$$

Or

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+1+k} = \sum_{k=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+k}$$

donc à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient $f(x+1) = f(x)$.

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} = 2 \sum_{k=-2N+1}^{2N+1} \frac{1}{x+k}$$

donne à la limite

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x).$$

Exercice 40 : [énoncé]

Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.

Soit f une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0) = 0$.

On a

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

donc

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^{n+1})}{2^n}.$$

Posons $h(x) = \sup_{[0;x]} |f|$.

Pour $x > 0$, on a $x^{n+1} \in [0; x^2]$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} h(x^2) = h(x^2).$$

Ainsi $h(x) \leq h(x^2)$ puis en itérant $0 \leq h(x) \leq h(x^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or pour $x \in [0; 1[$, $x^{2^n} \rightarrow 0$ et $\lim_{0+} h = 0$ (car $f(0) = 0$) donc $h(x) = 0$ sur $[0; 1[$.

Finalement f est nulle sur $[0; 1[$ puis en 1 par continuité.

Exercice 41 : [énoncé]

- (a) Si f est constante égale à C alors l'équation (E) est vérifiée si, et seulement si, $C = 2C - 2C^2$. Cette dernière équation est vérifiée pour $C = 0$ et $C = 1/2$ seulement.
- (b) Après substitution et étude séparée du cas $x = 0$, on obtient f solution de (E) si, et seulement si, h vérifie

$$h(2x) = h(x) - xh(x)^2.$$

- (c) L'application T_x est de classe \mathcal{C}^1 et $T'_x(y) = 1 - xy$. Sur $[0; 1]$, on vérifie $|T'_x(y)| \leq 1$ et la fonction T_x est donc 1-lipschitzienne sur $[0; 1]$. Au surplus, la fonction T_x est croissante sur $[0; 1]$ avec $T_x(0) = 0$ et $T_x(1) = 1 - x/2$. On en déduit $T_x([0; 1]) \subset [0; 1]$.

Par une récurrence immédiate, on vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], h_n(x) \in [0; 1].$$

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0; 1]$, on a par lipschitzianité

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right|.$$

En répétant cette majoration

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La série télescopique $\sum h_{n+1}(x) - h_n(x)$ converge donc absolument et la suite $(h_n(x))$ est donc convergente. La suite de fonctions (h_n) converge donc simplement vers une fonction h . Au surplus

$$|h(x) - h_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La convergence de la suite (h_n) est donc uniforme sur $[0; 1]$.

- (d) La fonction h est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur $[0; 1]$. En passant à la limite la relation

$$\forall x \in [0; 1], h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient l'identité

$$\forall x \in [0; 1], h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Puisque $h_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h(0) = 1$ et la fonction h n'est pas nulle. On peut alors définir la fonction $f: x \mapsto xh(x)$ qui est continue, non constante et vérifie

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

- (e) On peut ensuite définir une solution sur $[0; 2]$ en posant

$$\forall x \in]1; 2], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Cette solution est bien continue en 1 car

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1).$$

De même, on prolonge la solution sur $[0; 4]$, $[0; 8]$, etc.

Exercice 42 : [\[énoncé\]](#)

- (a) Pour $x > 0$, $u_n(x) = O(1/n^2)$. La série $\sum u_n(x)$ converge absolument. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* , les fonctions u_n sont de classe \mathcal{C}^1 avec

$$u'_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}.$$

Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Par monotonie, pour tout $x \in [a; b]$

$$|u'_n(x)| \leq |u'_n(a)| + |u'_n(b)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il y a donc convergence normale de $\sum u'_n$ sur tout segment de \mathbb{R}_+^* . La fonction somme de $\sum u_n$ est donc de classe \mathcal{C}^1 et la fonction f l'est aussi par opérations.

- (b) La fonction est de classe \mathcal{C}^1 . Il est immédiat que $f(1)$ est nul et, pour tout $x > 0$, on a après télescopage

$$f'(x+1) - f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = \frac{1}{x}$$

et

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= f(2) = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2 \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut affirmer $f(x+1) - f(x) = \ln x$. Enfin, f est convexe en tant que somme de fonctions qui le sont.

Inversement, soit g une autre fonction vérifiant les conditions proposées.

Étudions la fonction $h = f - g$.

La fonction h est de classe \mathcal{C}^1 , 1-périodique et prend la valeur 0 en 1. Nous allons montrer qu'elle est constante en observant que sa dérivée est nulle.

Pour $x > 0$, on a par croissance des dérivées de f et de g

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \leq f'(\lfloor x \rfloor + 1) - g'(\lfloor x \rfloor) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor} + h'(\lfloor x \rfloor)$$

et parallèlement

$$h'(x) \geq h'(\lfloor x \rfloor) - \frac{1}{\lfloor x \rfloor}.$$

La fonction h' est 1-périodique, les valeurs $h'(\lfloor x \rfloor)$ sont donc constantes égales à C .

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$ l'encadrement

$$C - \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \leq h'(x) \leq C + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$$

on obtient que la fonction h' présente une limite en $+\infty$. Puisque h' est périodique cette fonction est constante et, puisque la fonction h est périodique, la fonction h' est constante égale à 0.

- (c) On reconnaît en premier membre la fonction Γ « connue » indéfiniment dérivable avec

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On sait aussi $\Gamma > 0$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Considérons alors $f(x) = \ln(\Gamma(x))$.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ , $f(x+1) - f(x) = \ln x$, $f(1) = 0$ et f convexe car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

ce qui conduit à $f'' \geq 0$.

On peut donc affirmer

$$\Gamma(x) = e^{f(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^n \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^x}{1 + \frac{x}{k}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et on peut conclure sachant $n+1$ équivalent à n .

Exercice 43 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq 1/n^2.$$

Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur \mathbb{R} .

Exercice 44 : [\[énoncé\]](#)

On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur \mathbb{R} et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$. Il y a donc convergence uniforme sur \mathbb{R} .

Exercice 45 : [énoncé]

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, introduisons $k = \lfloor x \rfloor$. Pour $N \geq k + 1$, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n(x) = \frac{1}{k+1}$$

et donc la série de fonctions converge simplement sur $[0; +\infty[$ vers S avec

$$S(x) = \frac{1}{k+1} \text{ pour } x \in [k; k+1[.$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a

$$S(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < N+1 \\ S(x) & \text{si } x \geq N+1 \end{cases}$$

et donc

$$\left| S(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Il y a donc convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Enfin, $\|u_n\|_\infty = 1/(n+1)$ n'est pas sommable, il n'y a pas convergence normale.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Par croissance comparée, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} (n-x) e^{-x}.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n et affirmer

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n}.$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

(b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} et sa somme est égale à 1.

Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a; +\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.

En revanche sur $[0; a]$, il y a convergence normale car pour n assez grand de sorte que $n \geq a$, on a

$$\sup_{x \in [0; a]} |f_n(x)| = f_n(a).$$

Il y a aussi *a fortiori* convergence uniforme sur $[0; a]$.

Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$, on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.

Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Exercice 47 : [énoncé]

(a) Pour $x = 1$, $u_n(x) = 0$ et la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.

Pour $x \in [0; 1[$, on peut écrire $0 \leq u_n(x) \leq a_0 x^n (1-x) = \lambda x^n$. Or il y a convergence de la série numérique $\sum x^n$ et donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge.

(b) Après étude de fonction, on obtient

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} |u_n(x)| = \frac{a_n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{a_n}{en}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la convergence normale de $\sum u_n$ équivaut à la convergence de $\sum a_n/n$.

(c) Considérons le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x).$$

Par la décroissance de la suite (a_n)

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x).$$

Ainsi, pour $x \in [0; 1[$ ou $x = 1$, on obtient

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1}.$$

Par cette majoration uniforme, on peut affirmer que, si (a_n) tend vers 0, alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément.

Inversement, supposons la série $\sum u_n$ uniformément convergente.

La suite (a_n) étant décroissante et positive, elle admet nécessairement une limite $\ell \geq 0$. On a alors

$$\forall x \in [0; 1[, R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k (1-x) = \ell x^{n+1} \geq 0.$$

On obtient donc

$$\forall x \in [0; 1[, \ell x^{n+1} \leq \|R_n\|_\infty.$$

En faisant $x \rightarrow 1^-$,

$$\ell \leq \|R_n\|_\infty$$

et ceci valant pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut $\ell = 0$

Exercice 48 : [énoncé]

Remarquons que pour tout $t \in [0; 1]$,

$$t - t^2 \in [0; 1/4].$$

Pour $x \in [0; 1/4]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leq x \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4} \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]}.$$

Par une récurrence facile, on obtient

$$\|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

Par la remarque initiale, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leq \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\|u_{n+1}\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

On peut conclure que la série $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exercice 49 : [énoncé]

La fonction u_n est dérivable avec

$$u'_n(x) = \frac{1 - n^2 x}{(1 + n^2 x)^3}.$$

Les variations de u_n sur $[0; +\infty[$ fournissent

$$\|u_n\|_\infty = u_n(1/n^2) = \frac{1}{4n^2}.$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0; +\infty[$, *a fortiori* uniformément et simplement.

Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$,

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1 + n^2 x}{(1 + n^2 x)^3} = \frac{1}{(1 + n^2 a)^2} \sim \frac{1}{a^2} \frac{1}{n^4}.$$

La série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

En revanche, il n'y a pas convergence en 0, ni convergence uniforme sur $]0; a]$ car le théorème de la double limite ne peut s'appliquer en 0.

Exercice 50 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(x) = 1/n^x$ définie sur $]1; +\infty[$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1; +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$.

Plus précisément, pour $a > 1$, on a

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \text{ avec } \sum u_n(a) \text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions u_n sur $[a; +\infty[$.

Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que ζ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

(b) Posons $v_n(x) = \zeta(n)x^n/n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$ (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1).

Pour $x = 1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $((-1)^n \zeta(n)/n)$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car $\zeta(n+1) \leq \zeta(n)$.

(c) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction F est assurément de classe \mathcal{C}^1 (et même \mathcal{C}^∞) sur $] -1; 1[$.

Les fonctions v_n sont continues sur $[-1; 0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in [-1; 0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq |v_{n+1}(x)| \leq \frac{\zeta(n)}{n}.$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1; 0]$ et sa somme F est donc continue.

(d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x \in] -1; 1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}.$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p \geq 1} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right| \text{ et } \sum_{n \geq 1} \sum_{p=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right|.$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{p} \right).$$

La série de fonction associée converge normalement sur tout segment de $] -1; 1[$ et on peut donc intégrer terme à terme

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-t} - \frac{1}{p} \right) dt \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{p-t} - \frac{1}{p} dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{p}{p-x} \right) - \frac{x}{p}. \end{aligned}$$

Exercice 51 : [énoncé]

Chaque $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$f'_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^x}.$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers η sur $]0; +\infty[$.

La suite $(f'_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée. Étudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}.$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}.$$

Pour $\ln t \geq 1/x$, $\varphi'(t) \leq 0$ donc φ décroissante sur $[e^{1/x}; +\infty[$. Ainsi $(f'_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $\lfloor e^{1/x} \rfloor + 1$ et tend vers 0. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geq \lfloor e^{1/a} \rfloor + 1$ on a pour tout $x \in [a; +\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \rightarrow 0$$

$\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$.

On peut alors conclure que la fonction η est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Exercice 52 : [énoncé]

Par le critère spécial des séries alternées, ζ_2 est bien définie sur $]0; +\infty[$.

$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p} \frac{(\ln n)^p}{n^x}.$$

La suite $(f_n^{(p)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée. Étudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{(\ln t)^p}{t^x}.$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{\ln(t)^{p-1}(p-x \ln t)}{t^{x+1}}.$$

Pour $\ln t \geq p/x$, $\varphi'(t) \leq 0$ donc φ décroissante sur $[e^{p/x}; +\infty[$. Ainsi $(f_n^{(p)}(x))_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $E(e^{p/x}) + 1$ et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geq E(e^{p/a}) + 1$ on a pour tout $x \in [a; +\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} (\ln k)^p}{k^x} \right| \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^x} \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a} \rightarrow 0$$

$\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$ (pour tout $a > 0$) donc converge simplement sur $]0; +\infty[$ et converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$.

Par théorème on peut alors conclure que ζ_2 est \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 53 : [énoncé]

La convergence pour $x > 0$ de la série définissant $\zeta_2(x)$ est acquise par le critère spécial des séries alternées.

On peut combiner les termes d'indices impairs avec les termes d'indices pairs qui suivent

$$\zeta_2(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2p-1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \right).$$

Considérons alors la fonction $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{1}{(2t-1)^x} - \frac{1}{(2t)^x}.$$

La fonction f est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

puis en sommant ces encadrements

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \zeta_2(x) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2(1-x)} \left[(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} \right]_1^{+\infty}$$

avec

$$(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} = -(2t)^{1-x} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2t} \right)^{1-x} \right) \sim (x-1)(2t)^{-x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2(1-x)} (2^{1-x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}.$$

De plus

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2^x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

et donc par encadrement

$$\zeta_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}.$$

Exercice 54 : [énoncé]

(a) ζ est définie sur $]1; +\infty[$ et ζ_2 est définie sur $]0; +\infty[$ (via le critère spécial des séries alternées)

(b) $f_n: x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est continue.
Pour tout $a > 1$,

$$\left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^a}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{n^a}$$

or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1; +\infty[$. Par théorème, on obtient que la fonction ζ est continue.

$g_n: x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est continue.

Par le critère spécial des séries alternées

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x}$$

Pour tout $a > 0$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{(N+1)^a}$$

donc $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$. Par théorème on obtient que la fonction ζ_2 est continue sur $]0; +\infty[$.

(c) Pour $x > 1$

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^x} = \zeta(x) - 2^{1-x} \zeta(x).$$

Exercice 55 : [énoncé]

(a) Supposons le domaine de définition I non vide. Considérons $x \in I$. Puisque la suite (u_n) tend vers l'infini, il existe un rang N au-delà duquel tous ses termes sont supérieurs à 1. Pour tout réel $y \geq x$ et tout $n \geq N$

$$u_n^y = e^{y \ln u_n} \geq e^{x \ln u_n} = u_n^x \text{ donc } \frac{1}{u_n^y} \leq \frac{1}{u_n^x}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série définissant $f(y)$. Ainsi

$$x \in I \implies [x; +\infty[\subset I.$$

Lorsqu'il n'est pas vide, le domaine est donc un intervalle non majoré.

(b) Les fonctions $f_n: x \mapsto 1/u_n^x$ sont continues sur I et on a la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq N} f_n$ sur tout intervalle $[a; +\infty[$ inclus dans I car

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a; +\infty[, \left| \frac{1}{u_n^x} \right| = \frac{1}{u_n^x} \leq \frac{1}{u_n^a} = \alpha_n$$

avec $\sum \alpha_n$ convergente.

Par théorème, on peut affirmer que la fonction f somme de $\sum f_n$ est continue.

- (c) — Pour $u_n = \ln n$, $I = \emptyset$.
- Pour $u_n = n$, $I =]1; +\infty[$ (cf. séries de Riemann).
- Pour $u_n = n(\ln n)^2$, $I = [1; +\infty[$ (cf. séries de Bertrand).

Exercice 56 : [énoncé]

(a) Pour $x \in]0; 1[$, on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}.$$

Cette relation vaut aussi pour $x = 0$ ou $x = 1$.

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x \right| \leq x^{2(n+2)} |\ln x|.$$

L'étude de $\varphi: x \mapsto x^{2(n+2)} |\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0; 1], x^{2(n+2)} |\ln x| \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty} \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)} \rightarrow 0.$$

(c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \ln x dx - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2} dx$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0; 1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

Exercice 57 : [énoncé]

$$\left\| \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \right\|_{\infty, [0;1]} \leq \frac{1}{n^2}$$

est le terme générale d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment $[0; 1]$:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} d\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{2\alpha d\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \pi \frac{\text{ch } \pi \alpha}{\text{sh } \pi \alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

donc

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} d\alpha = \left[\ln \frac{\text{sh } \pi \alpha}{\alpha} \right]_0^1 = \ln \frac{\text{sh } \pi}{\pi}.$$

On en déduit que

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\text{sh } \pi}{\pi}.$$

Exercice 58 : [énoncé]

Pour $x \leq 0$, il y a divergence grossière.

Pour $x > 0$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n} + 2 \ln n} \rightarrow 0$ donc $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Ainsi f est définie sur $]0; +\infty[$.

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$, $|e^{-x\sqrt{n}}| \leq e^{-a\sqrt{n}}$. Cela permet d'établir la convergence normale de la série de fonctions sur $[a; +\infty[$. Par convergence uniforme sur tout

segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

Par convergence uniforme sur $[1; +\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 1.$$

Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

En sommant (avec $n = 0$ à part pour la majoration) on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2}.$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2}$$

quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 59 : [énoncé]

Par le critère spécial des séries alternées, il est immédiate de justifier que $S(t)$ est définie pour tout $t > 0$.

On peut réorganiser l'expression de $S(t)$ de la façon suivante :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{2p}}{(2pt+1)} + \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)t+1} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t}{(2pt+1)((2p+1)t+1)}.$$

La fonction $f_t: x \mapsto \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}$ est décroissante.

Par comparaison avec une intégrale, on obtient l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f_t(x) dx \leq S(t) \leq \int_0^{+\infty} f_t(x) dx.$$

Puisque par les calculs précédents

$$\frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} = \frac{1}{2xt+1} - \frac{1}{(2x+1)t+1}.$$

On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} dx = \left[\frac{1}{2t} \ln \frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)} \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(1+t)}{2t}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} dx = \left[\frac{1}{2t} \ln \frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)} \right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1+3t) - \ln(1+2t)}{2t}$$

Quand $t \rightarrow 0^+$, on obtient par encadrement $S(t) \rightarrow 1/2$.

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . De plus

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right\|_{\infty} \leq \ln \left(1 + \frac{x^2}{(N+1)(1+x^2)} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{N+1} \right) \rightarrow 0$$

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

(b) $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(1+1/n)$. Par convergence uniformément

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+1/n).$$

Pour calculer cette somme, manipulons les sommes partielles et séparons les termes d'indice pair de ceux d'indice impair

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^N \ln(2n+1) - \ln(2n) + \sum_{n=1}^N \ln(2n-1) - \ln(2n)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\left(\frac{(2N)!}{(2^N N!)^2} \right)^2 (2N+1) \right).$$

Or

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1+1/n) \sim \ln(2/\pi).$$

On en déduit

$$\ell = \ln(2/\pi).$$

Exercice 61 : [énoncé]

Posons

$$f_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{n\alpha} \text{ pour } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon.}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$f_k(n) \rightarrow \exp(-k\alpha).$$

Pour $k \leq n$

$$|f_k(n)| = \exp(n\alpha \ln(1-k/n)) \leq e^{-k\alpha}$$

et cette majoration vaut aussi pour $k > n$.

Ainsi

$$\|f_k\|_{\infty, \mathbb{N}} \leq e^{-k\alpha}$$

et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A = \mathbb{N}$.

Par interversion limite/somme infinie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\alpha}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{n\alpha} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

Exercice 62 : [énoncé]

Par la formule du binôme

$$\left(1 + \frac{z}{p} \right)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k}.$$

Considérons $f_k: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k} \text{ si } x \geq k \text{ et } f_k(x) = 0 \text{ sinon.}$$

En tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k} = \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p.$$

La série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$ converge simplement vers $x \rightarrow \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x$ en tout

$p \in \mathbb{N}$. De plus, puisque $|f_k(x)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$, la convergence est normale sur \mathbb{R}_+ . Pour k fixé, quand $x \rightarrow +\infty$,

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} \frac{z^k}{k!} \rightarrow \frac{z^k}{k!}.$$

Par le théorème de la double limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Exercice 63 : [énoncé]

Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2x} \text{ avec } x > 0.$$

- (a) Soit $x \in]0; +\infty[$. On a $f_n(x) \sim 1/n^2x$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et donc la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bien définie.
- (b) Les f_n sont continues sur \mathbb{R}_+^* . Soit $a > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{n + n^2a} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$.

On peut donc conclure que S est continue.

- (c) Chaque f_n est décroissante donc la fonction S l'est aussi.
- (d) Par convergence normale sur $[1; +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

On remarque

$$xf_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Posons $g_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx)}$. La fonction g_n croît de 0 à $1/n^2$ sur \mathbb{R}_+ donc

$$\|g_n\|_{\infty, [0; +\infty[} = \frac{1}{n^2}.$$

La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par suite $xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$ puis

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

- (e) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante donc par comparaison avec une intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) dt = \left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$$

donc

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x).$$

Exercice 64 : [énoncé]

- (a) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$ est définie et continue sur $] -1; +\infty[$. Soient $-1 < a \leq 0 \leq 1 \leq b$.

$$\|f_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{b}{n(n+a)}.$$

La série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; b]$ et donc converge uniformément sur tout segment inclus dans $] -1; +\infty[$.

(b) Chaque f_n est croissante donc par sommation de monotonie, S est croissante.

(c)

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

donc

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

(d) Quand $x \rightarrow -1$, $S(x+1) \rightarrow S(0) = 0$ puis

$$S(x) = -\frac{1}{x+1} + S(x+1) \sim -\frac{1}{x+1}.$$

(e) $S(0) = 0$ et $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

(f) On sait $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ et on sait $\ln(n+1) \sim \ln n$.
Puisque $S(E(x)) \leq S(x) \leq S(E(x)+1)$ on obtient

$$S(x) \sim \ln E(x) \sim \ln x.$$

Exercice 65 : [énoncé]

(a) Posons $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$

Pour $x \leq 0$, la série $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.

Pour $x > 0$, $n^2 f_n(x) \rightarrow 0$ donc $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ converge absolument.

La fonction f est donc définie sur $]0; +\infty[$.

Pour $a > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a)$$

et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$. Comme somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

(b) f est somme de fonction strictement décroissante, elle donc elle-même strictement décroissante.

(c) Par convergence uniforme sur $[a; +\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

(d) Par monotonie de $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$,

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

En sommant

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \sim \frac{2}{x^2}$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Notons : $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc $S(x)$ est bien définie.

Pour $x \in]0; 1[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \sim x < 1$ et $S(x)$ est bien définie.

Pour $x = 1$: $f_n(x) = 1/2$ et $S(x)$ n'est pas définie.

Pour $x \in]1; +\infty[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \rightarrow \frac{1}{x} < 1$ donc $S(x)$ est bien définie.

Finalement S est définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par convergence simple de $\sum f_n$ sur ce domaine.

(b)

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, S(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = S(x).$$

(c) Soit $0 < a < 1$. Sur $[0; a]$,

$$\|f_n\|_{\infty, [0; a]} \leq a^n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} a^n < 1$$

donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; a]$ et donc converge uniformément sur tout segment de $[0; 1[$. Par théorème S est continue sur $[0; 1[$.

Par composition de fonctions continues $S : x \mapsto S(1/x)$ est aussi continue sur $]1; +\infty[$.

(d)

$$f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - 2nx^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}.$$

Chaque f_n est croissante sur $[0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.
 Par sommation de monotonie, la fonction S est croissante sur $[0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.
 $S(0) = 0$.
 Quand $x \rightarrow 1^-$,

$$S(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{2x}{1-x} \rightarrow +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$.
 Puisque $S(1/x) = S(x)$, on obtient par composition de limites,
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Exercice 67 : [énoncé]

Pour $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.
 Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.

La fonction S est définie sur $] -1; 1[$.

Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.

u_n est de classe \mathcal{C}^1 , $\sum u_n$ converge simplement,

$$u'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour $a \in [0; 1[$,

$$\|u'_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq n \frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u'_n$ sur tout segment de $] -1; 1[$.
 Par suite la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 .

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Pour $x \in [0; 1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)}.$$

Puisque $\sum_{p \geq 0} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$ converge et $\sum_{n \geq 1} \sum_{p=0}^{+\infty} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x) = x^{p+1} \frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0; 1[$.

La fonction u_p est continue sur $[0; 1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.

Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum (-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k u_k(x) \right\|_{\infty} \leq u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0; 1[$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}.$$

Exercice 68 : [énoncé]

Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Sachant

$$2|nx| \leq 1 + n^2x^2$$

on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} . Les fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2x^2}{n(1 + n^2x^2)^2}.$$

Soit $a > 0$. Pour $|x| \geq a$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1 + n^2x^2}{n(1 + n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1 + n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1 + n^2a^2)}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}^* .

La somme S est donc une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Montrons que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + n^2x^2)}.$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + t^2x^2)}.$$

Par le changement de variable $u = tx$

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) \geq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{u(1 + u^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

car la fonction positive $u \mapsto 1/u(1 + u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

Exercice 69 : [énoncé]

Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan(nx).$$

Chaque f_n est continue et $\|f_n\|_\infty = \frac{\pi}{2n^2}$ est terme général d'une série convergente.

Par convergence normale, on peut affirmer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n(1 + (nx)^2)}.$$

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; -a]$,

$$\|f'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n(1 + (na)^2)}$$

ce qui donne la convergence normale de la série des dérivées.

Ainsi, par convergence uniforme sur tout segment, on obtient f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Exercice 70 : [énoncé]

(a) En vertu du théorème des accroissements finis

$$|u_n(x)| \leq (\sqrt{n+x} - \sqrt{n}) \sup_{[\sqrt{n}; \sqrt{n+x}]} |(\arctan)'| = \frac{\sqrt{n+x} - \sqrt{n}}{1+n}$$

donc

$$|u_n(x)| \leq \frac{x}{(1+n)(\sqrt{n} + \sqrt{n+x})} \leq \frac{x}{2\sqrt{n}(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et donc la fonction S est bien définie.

Les fonctions u_n sont continue et pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall x \in [0; a], |u_n(x)| \leq \frac{a}{2\sqrt{n}(n+1)}.$$

On peut donc affirmer la convergence uniforme sur tout segment de la série $\sum u_n$ ce qui assure la continuité de S .

(b) Montrons que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Remarquons que par le théorème des accroissements finis

$$u_n(n) = \arctan \sqrt{2n} - \arctan \sqrt{n} \geq \frac{\sqrt{2n} - \sqrt{n}}{1 + 2n} \sim \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{n}}$$

et il y a donc divergence vers $+\infty$ de la série $\sum u_n(n)$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^N u_n(n) \geq A.$$

Pour $x \geq N$,

$$S(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(N) \geq \sum_{n=0}^N u_n(n) \geq A.$$

On peut donc affirmer

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Posons

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Les fonctions u_n sont définies et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} car $u_n(x) \sim 1/n^2$.

On a

$$u'_n(x) = \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}$$

donc sur $[-a; a]$,

$$\|u'_n\|_\infty \leq \frac{2a}{n^4}$$

et la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de \mathbb{R} .On peut conclure que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 .(b) La fonction $t \mapsto 1/(t^2 + x^2)$ est décroissante donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

(c) On peut écrire

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{1 + x^2/n^2} \right) = \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n^4} \frac{x^4}{n^2 + x^2}$$

et par convergence des sommes introduites

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^4} + x^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)}.$$

Or

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} < +\infty$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} x^2 + \mathcal{O}(x^4).$$

Exercice 72 : [énoncé]

Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Puisque les fonctions f_n sont toutes impaires, on limite l'étude à $x \in [0; +\infty[$.À partir d'un certain rang N_x , on a $x/n \leq \pi/2$ et alors

$$\sin(x/n) \in [0; 1].$$

La série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie alors les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang N_x et par conséquent cette série converge.Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} et donc sa fonction somme, que nous noterons S , est définie sur \mathbb{R} .Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

de sorte que

$$\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur \mathbb{R} et donc la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , *a fortiori* cette fonction est continue.**Exercice 73 : [énoncé]**(a) Posons $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{1+na} \rightarrow 0$$

pour tout $a > 0$.Par convergence uniformément sur tout segment d'une série de fonctions continue, S est définie et continue sur $]0; +\infty[$.(b) Par convergence uniformément sur $[a; +\infty[$,

$$\lim_{+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt} = 1.$$

Par application du critère spécial des séries alternées

$$1 - \frac{1}{1+t} \leq S(t) \leq 1.$$

(c) Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.

$$f'_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}.$$

La série $\sum f'_n(t)$ est alternée avec $|f'_n(t)| = \frac{n}{(1+nt)^2}$.

Puisque

$$|f'_n(t)| - |f'_{n+1}(t)| = \frac{n(n+1)t^2 - 1}{(1+nt)^2(1+(n+1)t)^2}$$

la suite $(|f'_n(t)|)$ décroît vers 0 à partir d'un certain rang.

Soit $a > 0$.

À partir d'un certain rang n_0 ,

$$n(n+1)a^2 - 1 \geq 0$$

et alors pour tout $t \geq a$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à partir du rang n_0 .

On a alors

$$|R_n(t)| \leq \frac{n}{(1+nt)^2} \leq \frac{n}{(1+na)^2}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{n}{(1+na)^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$. Par théorème, on peut alors conclure que S est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 74 : [énoncé]

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}.$$

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées et donc $\sum u_n$ converge simplement. La fonction S est donc bien définie, elle est évidemment impaire.

(b) Soit $a > 0$. Par le critère spécial des séries alternées

$$|R_n(x)| \leq \frac{x}{(n+1)+x^2} \leq \frac{a}{n+1} \text{ pour } x \in [-a; a]$$

et donc

$$\|R_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0.$$

Il y a convergence uniforme sur $[-a; a]$ pour tout $a > 0$ et donc convergence uniforme¹ sur tout segment de \mathbb{R} .

De plus chaque fonction u_n est continue donc S est continue.

(c) Par le critère spécial des séries alternées, on peut encadrer S par deux sommes partielles consécutives

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2+x^2} \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$$

et on peut donc affirmer $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 75 : [énoncé]

(a) Pour $x \in]-1; 1[$,

$$|u_n(x)| = o(|x|^n)$$

donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

Pour $x = 1$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

donc $\sum u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.

Pour $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{|x|^n}\right)$$

donc $\sum u_n(x)$ est somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

(b)

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1/x^n}{1+1/x^n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(c) Soit $a \in [0; 1[$.

$$\|f\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{a^n}{1-a^n} \leq \frac{a^n}{1-a}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a; a]$.

Par convergence uniforme d'une série de fonctions continues sur tout segment de $]-1; 1[$, on peut affirmer que f est continue sur $]-1; 1[$. Puisque

$f(x) = C^{te} - f(1/x)$, f est aussi continue sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$ par composition de fonctions continues.

1. Une étude des variations de la fonction $x \mapsto x/(n+1+x^2)$ permet aussi d'établir qu'il y a convergence uniforme sur \mathbb{R} .

(d) Pour $x \in [0; 1]$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n} \frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n \geq 0}$ décroît vers 0 (après étude non détaillée ici) donc le critère spécial des séries alternées s'applique et

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

puis

$$\|R_n\|_{\infty, [0;1]} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ donc f est continue sur $[0; 1]$ et donc continue à gauche en 1. Par la relation du b) on obtient aussi f continue à droite en 1.

Exercice 76 : [énoncé]

(a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.

(b)

$$\ln \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) \right)$$

avec $x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right).$

Or la série $\sum \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $O(1/n^2)$ et

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right) = x \ln n + \gamma x + o(1) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

(c) Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ pour $x > 0$ et $n \geq 1$. f_n est \mathcal{C}^1 , $\sum f_n$ converge simplement et $f'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 77 : [énoncé]

- (a) Si $x \leq 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x > 0$ alors $n^2 f_n(x) = e^{2 \ln n - x n^\alpha} \rightarrow 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$. f est définie sur $]0; +\infty[$.
- (b) Les fonctions f_n sont continues. Pour $a > 0$, $\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que f est continue.
- (c) Par convergence uniforme sur $[a; +\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

Exercice 78 : [énoncé]

- (a) Pour $x < 0$, $u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Pour $x = 0$, $u_n(x) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge. Pour $x > 0$, $u_n(x) = o(1/n^2)$ par croissance comparée et donc $\sum u_n(x)$ converge absolument. On conclut $I = \mathbb{R}_+$.
- (b) Pour $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\|u_n\|_{\infty, [a; b]} = \sup_{x \in [a; b]} |u_n(x)| \leq \frac{n^\alpha b e^{-na}}{n^2 + 1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de \mathbb{R}_+^* . Sa somme est alors continue sur \mathbb{R}_+^* .

(c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x)| = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}.$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha < 2$.

(d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha e^{-k/n}}{k^2 + 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1} e^{-k/n} \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k/n}.$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k/n} = \frac{1}{2n} \frac{e^{-(n+1)/n}}{1 - e^{-1/n}} \rightarrow \frac{1}{2e}$$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ alors

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \rightarrow 0$$

ce qui vient d'être exclu.

(e) Si S est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq S(1/n) \rightarrow S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

Exercice 79 : [énoncé]

Puisque $a_n > 0$ et $\sum a_n(1 + |x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.

Posons $f_n(x) = a_n |x - x_n|$.

Comme $|a_n |x - x_n|| \leq |a_n| |x| + |a_n x_n|$, la série des fonctions f_n converge simplement sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n sont continues et sur $[-M; M]$, $\|f_n\|_{\infty} \leq M a_n + a_n |x_n|$.

Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme f est continue.

Soit $[\alpha; \beta] \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \notin [\alpha; \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\alpha; \beta]$ et $f'_n(x) = \varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon| = 1$.

Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha; \beta]$, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur tout intervalle ouvert $]a; b[$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin]a; b[$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x_n = a$.

En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a\}$, on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n \in A} a_n |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A} a_n |x - x_n| = \alpha |x - a| + g(x)$$

avec $\alpha > 0$.

Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour N assez grand, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_n \leq \frac{\alpha}{2}$.
On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \geq N+1} a_n |x - x_n| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \leq N} a_n |x - x_n|.$$

La fonction $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \leq N} a_n |x - x_n|$ est dérivable au voisinage de a .
Cependant, la fonction

$$\varphi: x \mapsto \alpha |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \geq N+1} a_n |x - x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en a .

En effet, pour $h > 0$,

$$\frac{1}{h} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour $h < 0$,

$$\frac{1}{h} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \leq -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

Exercice 80 : [énoncé]

(a) def S(N,x):

if N == 0:

return 1/x

return S(N-1,x) + 1/(x-N) + 1/(x+N)

(b) import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

def trace(N,a,b):

X = linspace(a,b,100)

Y = [S(N,x) for x in X]

plt.plot(X,Y)

(c) Posons $u_n: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2x}{n^2}.$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On peut alors affirmer la convergence simple de la suite de fonctions (S_N) vers une certaine fonction S sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(d) Soit $[a; b]$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour N_0 assez grand, on a

$$[a; b] \subset [-N_0; N_0].$$

Soit $x \in [a; b]$. Pour tout $N > N_0$ et tout $P \in \mathbb{N}$,

$$S_{N+P}(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Le facteur $x^2 - n^2$ est négatif pour chaque terme sommé et par conséquent

$$|S_{N+P}(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2N_0}{n^2 - N_0^2}.$$

En passant à la limite quand P tend vers $+\infty$, on obtient la majoration uniforme

$$|S(x) - S_N(x)| \leq \alpha_N \quad \text{avec} \quad \alpha_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2N_0}{n^2 - N_0^2}.$$

Puisque α_N est le reste de rang N d'une série convergente, α_N est de limite nulle et on peut conclure que la suite de fonctions (S_N) converge uniformément vers S sur $[a; b]$.

(e) Les fonctions S_N sont continues et par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Les fonctions S_N sont impaires et par convergence simple, on peut affirmer que S est une fonction impaire.

Enfin, on obtient que la fonction S est 1-périodique en passant à la limite l'égalité

$$S_N(x+1) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} = S_N(x) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N}$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(f) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on remarque

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{x}{2}\right) + S_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=-N}^N \frac{2}{x-2n} + \sum_{n=-N}^N \frac{2}{x-(2n-1)} \\ &= \sum_{n=-2N-1}^{2N} \frac{2}{x-n} = 2S_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}. \end{aligned}$$

On obtient la relation voulue en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$.

(g) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\cot\left(\pi \frac{x}{2}\right) + \cot\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Après réduction au même dénominateur

$$\cot\left(\pi \frac{x}{2}\right) + \cot\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) = \frac{2 \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2 \cot(\pi x).$$

L'ensemble des fonctions vérifiant la relation proposée étant un sous-espace vectoriel, la fonction f vérifie aussi cette relation.

(h) Pour $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$, on peut écrire

$$S(x) = \frac{1}{x} + T(x) \quad \text{avec} \quad T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Par les arguments précédents, on peut affirmer que la fonction T est continue sur $] -1; 1[$. Aussi, on a par développement limité

$$\pi \cot(\pi x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{x} + o(1)$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1) - T(x)$$

ce qui permet de prolonger f par continuité en 0 avec la valeur $-T(0) = 0$. Par périodicité, on peut prolonger f par continuité avec la valeur 0 en tout $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction f est continue sur le compact $[0; 1]$ et y présente un maximum de valeur M . Celui-ci est atteint en un certain $x_0 \in [0; 1]$. Or

$$\underbrace{f\left(\frac{x_0}{2}\right)}_{\leq M} + \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\leq M} = 2f(x_0) = 2M$$

et donc

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = M.$$

Ainsi, le maximum de f est aussi atteint en $x_0/2$, puis en $x_0/4$, etc. Finalement, le maximum de f est atteint en 0 et il est donc de valeur nulle. De même, on montre que le minimum de f est nul et on peut conclure

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, S(x) = \pi \cot(\pi x).$$

Exercice 81 : [énoncé]

- (a) Puisque $\|a\| < 1$ et $\|a^n\| \leq \|a\|^n$, la série $\sum a^n$ est absolument convergente et sa somme S vérifie $(1_E - a)S = S(1_E - a) = 1_E$ donc $1_E - a$ est inversible d'inverse S .
- (b) Pour $\alpha \in [0; 1[$, on montre par convergence normale la continuité de $a \mapsto (1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ sur $\overline{B}(0, \alpha)$. On en déduit que $x \mapsto x^{-1}$ est continue en 1_E .
- (c) Soit $a \in U(E)$. Quand $x \in U(E) \rightarrow a$ alors $xa^{-1} \rightarrow 1_E$ donc $(xa^{-1})^{-1} \rightarrow 1_E^{-1} = 1_E$ puis $x^{-1} = a^{-1}(xa^{-1})^{-1} \rightarrow a^{-1}$. Ainsi $x \mapsto x^{-1}$ est continue en chaque $a \in U(E)$.

Exercice 82 : [énoncé]

- (a) $\left\| \frac{1}{k} t^k A^k \right\| = \frac{1}{k} |t|^k \|A\|^k$ avec $|t| \|A\| < 1$ donc la série converge simplement.
- (b) Soit $\rho \in [0; 1/ \|A\|]$. $t \mapsto \frac{1}{k} t^k A^k$ est de classe \mathcal{C}^1 et de dérivée $t^{k-1} A^k$ avec

$$\|t^{k-1} A^k\|_{\infty, [-\rho; \rho]} \leq \rho^{k-1} \|A\|^k$$

terme général d'une série convergente. La série des fonctions dérivées converge donc normalement sur $[-\rho; \rho]$ ce qui assure que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1/ \|A\| ; 1/ \|A\| [$ et

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k \right) A.$$

Or

$$(I - tA) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k - \sum_{k=1}^{+\infty} t^k A^k = I$$

donc $(I - tA)f'(t) = A$.

Exercice 83 : [énoncé]

- (a) Soit $s = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^a}.$$

Par conséquent, si $a > 1$, la série $\sum 1/n^s$ converge absolument et donc converge.

- (b) Soit s tel que $\text{Re}(s) > 1$. En développant

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^s}.$$

Par absolue convergence, on peut séparer la première somme en deux paquets, celui des termes d'indices pairs et celui des termes d'indices impairs. Il vient alors

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^s} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^s}. \tag{1}$$

En regroupant ces sommes, on obtient

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

avec sommabilité de la somme en second membre.

- (c) En reprenant, l'expression (??), étudions

$$F(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^s} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^s} = \sum_{p=1}^{+\infty} u_p(s)$$

avec

$$u_p(s) = \frac{(2p)^s - (2p-1)^s}{(2p)^s(2p-1)^s}$$

définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 0$.

Pour $s = a + ib$ fixé, la fonction $f : t \mapsto t^s$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[2p-1; 2p]$ et

$$|f'(t)| = |st^{s-1}| = |s| t^{a-1} \leq |s| ((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1}).$$

Par l'inégalité des accroissements finis

$$|(2p)^s - (2p-1)^s| \leq |s| ((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1})$$

donc

$$\begin{aligned} |u_p(s)| &\leq |s| \frac{((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1})}{(2p)^a(2p-1)^a} \\ &\leq |s| \left(\frac{1}{(2p)^a(2p-1)} + \frac{1}{(2p)(2p-1)^a} \right). \end{aligned}$$

Introduisons alors

$$\Omega_{\alpha,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \alpha \text{ et } |z| \leq R\} \quad \text{pour } \alpha, R > 0.$$

Les fonctions u_n sont continues sur $\Omega_{\alpha,R}$ et pour tout $s \in \Omega_{\alpha,R}$

$$|u_n(s)| \leq |R| \left(\frac{1}{(2p)^\alpha (2p-1)} + \frac{1}{(2p)(2p-1)^\alpha} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\Omega_{\alpha,R}$ et sa fonction somme F est définie et continue sur $\Omega_{\alpha,R}$. Ceci valant pour tous α et R strictement positifs, on obtient que F est définie et continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \alpha\}$. Enfin, la fonction $s \mapsto 1 - 2^{1-s}$ étant continue et ne s'annulant pas sur Ω , on peut prolonger ζ par continuité sur Ω en posant

$$\zeta(s) = \frac{F(s)}{1 - 2^{1-s}}.$$