# Suites et séries de fonctions

## Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

**Exercice 1** [ 00868 ] [Correction]
Établir que la limite simple d'une suite de fonctions de $I$ vers $\mathbb{R}$ convexes est convexe.

**Exercice 2** [ 00885 ] [Correction]
Soient $(f_n)$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f$ et $g$ une fonction uniformément continue.
Montrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

**Exercice 3** [ 00884 ] [Correction]
Soient $(f_n)$ et $(g_n)$ deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions $f$ et $g$ supposées bornées.
Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers $fg$.

**Exercice 4** [ 00878 ] [Correction]
Soit $(f_n)$ une suite de fonctions réelles continues et définies sur $[a\,;b]$. On suppose que $f_n$ converge uniformément vers une fonction $f$.
Montrer

$$\inf_{[a;b]} f_n \to \inf_{[a;b]} f$$

**Exercice 5** [ 00879 ] [Correction]
On suppose qu'une suite de fonctions $(f_n)$ de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue et on considère une suite $(x_n)$ d'éléments de $[a\,;b]$ convergeant vers $x$. Montrer

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

**Exercice 6** [ 03461 ] [Correction]
Soit $(P_n)$ une suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction $f$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f$ est polynomiale.

## Étude pratique de la convergence d'une suite de fonctions

**Exercice 7** [ 00871 ] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in \left]0\,;1\right] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $[0\,;1]$.

**Exercice 8** [ 00872 ] [Correction]
Étudier la convergence uniforme de $f_n\colon [0\,;+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

**Exercice 9** [ 00870 ] [Correction]
On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)$ sur $[0\,;+\infty[$.
(b) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.
(c) Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

**Exercice 10** [ 00873 ] [Correction]
On pose

$$f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-nx} \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

Étudier la convergence uniforme de $(f_n)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

**Exercice 11** [ 00874 ] [Correction]
On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Étudier la convergence uniforme de $(f_n)$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty\,;-a] \cup [a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

**Exercice 12** [ 00875 ] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f_n(0) = 0$$

(a) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)$ sur $\mathbb{R}$.
(b) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)$ sur $[-a\,;a]$ avec $a > 0$.

**Exercice 13** [ 02527 ] [Correction]
Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)$ donnée par
$$f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$$

**Exercice 14** [ 02518 ] [Correction]
Étudier la suite de fonctions $(f_n)$ définie par
$$f_n(x) = \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$$

**Exercice 15** [ 02830 ] [Correction]
On pose, pour $x \geq 0$,
$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$
Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 16** [ 00876 ] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

**Exercice 17** [ 00877 ] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) \text{ pour } x \in [0\,;1]$$
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

**Exercice 18** [ 00881 ] [Correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$$

(a) Étudier la limite simple de la suite $(f_n)$.
(b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

**Exercice 19** [ 02972 ] [Correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0\,;n[ \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n$$
Étudier le mode de convergence de $(f_n)$.

**Exercice 20** [ 00890 ] [Correction]
Soit $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

(a) Étudier la limite simple de $(f_n)$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq \lim f_n(x)$$
(b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$
justifier que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur tout intervalle $[0\,;a]$ (avec $a > 0$).
(c) Établir qu'en fait, la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 21** [ 00892 ] [Correction]
Soit $f_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0\,;1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

(a) Étudier la limite simple de la suite $(f_n)$.

(b) Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)$ ?

(c) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;1]$ avec $a>0$.

**Exercice 22** [ 00891 ] [Correction]
Pour $x\in[0\,;\pi/2]$, on pose $f_n(x)=n\sin x\cos^n x$.

(a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)$.

(b) Calculer
$$I_n=\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
La suite $(f_n)$ converge-t-elle uniformément ?

(c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0\,;\pi/2]$.

**Exercice 23** [ 02532 ] [Correction]

(a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x)=x(1+n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}_+$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction $f$ à déterminer.

(b) Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles il y a convergence uniforme.

(c) Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x$$

**Exercice 24** [ 02860 ] [Correction]
Soit $(f_n)$ la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_0(x)=x \text{ et } f_{n+1}(x)=\frac{x}{2+f_n(x)} \text{ pour } n\in\mathbb{N}$$
Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 25** [ 02970 ] [Correction]
On note $E$ l'ensemble des fonctions $f\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}_+$ continues.
On pose
$$\Phi(f)(x)=\int_0^x\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$
pour toute $f\in E$.
On pose $f_0=1$ puis $f_{n+1}=\Phi(f_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(a) Étudier la suite $(f_n)$.

(b) Soit $f=\lim(f_n)$.
Trouvez une équation différentielle dont $f$ est solution.
Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

# Étude théorique de la convergence d'une suite de fonctions

**Exercice 26** [ 00883 ] [Correction]
Soit $f_n\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x)=x+1/n$$
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément mais pas $(f_n^2)$.

**Exercice 27** [ 00869 ] [Correction]
Soit $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n}$$
Montrer que chaque $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 28** [ 00887 ] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.
Montrer que la suite des fonctions
$$g_n\colon x\mapsto n\left(f(x+1/n)-f(x)\right)$$
converge uniformément vers $f'$.

**Exercice 29** [ 00888 ] [Correction]
Soit $f_n\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ décroissante telle que $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.
Montrer que cette convergence est uniforme.

**Exercice 30** [ 02833 ] [Correction]
On note $U$ l'ensemble des complexes de module 1 et on considère $\omega$ un complexe de module $\neq 1$.
Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$$

soit limite uniforme sur $U$ d'une suite de fonctions polynomiales.

**Exercice 31** [ 03902 ] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(t) = n\left(f\left(t+1/n\right) - f(t)\right)$$

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.

## Fonction solution d'équations fonctionnelles

**Exercice 32** [ 00893 ] [Correction]
On définit $(u_n)$ suite de fonctions de $[0\,;1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) En déduire la convergence pour tout $x \in [0\,;1]$ de la suite $(u_n(x))$.

(c) Établir que la suite $(u_n)$ converge uniformément vers une fonction $u$ non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x-x^2)$$

**Exercice 33** [ 00903 ] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

(a) Justifier que $S$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Préciser le sens de variation de $S$.

(c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

(d) Donner un équivalent de $S$ en 0.

(e) Donner un équivalent de $S$ en $+\infty$.

**Exercice 34** [ 03777 ] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

(a) Montrer que $F$ est bien définie.

(b) Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Simplifier

$$F(x) + F(x+1)$$

(d) Montrer que pour $x > 0$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(e) Donner un équivalent de $F$ en 0 et en $+\infty$.

**Exercice 35** [ 00913 ] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)}$$

(a) Justifier que $S$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Former une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$.

(c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0.

**Exercice 36** [ 00914 ] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f_n(x) = \operatorname{th}(x+n) - \operatorname{th} n$$

(a) Établir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

(b) Justifier que la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x+1) - S(x) = 1 - \operatorname{th} x$$

(d) Étudier la convergence de $S$ en $+\infty$.

**Exercice 37** [ 03754 ] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable.
Montrer l'existence d'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x+1) - g(x) = f(x)$$

**Exercice 38** [ 00912 ] [Correction]
On rappelle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$
et on pose pour $x > 0$,
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

(a) Justifier que $S$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Préciser le sens de variation de $S$.

(c) Établir que
$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

(d) Donner un équivalent de $S$ en $+\infty$.

(e) Donner un équivalent de $S$ en 0.

**Exercice 39** [ 00898 ] [Correction]
Justifier l'existence de
$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$$
pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Montrer que $f$ est 1-périodique et qu'on a
$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

**Exercice 40** [ 02973 ] [Correction]
Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ telles que
$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

**Exercice 41** [ 04104 ] [Correction]
On étudie l'équation fonctionnelle
$$(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$$

(a) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$ ?

(b) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur $h$, la fonction $f$ est-elle solution de $(E)$ ?

(c) On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $h_0 : x \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$
Pour $x \in [0\,;1]$, soit $T_x : y \mapsto y - xy^2/2$. Montrer que $T_x$ est 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$ et que $T_x\big([0\,;1]\big) \subset [0\,;1]$.
Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

(d) Montrer que l'équation $(E)$ admet une solution continue et non constante sur $[0\,;1]$.

(e) Montrer que l'équation $(E)$ admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 42** [ 04186 ] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$u_n(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

(a) Montrer que $\sum u_n(x)$ converge si $x > 0$.
Montrer que $f\colon x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $f$ est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \ln x \\ f \text{ est convexe} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

(c) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

## Étude de la convergence d'une série de fonctions

**Exercice 43** [ 00895 ] [Correction]
Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

**Exercice 44** [ 00896 ] [Correction]
Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

**Exercice 45** [ 00897 ] [Correction]
On note $1_I$ la fonction caractéristique d'un intervalle $I$ :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0\,;+\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n;n+1[}(x)$$

**Exercice 46** [ 03785 ] [Correction]
On introduit l'application sur $[0\,;+\infty[$

$$f_n\colon x \mapsto \frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

(a) Étudier les convergences de la suite de fonctions $(f_n)$.

(b) Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

**Exercice 47** [ 03295 ] [Correction]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n(1-x) \text{ avec } x \in [0\,;1]$$

(a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

(b) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.

(c) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \to 0$.

**Exercice 48** [ 02839 ] [Correction]
On pose

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel $x \in [0\,;1]$ et tout entier naturel $n$.
Montrer que la série de terme général $u_n$ est normalement convergente.

**Exercice 49** [ 03988 ] [Correction]
Soit $u_n\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1+n^2x)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum u_n$ et $\sum u_n'$.

## Fonctions zêta

**Exercice 50** [ 02834 ] [Correction]
Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

(a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$ ?

(b) Pour quels réels $x$ la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?

(c) Si

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

montrer que $F$ est continue sur $[-1\,;1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

(d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

**Exercice 51** [ 00908 ] [Correction]
On pose

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction $\eta$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

**Exercice 52** [ 00909 ] [Correction]
On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que $\zeta_2$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

**Exercice 53** [ 03853 ] [Correction]
Déterminer la limite quand $x \to 0^+$ de

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

**Exercice 54** [ 00899 ] [Correction]
Soient

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

(a) Déterminer les domaines de définition des fonctions $\zeta$ et $\zeta_2$.

(b) Justifier que les fonctions $\zeta$ et $\zeta_2$ sont continues.

(c) Établir la relation $\zeta_2(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

**Exercice 55** [ 04187 ] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs de limite $+\infty$. Lorsque cela a un sens, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n^x}$$

(a) Montrer que la fonction $f$ est définie sur un intervalle $I$ et que, s'il n'est pas vide, cet intervalle est non majoré.

(b) Montrer que la fonction $f$ est continue sur $I$.

(c) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geq 1}$ pour laquelle :
— l'intervalle $I$ est vide ;
— l'intervalle $I$ est ouvert non vide ;
— l'intervalle $I$ est fermé non vide.

## Intégration de la somme d'une série de fonctions

**Exercice 56** [ 00911 ] [Correction]
On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in\, ]0\,;1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

(a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

(b) Montrer que la série des $u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

(c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

**Exercice 57** [ 00920 ] [Correction]
On donne

$$\forall \alpha \in [0\,;1], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \pi \frac{\operatorname{ch} \pi\alpha}{\operatorname{sh} \pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

(prolongée par continuité en 0).

En intégrant sur $[0\,;1]$, en déduire la valeur de

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

## Limite et comportement asymptotique de la somme de série de fonctions

**Exercice 58** [ 02558 ] [Correction]
Ensemble de définition et continuité de

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en $0^+$.

**Exercice 59** [ 00139 ] [Correction]
Pour $t>0$, on pose

$$S(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nt+1}$$

Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t\to 0^+$.

**Exercice 60** [ 00910 ] [Correction]
Pour $n\geq 1$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x)=(-1)^n\ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$$

(a) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
(b) Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

**Exercice 61** [ 00918 ] [Correction]
Montrer que pour tout $\alpha>0$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n\alpha}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha-1}$$

On pourra exploiter le théorème d' interversion limite/somme infinie.

**Exercice 62** [ 00919 ] [Correction]
Par une interversion série-limite, montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^p\xrightarrow[p\to+\infty]{}\exp(z)$$

## Étude pratique de fonctions somme de série

**Exercice 63** [ 00901 ] [Correction]
Pour $x>0$, on pose

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}$$

(a) Montrer que $S$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Montrer que $S$ est continue.
(c) Étudier la monotonie de $S$.
(d) Déterminer la limite en $+\infty$ de $S$ puis un équivalent de $S$ en $+\infty$.
(e) Déterminer un équivalent à $S$ en 0.

**Exercice 64** [ 00902 ] [Correction]
Sur $I=\left]-1\,;+\infty\right[$, on pose

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$$

(a) Montrer que $S$ est définie et continue sur $I$.
(b) Étudier la monotonie de $S$.
(c) Calculer

$$S(x+1)-S(x)$$

(d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $-1^+$.
(e) Établir

$$\forall n\in\mathbb{N}, S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

(f) En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

**Exercice 65** [ 00906 ] [Correction]
Soit

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

(a) Quel est le domaine de définition de $f$ ?
Étudier la continuité de $f$ sur celui-ci.

(b) Montrer que $f$ est strictement décroissante.

(c) Étudier la limite de $f$ en $+\infty$.

(d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x\to 0^+$.

**Exercice 66** [ 00915 ] [Correction]
Pour $x\geq 0$, on pose

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

(a) Pour quelles valeurs de $x$ dans $\mathbb{R}_+$, $S(x)$ est définie ?

(b) Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x\neq 0$.

(c) Étudier la continuité de $S$ sur $[0\,;1[$ puis sur $]1\,;+\infty[$.

(d) Dresser le tableau de variation de $S$.

**Exercice 67** [ 02837 ] [Correction]
On pose

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$$

Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de $S$. Donner un équivalent de $S$ en 0 et en $1^-$.

**Exercice 68** [ 03203 ] [Correction]
Définition, continuité et dérivabilité de

$$S\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

**Exercice 69** [ 02529 ] [Correction]
Montrer que

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\arctan(nx)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

**Exercice 70** [ 03427 ] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x)=\arctan\sqrt{n+x}-\arctan\sqrt{n}$$

(a) Étudier l'existence et la continuité de la fonction $S$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$$

(b) Déterminer la limite de $S$ en $+\infty$.

**Exercice 71** [ 03797 ] [Correction]
On étudie

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$$

(a) Montrer que $f$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner, à l'aide d'une comparaison intégrale, un équivalent de $f$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f$ en 0. On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

**Exercice 72** [ 03194 ] [Correction]
Définition, continuité et classe $\mathcal{C}^1$ de

$$x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

**Exercice 73** [ 00904 ] [Correction]
Pour $t > 0$, on pose
$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}$$
(a) Justifier que $S$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
(b) Étudier la limite de $S$ en $+\infty$.
(c) Établir que $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

**Exercice 74** [ 03644 ] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}$$
(a) Montrer que la fonction $S$ est bien définie et étudier sa parité.
(b) Montrer que la fonction $S$ est continue.
(c) Déterminer la limite de $S$ en $+\infty$.

**Exercice 75** [ 00916 ] [Correction]
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$
(a) Justifier que la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
(b) Établir que pour tout $x \neq 0$,
$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
(c) Établir que $f$ est continue sur $]-1\,;1[$ puis que $f$ est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et $]1\,;+\infty[$.
(d) Établir la continuité de $f$ en 1.

**Exercice 76** [ 02835 ] [Correction]
Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)}$$
(a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
(b) Montrer
$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$
(c) Montrer que $\Gamma$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 77** [ 00905 ] [Correction]
On fixe $\alpha > 0$ et on pose
$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^\alpha x} \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$
(a) Domaine de définition de $f$ ?
(b) Continuité de $f$ ?
(c) Étudier $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**Exercice 78** [ 02836 ] [Correction]
Soit $\alpha$ un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x$, on pose
$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$$
On note $I$ le domaine de définition de
$$S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$
(a) Déterminer $I$.
(b) Montrer que $S$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ ?
(d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$
ne tend pas vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.
La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur $I$ ?

(e) Étudier la continuité de $S$ sur $I$.

**Exercice 79** [ 02971 ] [Correction]
Soit des suites réelles $(a_n)$ et $(x_n)$ avec $a_n > 0$ pour tout $n$.
On suppose que la série de terme général $a_n(1+|x_n|)$ converge.
On pose

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n|x-x_n|$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$.

**Exercice 80** [ 04173 ] [Correction]
On définit la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ :

$$\forall N\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n} = \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{N}\frac{2x}{x^2-n^2}$$

(a) Écrire avec **Python** une fonction `S(N,x)` renvoyant $S_N(x)$.

(b) Écrire une fonction prenant trois paramètres `N`, `a` et `b` et traçant le graphe de $S_N$ sur le segment $[a\,;b]$.

(c) Montrer que la suite $(S_N)$ converge simplement sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera $S$.

(d) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(e) Montrer que $S$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.

(f) Montrer :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ S\left(\frac{x}{2}\right)+S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$$

(g) Montrer que la fonction $f\colon x\mapsto \pi\cot(\pi x)-S(x)$ vérifie la même relation.

(h) Montrer que $f$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. En déduire $S$.

## Suites et séries de fonctions vectorielles

**Exercice 81** [ 01186 ] [Correction]
Soit $E$ une algèbre de dimension finie munie d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall a,b\in E, \|ab\|\le\|a\|\,\|b\|$$

(a) Soit $a\in E$ vérifiant $\|a\|<1$. Montrer que $1_E-a$ est inversible et exprimer son inverse comme la somme d'une série.

(b) Montrer que l'application $x\in U(E)\mapsto x^{-1}$ est continue en $1_E$.

(c) Montrer que l'application $x\in U(E)\mapsto x^{-1}$ est continue.

**Exercice 82** [ 00573 ] [Correction]
On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme notée $\|.\|$ vérifiant

$$\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$$

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t|<1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}t^kA^k$$

(a) Montrer que $f$ est bien définie.

(b) Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$(I-tA)f'(t) = A$$

**Exercice 83** [ 04174 ] [Correction]
Soit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\quad\text{avec}\quad s\in\mathbb{C}$$

(a) Montrer la définition de $\zeta(s)$ pour $\mathrm{Re}(s)>1$.

(b) Montrer qu'alors

$$\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

(c) En déduire un prolongement continu de $\zeta$ sur

$$\Omega = \left\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>0\right\}\setminus\{1\}$$

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
Supposons que la suite $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $I$ avec chaque $f_n$ convexe.
Pour tout $a, b \in I$ et $\lambda \in [0;1]$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f_n(a) + (1-\lambda) f_n(b)$$

À la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

ce qui fournit la convexité de $f$.

**Exercice 2 :** [énoncé]
Par uniforme continuité, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x-y| \leq \alpha \implies |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$$

Pour $n$ assez grand, on a

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$$

et donc

$$\forall x \in I, |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$$

Ainsi, il y a convergence uniforme de $(g \circ f_n)$ vers $g \circ f$.

**Exercice 3 :** [énoncé]
On peut écrire

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty$$

Or $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ et donc la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée car convergente. Par opération sur les limites, on obtient alors

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

car $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \to 0$.

**Exercice 4 :** [énoncé]
Posons

$$m_n = \inf_{t \in [a;b]} f_n(t)$$

Puisque la fonction $f_n$ est continue sur le segment $[a;b]$, cet infimum est une valeur prise par $f_n$ et donc il existe $t_n \in [a;b]$ tel que

$$m_n = f_n(t_n)$$

Montrons que $m_n \to m$ avec

$$m = \inf_{t \in [a;b]} f$$

La fonction $f$ est continue car limite uniforme d'une suite de fonctions continues et donc il existe $t_\infty \in [a;b]$ pour lequel

$$m = f(t_\infty)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour $n$ assez grand,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

et donc

$$m_n = f_n(t_n) \geq f(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$$

et

$$m = f(t_\infty) \geq f_n(t_\infty) - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon$$

Ainsi

$$|m_n - m| \leq \varepsilon$$

On peut alors affirmer $m_n \to m$.

**Exercice 5 :** [énoncé]
On a

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \|f_n - f\|_{\infty,[a;b]} \leq \varepsilon$$

et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_2, |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon$$

car $f(x_n) \to f(x)$ en vertu de la continuité de $f$.
Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a

$$\forall n \geq n_0, |f_n(x_n) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

**Exercice 6 :** [énoncé]
Pour $\varepsilon = 1$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, P_n - f \text{ est bornée et } \|P_n - f\|_\infty \leq 1$$

Pour tout $n \geq N$, on peut alors affirmer que le polynôme $P_n - P_N = (P_n - f) - (P_N - f)$ est borné et donc constant. Puisque la suite $(P_n)$ converge uniformément vers $f$, la suite $(P_n - P_N)_{n\geq N}$ converge uniformément vers $f - P_N$. Or cette suite étant formée de fonctions constantes, sa convergence équivaut à la convergence de la suite de ces constantes. En posant $C$ la limite de cette suite, on obtient

$$f = P_N + C$$

et donc $f$ est une fonction polynôme.

**Exercice 7 :** [énoncé]
Les fonctions $u_n$ sont continues sur $[0\,;1]$ pour $n \geq 1$ et dérivables sur $]0\,;1]$ avec

$$u_n'(x) = x^{n-1}(1 + n\ln x)$$

Le tableau de variation de $u_n$ donne

$$\sup_{[0;1]} |u_n| = -u_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \to 0$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0\,;1]$ vers la fonction nulle.

**Exercice 8 :** [énoncé]
Pour $x \in [0\,;+\infty[$, $f_n(x) \to 0$ car $|f_n(x)| \leq \frac{x}{n}$.
On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

| $x$ | $0$ | | $x_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $M_n$ | $\searrow$ | $0$ |

donc

$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1+\frac{1}{n-1})} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \to 0$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

**Exercice 9 :** [énoncé]

(a) Soit $x \in [0\,;+\infty[$.
Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x > 0$ alors $u_n(x) \to 0$ car $\mathrm{e}^{-nx} \to 0$.
La suite de fonctions $(u_n)$ converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On a

$$\sup_{x\in[a;+\infty[} |u_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-na} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

(c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geq u_n(\pi/2n) = \mathrm{e}^{-\pi/2} \not\to 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 10 :** [énoncé]
$f_n'(x) = nx(2-nx)\mathrm{e}^{-nx}$, le tableau de variation de $f_n$ donne

$$\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n| = f_n(2/n) = \frac{4}{n}\mathrm{e}^{-2} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et donc *a fortiori* sur $[a\,;+\infty[$.

**Exercice 11 :** [énoncé]
$f_n(0) \to 1$ et $f_n(x) \to 0$ pour $x \neq 0$. La fonction limite n'étant pas continue, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. En revanche si $|x| \geq |a|$ alors

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $]-\infty\,;-a] \cup [a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

**Exercice 12 :** [énoncé]

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nul ou non, on a $f_n(x) \to 0$. Il y a convergence simple vers la fonction $f$ nulle. On a

$$f_n(x) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{nx} = \frac{x}{n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

La fonction $f_n - f$ n'étant pas bornée sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

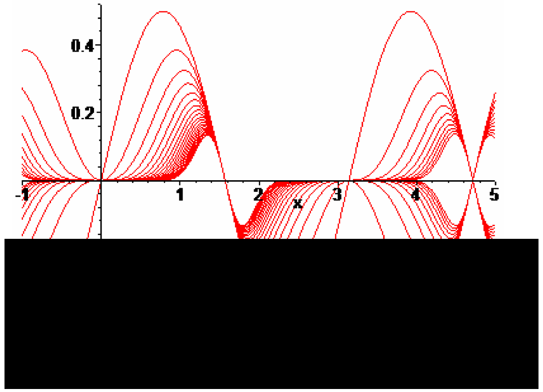


FIGURE 1 – Les premières fonctions de la suite $(f_n)$

(b) Sur $[-a\,;a]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n\,|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n} \to 0$$

via $|\sin t| \leq |t|$. Par suite il y a convergence uniforme sur $[-a\,;a]$.

**Exercice 13 :** [énoncé]
Pour $x \neq \frac{\pi}{2}\quad[\pi]$ on a $|\sin x| < 1$ et donc $f_n(x) \to 0$.
Pour $x = \frac{\pi}{2}\quad[\pi]$, $\cos x = 0$ et donc $f_n(x) = 0 \to 0$.
Ainsi $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.
Par $2\pi$ périodicité et parité on ne poursuit l'étude qu'avec $x \in [0\,;\pi]$. La fonction $f_n$ est dérivable avec

$$f_n'(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1)$$

On peut dresser le tableau de variation de $f_n$ sur $[0\,;\pi]$ et on obtient

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \left| f_n\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

La suite de fonction $(f_n)$ converge donc uniformément vers la fonction nulle.

**Exercice 14 :** [énoncé]
$f_n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et peut être prolongée par continuité en 0 en posant sur $f_n(0) = n$.
Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \to +\infty$.
Pour $x > 0$, $f_n(x) \to 0$.
Ainsi, $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il ne peut y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car alors, par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$$

donne $0 = +\infty$.
Pour $a > 0$, sur $[a\,;+\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1 - \mathrm{e}^{-a^2}}$$

et par étude fonctionnelle $nx^2\mathrm{e}^{-nx} \leq \frac{4}{n}\mathrm{e}^2$ (maximum en $x = 2/n$) donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{4\mathrm{e}^2}{n(1 - \mathrm{e}^{-a^2})} \to 0$$

qui donne la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$.

**Exercice 15 :** [énoncé]
Quand $p \to +\infty$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \to \frac{1}{1+x} = f(x)$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Or, pour $\alpha \in ]0\,;1]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

pour tout $x \geq 0$ et donc

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \frac{1}{p}\frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leq \frac{1}{p}\frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{p}$$

Puisque $\|f - f_p\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 16 :** [énoncé]
La suite $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left|f_n(\pm 1/\sqrt{n2^n})\right| = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \to +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Or $\pm 1/\sqrt{n2^n} \to 0$ et donc d'après le tableau de variation de $f_n$, pour tout $a > 0$, on a, pour $n$ assez grand,

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$$

Ainsi, il y a convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ et de même sur $]-\infty\,;-a]$.
En revanche, il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 0.

**Exercice 17 :** [énoncé]
On a

$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| = f_n\left(1/\sqrt[2^n]{2}\right) = 4^{n-1} \to +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0\,;1]$.
Or $1/\sqrt[2^n]{2} \to 1$ et donc d'après le tableau de variation de $f_n$, pour tout $a \in [0\,;1[$, on a, pour $n$ assez grand,

$$\sup_{x\in[0;a]} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$$

Ainsi il y a convergence uniforme sur $[0\,;a]$. En revanche il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 1.

**Exercice 18 :** [énoncé]

(a) Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x \in ]0\,;1]$ alors $f_n(x) \to 0$ par comparaison des suites de référence.

(b) $f_n'(x) = n^\alpha(1-x)^n - n^{\alpha+1}x(1-x)^{n-1} = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$.
Après étude des variations

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^\alpha\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} = \mathrm{e}^{-1+\mathrm{o}(1)} \to \mathrm{e}^{-1}$$

donc $\|f_n\|_\infty \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\mathrm{e}}$.
Il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

**Exercice 19 :** [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour $n$ assez grand

$$f_n(x) = (1-x/n)^n = \exp\left(n\ln(1-x/n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$$

La suite $(f_n)$ converge simplement vers $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ avec $f_n \leq f$.
Étudions $\delta_n = f - f_n \geq 0$.
Pour $x \in [n\,;+\infty[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-n}$.
Pour $x \in [0\,;n[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1-x/n)^n$ et $\delta_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (1-x/n)^{n-1}$.
Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1)\ln(1-x/n) + x$$

On a

$$\varphi_n'(x) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{x/n-1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1-x$.
Par étude des variations de $\varphi_n$, on obtient l'existence de $x_n \in [0\,;n[$ tel que $\varphi_n(x) \geq 0$ pour $x \leq x_n$ et $\varphi_n(x) \leq 0$ pour $x \geq x_n$. On en déduit que pour $x \leq x_n$, $\delta_n'(x) \geq 0$ et pour $x \geq x_n$, $\delta_n'(x) \leq 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} = \delta_n(x_n) = \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n}\mathrm{e}^{-x_n}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est bornée par un certain $M$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} \leq \frac{M}{n}$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;+\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, \mathrm{e}^{-n}\right) \to 0$$

On peut donc affirmer que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $f$.

**Exercice 20 :** [énoncé]

(a) $f_n(x) = \exp(-n\ln(1+\frac{x}{n})) = \exp(-x+\mathrm{o}(1)) \to \mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
On sait $\ln(1+t) \leq t$ donc par opérations : $f_n(x) \geq \mathrm{e}^{-x}$

(b) On sait

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

donc

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln(1+\frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$$

puis

$$e^{-x} \le f_n(x) \le e^{-x+\frac{x^2}{2n}} = e^{-x}e^{\frac{x^2}{2n}}$$

Sur $[0\,;a]$ on a $e^{\frac{x^2}{2n}} \le e^{\frac{a^2}{2n}} \to 1$.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$, $\left|e^{a^2/2n} - 1\right| \le \varepsilon$.
On a alors pour tout $x \in [0\,;a]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \le e^{-x}\left(e^{x^2/2n} - 1\right) \le e^{a^2/2n} - 1 \le \varepsilon$$

Par suite $f_n \xrightarrow[{[0;a]}]{CU} f$.

(c) Les fonctions $f_n$ sont décroissantes donc

$$\forall x \ge a, f_n(x) \le f_n(a)$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $e^{-a} \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \ge a$,

$$e^{-x} \le \varepsilon/3$$

Puisque $f_n(a) \to e^{-a}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \ge N, \left|f_n(a) - e^{-a}\right| \le \varepsilon/3$$

Mais alors $\forall x \ge a$,

$$\left|f_n(x) - e^{-x}\right| \le f_n(x) + e^{-x} \le f_n(a) + e^{-x} \le \left(f_n(a) - e^{-a}\right) + e^{-a} + e^{-x} \le \varepsilon$$

De plus, $f_n \xrightarrow[{[0;a]}]{CU} f$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \ge N', \forall x \in [0\,;a]\,\left|f_n(x) - e^{-x}\right| \le \varepsilon$$

Finalement

$$\forall n \ge \max(N, N'), \forall x \in \mathbb{R}_+, \left|f_n(x) - e^{-x}\right| \le \varepsilon$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CU} f$.

**Exercice 21 :** [énoncé]

(a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$ pour $n$ assez grand. Par suite $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.

(b) On a

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^{1/n} n^2t(1-nt)\,dt = \int_0^1 u(1-u)\,du = \frac{1}{6}$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite $(f_n)$ puisque

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \not\to \int_0^1 0\,dt$$

(c) Pour $n$ assez grand, $\sup_{[a;1]} |f_n(x)| = 0$ donc $(f_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[a\,;1]$.

**Exercice 22 :** [énoncé]

(a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \to 0$. Pour $x \in \,]0\,;\pi/2]$, $\cos x \in [0\,;1[$ donc $f_n(x) \to 0$.

(b) Directement

$$I_n = \left[-\frac{n}{n+1}\cos^{n+1} x\right]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}$$

donc $I_n \to 1 \ne \int_0^{\pi/2} 0.\,dx$ et il n'y a pas convergence uniforme.

(c) On a

| $x$ | $0$ | | $x_n$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n(x_n)$ | $\searrow$ | $0$ |

avec $x_n = \arccos\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 0$ et

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{(1+1/n)^{(n+1)/2}} \sim \sqrt{\frac{n}{e}} \to +\infty$$

Soit $[a\,;b] \subset \,]0\,;\pi/2]$. On a $a > 0$ donc à partir d'un certain rang $x_n < a$ et alors $\sup_{[a;b]} |f_n| = f_n(a) \to 0$ donc il y a convergence uniforme sur $[a\,;b]$.

**Exercice 23 :** [énoncé]

(a) En distinguant le cas $x = 0$ du cas général, on obtient que la suite de fonction $(f_n)$ converge simplement vers la fonction $f$ donnée par $f(x) = x$.

(b) Par étude des variations de $f_n(x) - f(x)$, on obtient qu'il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

(c) Par un argument de convergence uniforme, on peut échanger limite et intégrale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

**Exercice 24 :** [énoncé]

Pour $x\geq 0$, la suite numérique $(f_n(x))$ est une suite homographique.
L'équation $r=\frac{x}{2+r}$ possède deux solutions $r_1=\sqrt{1+x}-1$ et $r_2=-\sqrt{1+x}-1$.
Posons

$$g_n(x)=\frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}$$

On a

$$g_{n+1}(x)=\frac{\frac{x}{2+f_n(x)}-\frac{x}{2+r_1}}{\frac{x}{2+f_n(x)}-\frac{x}{2+r_2}}=\frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}\frac{2+r_2}{2+r_1}=\rho g_n(x)$$

avec

$$\rho=\frac{2+r_2}{2+r_1}=\frac{r_1}{r_2}$$

Puisque $|\rho|<1$, la suite géométrique $(g_n(x))$ converge vers 0.
Or après résolution de l'équation

$$g_n(x)=\frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}$$

on obtient

$$f_n(x)=\frac{r_1-g_n(x)r_2}{1-g_n(x)}$$

et on en déduit que la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $r_1=\sqrt{1+x}-1$.
Finalement, la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers la fonction $f_\infty\colon x\mapsto\sqrt{1+x}-1$.
Puisque les fonctions $f_n$ sont rationnelles de degrés alternativement 0 et 1, la fonction $|f_n-f_\infty|$ ne peut-être bornée sur $\mathbb{R}_+$ car de limite $+\infty$ en $+\infty$ ; il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
En revanche, on peut montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers $f_\infty$ sur $[0\,;a]$ pour tout $a\geq 0$.
En effet

$$f_n(x)-f_\infty(x)=\frac{g_n(x)}{1-g_n(x)}2\sqrt{1+x}$$

D'une part, la fonction $x\mapsto 2\sqrt{1+x}$ est bornée sur $[0\,;a]$.
D'autre part,

$$g_n(x)=\left[\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right]^n g_0(x)$$

Sur $[0\,;a]$, la fonction

$$x\mapsto\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|$$

admet un maximum de valeur $<1$ et puisque la fonction continue $g_0$ est bornée sur $[0\,;a]$, on peut montrer que la suite de fonctions $(g_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0\,;a]$.
La relation

$$f_n(x)-f_\infty(x)=\frac{g_n(x)}{1-g_n(x)}2\sqrt{1+x}$$

permet alors d'établir que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers $f_\infty$ sur $[0\,;a]$.

**Exercice 25 :** [énoncé]

(a) On vérifie sans peine que la suite $(f_n)$ est bien définie.

$$f_1(x)=x,\,f_2(x)=\frac{2}{3}x^{3/2},\ldots$$

Si $f(x)=\alpha x^\beta$ alors

$$\Phi(f)(x)=\sqrt{\alpha}\int_0^x t^{\beta/2}\,\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2}x^{\beta/2+1}$$

Ainsi $f_n(x)=\alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1}=\frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n+2}\text{ et }\beta_{n+1}=\frac{\beta_n}{2}+1$$

On a

$$\beta_n=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\to 2$$

et, pour $n\geq 1$,

$$\alpha_{n+1}=\frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

On a

$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}=\frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4-\frac{1}{2^n}}-\frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Or $2^n\geq 2^{n-1}$ donne

$$\frac{2}{4-\frac{1}{2^n}}\leq\frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc
$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}\leq\frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\sqrt{\alpha_{n+1}}-\sqrt{\alpha_n}\right)$$
Puisque $\alpha_1=\alpha_0$, on obtient alors par récurrence que la suite $(\alpha_n)$ est décroissante.
Étant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient
$$\alpha_n\to 1/4$$
On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers la fonction
$$f\colon x\mapsto\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
De plus
$$f_n(x)-f(x)=\alpha_n\left(x^{\beta_n}-x^2\right)+\left(\alpha_n-\frac{1}{4}\right)x^2$$
Puisque $\beta_n\leq 2$, on a pour tout $x\in[0\,;1]$ et en exploitant $\mathrm{e}^u\leq 1+u$
$$0\leq x^{\beta_n}-x^2=\int_{\beta_n}^2\left|\ln(x)\right|x^t\,\mathrm{d}t$$
$$\leq(2-\beta_n)\left|\ln(x)\right|.x^{\beta_n}\leq(2-\beta_n)\left|\ln(x)\right|x$$
Puisque la fonction $x\mapsto x\left|\ln x\right|$ est bornée par $1/\mathrm{e}$ sur $[0\,;1]$,
$$0\leq x^{\beta_n}-x^2\leq 2-\beta_n$$
et ainsi
$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\alpha_n(2-\beta_n)+\left(\alpha_n-\frac{1}{4}\right)$$
et ce majorant uniforme tend vers 0.
Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)$ vers $f$.

(b) La relation
$$f_{n+1}(x)=\int_0^x\sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$
donne à la limite
$$f(x)=\int_0^x\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$
d'où l'on tire $f$ dérivable et $f'(x)=\sqrt{f(x)}$.
Pour l'équation différentielle $y'=\sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y\colon x\mapsto(x/2)^2$ est justement solution.

**Exercice 26 :** [énoncé]
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)\to x$ et
$$\left|f_n(x)-x\right|=1/n\to 0$$
La suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction identité.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)^2\to x^2$ et
$$f_n(n)^2-n^2=2+1/n^2\to 2$$
Il n'y a pas convergence uniforme de la suite $(f_n^2)$.

**Exercice 27 :** [énoncé]
Par opérations, les fonctions $f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sqrt{.}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
La suite $(f_n)$ converge simplement vers $f$ avec $f(x)=|x|$ qui n'est pas dérivable en 0.
En multipliant par la quantité conjuguée :
$$f_n(x)-f(x)=\frac{1/n}{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}}$$
Par suite $\left|f_n(x)-f(x)\right|\leq\frac{1/n}{\sqrt{1/n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ puis $\left\|f_n-f\right\|_\infty\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$.
Ainsi la suite $(f_n)$ converge uniformément vers une fonction $f$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 28 :** [énoncé]
Par la formule de Taylor Lagrange :
$$\left|f(x+\frac{1}{n})-f(x)-\frac{1}{n}f'(x)\right|\leq\frac{M}{n^2}$$
avec $M=\sup\left|f''\right|$.
Par suite
$$\left|g_n(x)-f'(x)\right|\leq\frac{M}{n}$$
et donc
$$\left\|g_n(x)-f'(x)\right\|_{\infty,\mathbb{R}}\to 0$$

**Exercice 29 :** [énoncé]
On a
$$\forall x \in [0\,;1], f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0)$$
donc
$$\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n(0), -f_n(1)) \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|) \leq |f_n(0)| + |f_n(1)| \to 0$$

**Exercice 30 :** [énoncé]
Si $|\omega| > 1$ alors
$$\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\omega^n}$$
et la convergence normale sur $U$ de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers
$$z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$$
Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer que pour $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-ik\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\omega^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-i(n+(k+1))\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$$
Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $U$ vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ alors
$$\int_0^{2\pi}\overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\mathrm{e}^{i\theta}-\omega|^2} \neq 0$$
Or par le calcul précédent, on peut affirmer
$$\int_0^{2\pi}\overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = 0$$
On conclut à une absurdité.
La condition cherchée est $|\omega| > 1$.

**Exercice 31 :** [énoncé]
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$$u_n(t) = \frac{f(t+1/n) - f(t)}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(t)$$
La suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $f'$ sur $\mathbb{R}$.
Soient $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction $f'$ est continue sur le compact $[a\,;b+1]$ dont uniformément continue. Il existe alors $\alpha > 0$ vérifiant
$$\forall (s,t) \in [a\,;b+1]^2, |s-t| \leq \alpha \implies |f'(s) - f'(t)| \leq \varepsilon$$
Pour $n$ assez grand de sorte que $1/n \leq \alpha$ et $t \in [a\,;b]$. On peut écrire
$$n\left(f(t+1/n) - f(t)\right) - f'(t) = n\int_t^{t+1/n} f'(s) - f'(t)\,\mathrm{d}s$$
et donc
$$|u_n(t) - f'(t)| \leq n\int_t^{t+1/n}|f'(s) - f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$$
Ainsi, la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$ est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

**Exercice 32 :** [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ : $u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}t = 1 + x$ donc $0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$
or $u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2) \geq 0$ donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geq 0$ et
$$u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2) \leq \frac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$
puis
$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$
Récurrence établie.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle
$$\sum\frac{x^n}{n!}$$
Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique
$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$
et donc convergence de la suite $(u_n(x))$.

(c) Pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x))\right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $(u_n)$ converge uniformément vers $u$. On en déduit que $u$ est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in [0\,;1], \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x u(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0\,;1], u(x) = 1 + \int_0^x u(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car $u(0) = 1$) et dérivable avec

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

**Exercice 33 :** [énoncé]

(a) Les fonctions $f_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ vers $S$.
Soi $a > 0$. Sur $[a\,;+\infty[$,

$$\|f_n'\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{1}{(n+a)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $[a\,;+\infty[$.
Par théorème, $S$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leq 0$ et la fonction $S$ est décroissante.

(c)

$$S(x+1)+S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}$$

(d) Quand $x \to 0$, $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$ et $S(x+1) \to S(1)$ donc

$$S(x) \sim \frac{1}{x}$$

(e) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{2}(S(x) + S(x+1)) \leq S(x) \leq \frac{1}{2}(S(x) + S(x-1))$$

avec $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$ donne

$$S(x) \sim \frac{1}{2x}$$

**Exercice 34 :** [énoncé]

Posons $u_n\colon ]0\,;+\infty[ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

(a) Par le critère spécial, $\sum u_n(x)$ converge pour chaque $x > 0$.
Il y a convergence simple de la série de fonctions définissant $F$.

(b) Les fonctions $u_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour $n \geq 1$

$$u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

On a

$$\|u_n'\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$

Il y a convergence normale $\sum u_n'$ pour $n \geq 1$.
Il y a donc convergence uniforme de $\sum u_n'$ (pour $n \geq 0$) et l'on peut donc conclure que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
De la même manière, on obtient $F$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Par décalage d'indice

$$F(x+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1+x}=-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$$

et donc

$$F(x)+F(x+1)=\frac{1}{x}$$

(d) Posons

$$G(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale est bien définie pour $x>0$ et l'on remarque

$$G(x)+G(x+1)=\frac{1}{x}$$

Posons $H=F-G$. La fonction $H$ est 2-périodique, montrons qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.
Par application du critère spécial, on a

$$\forall x>0, F(x)\geq 0$$

donc

$$0\leq F(x)\leq F(x)+F(x+1)=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

et par encadrement $F$ tend vers 0 en $+\infty$.
Le même raisonnement se transpose à $G$.
On peut conclure que $H$ tend vers 0 en $+\infty$ puis finalement $H$ est nulle.

(e) Quand $x\to 0$, $F(x+1)\to F(1)$ par continuité et donc

$$F(x)=\frac{1}{x}-F(x+1)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}$$

On vérifie aisément que $F$ est décroissante et puisque

$$\frac{1}{x}=F(x)+F(x+1)\leq 2F(x)\leq F(x)+F(x-1)=\frac{1}{x-1}$$

on obtient

$$F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}$$

**Exercice 35 :** [énoncé]

(a) $f_n\colon x\mapsto\prod_{k=0}^n\frac{1}{(x+k)}$, $f_n$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Soit $a>0$. Sur $[a\,;+\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty\leq\frac{1}{a}\frac{1}{n!}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$. Par théorème, la somme $S$ de la série $\sum f_n$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b)

$$S(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+1+k)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}S(x+1)$$

(c) Par converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$$

Quand $x\to+\infty$,

$$S(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}S(x+1)=\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$$

Quand $x\to 0$,

$$S(x+1)\to S(1)$$

par continuité et

$$S(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\mathrm{e}-1$$

donc

$$S(x)=\frac{1+S(x+1)}{x}\sim\frac{\mathrm{e}}{x}$$

**Exercice 36 :** [énoncé]

(a) Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire $f_n(x)=x(\mathrm{th})'(c)$ avec $c\in\,]n\,;x+n[$.Puisque $(\mathrm{th})'(c)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(c)}$, on a

$$|f_n(x)|\leq\frac{x}{\mathrm{ch}^2(n)}\sim\frac{4x}{\mathrm{e}^{2n}}$$

Par suite $n^2f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement.

(b) Pour $a \in \mathbb{R}_+$, l'étude qui précède donne

$$\|f_n\|_{\infty,[0;a]} \leq \frac{a}{\operatorname{ch}^2(n)}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0\,;a]$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonction continue, on peut affirmer que $S$ est continue. De plus, les fonctions sommées étant toutes strictement croissantes, la somme $S$ l'est aussi.
En effet, pour $x < y$,

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) < \sum_{k=1}^{n} f_k(y)$$

donne à la limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)$$

et puisque $f_0(x) < f_0(y)$, on parvient à

$$S(x) < S(y)$$

(c)

$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n+1)) + \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(n+1) - \operatorname{th} n)$$

avec convergence des deux séries introduites.
Par décalage d'indice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(x+1+n) - \operatorname{th}(n+1)) = S(x) - \operatorname{th} x$$

et par étude la limite des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{th}(n+1) - \operatorname{th} n) = 1$$

On conclut à la relation proposée.

(d) $S$ admet une limite en $+\infty$ car c'est une fonction monotone. Pour déterminer celle-ci, étudions la limite de la suite $(S(n))$. La nature de la suite $S(n)$ est celle de la série de terme général

$$S(n+1) - S(n) = 1 - \operatorname{th} n$$

Or

$$1 - \operatorname{th} n = \frac{\operatorname{ch} n - \operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\operatorname{ch} n} \sim \frac{1}{2\mathrm{e}^{-2n}}$$

est terme général d'une série absolument convergente.
On en déduit que la suite $(S(n))$ converge et donc que la fonction $S$ converge.

**Exercice 37 :** [énoncé]
Puisque la fonction $f$ est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$. Puisque la fonction $f$ est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction $f$ est positive.
Par télescopage, on observe

$$g(x+N) - g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x+k)$$

et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à $g$ en $+\infty$, on est tenté de poser

$$g(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} f(x+k)$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a pour $k \geq 1$

$$0 \leq f(x+k) \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x+k)| \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégrabilité de $f$, il y a convergence de la série

$$\sum \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k\geq 1} f(x+k)$$

L'adjonction du terme d'indice $k = 0$ ne change rien et l'on peut conclure.
On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.

**Exercice 38 :** [énoncé]

(a) $f_n\colon x\mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f_n'(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$$

$\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ vers $S$.

$$\forall a>0, \|f_n'\|_{\infty,[a;+\infty[}=\frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ converge}$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$. Par théorème $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$$

Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x)\leq 0$ et $S$ est décroissante.

(c)

$$xS(x)-S(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{n!(x+n)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

(d)

$$xS(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}+S(x+1) \text{ et } S(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Quand $x\to 0^+$, $xS(x)\to 1$ d'où

$$S(x)\sim\frac{1}{x}$$

(e) Par le critère spécial des séries alternées,

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(x+k)}\right|\leq\frac{1}{(n+1)!(x+1+n)}\leq\frac{1}{(n+1)!}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty\leq\frac{1}{(n+1)!}\to 0$$

Par converge uniformément sur $]0\,;+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$$

Quand $x\to+\infty$,

$$xS(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}+S(x+1)\to\frac{1}{\mathrm{e}}$$

d'où

$$S(x)\sim\frac{1}{\mathrm{e}x}$$

**Exercice 39 :** [énoncé]

On a

$$\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où l'existence de la somme.

$$f(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{x+k}$$

Or

$$\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{x+1+k}=\sum_{k=-N+1}^{N+1}\frac{1}{x+k}$$

donc à la limite quand $N\to+\infty$, on obtient $f(x+1)=f(x)$.

$$\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{\frac{x}{2}+k}+\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{\frac{x+1}{2}+k}=2\sum_{k=-2N+1}^{2N+1}\frac{1}{x+k}$$

donne à la limite

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x)$$

**Exercice 40 :** [énoncé]

Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.

Soit $f$ une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0)=0$.

On a
$$f(x)=\frac{f(x)}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$$
donc
$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^{n+1})}{2^n}$$
Posons $h(x)=\sup_{[0;x]}|f|$.
Pour $x>0$, on a $x^{n+1}\in[0\,;x^2]$ pour tout $n\geq 1$. On en déduit
$$|f(x)|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}h(x^2)=h(x^2)$$
Ainsi $h(x)\leq h(x^2)$ puis en itérant $0\leq h(x)\leq h(x^{2^n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Or pour $x\in[0\,;1[$, $x^{2^n}\to 0$ et $\lim_{0^+}h=0$ (car $f(0)=0$) donc $h(x)=0$ sur $[0\,;1[$.
Finalement $f$ est nulle sur $[0\,;1[$ puis en 1 par continuité.

**Exercice 41 :** [énoncé]

(a) Si $f$ est constante égale à $C$ alors l'équation $(E)$ est vérifiée si, et seulement si, $C=2C-2C^2$. Cette dernière équation est vérifiée pour $C=0$ et $C=1/2$ seulement.

(b) Après substitution et étude séparée du cas $x=0$, on obtient $f$ solution de $(E)$ si, et seulement si, $h$ vérifie
$$h(2x)=h(x)-xh(x)^2$$

(c) L'application $T_x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $T_x'(y)=1-xy$. Sur $[0\,;1]$, on vérifie $|T_x'(y)|\leq 1$ et la fonction $T_x$ est donc 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$. Au surplus, la fonction $T_x$ est croissante sur $[0\,;1]$ avec $T_x(0)=0$ et $T_x(1)=1-x/2$. On en déduit $T_x([0\,;1])\subset[0\,;1]$.
Par une récurrence immédiate, on vérifie
$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0\,;1],h_n(x)\in[0\,;1]$$
Pour $n\geq 1$ et $x\in[0\,;1]$, on a par lipschitzianité
$$|h_{n+1}(x)-h_n(x)|\leq\left|h_n\left(\frac{x}{2}\right)-h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$
En répétant cette majoration
$$|h_{n+1}(x)-h_n(x)|\leq\left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right)-h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|=\frac{x}{2^{n+1}}\leq\frac{1}{2^{n+1}}$$
La série télescopique $\sum h_{n+1}(x)-h_n(x)$ converge donc absolument et la suite $(h_n(x))$ est donc convergente. La suite de fonctions $(h_n)$ converge donc simplement vers une fonction $h$. Au surplus
$$|h(x)-h_n(x)|=\left|\sum_{k=n}^{+\infty}h_{k+1}(x)-h_k(x)\right|\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
La convergence de la suite $(h_n)$ est donc uniforme sur $[0\,;1]$.

(d) La fonction $h$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur $[0\,;1]$. En passant à la limite la relation
$$\forall x\in[0\,;1],h_{n+1}(x)=h_n\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
on obtient l'identité
$$\forall x\in[0\,;1],h(x)=h\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}h\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
Puisque $h_n(0)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $h(0)=1$ et la fonction $h$ n'est pas nulle. On peut alors définir la fonction $f\colon x\mapsto xh(x)$ qui est continue, non constante et vérifie
$$\forall x\in[0\,;1],f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)-2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

(e) On peut ensuite définir une solution sur $[0\,;2]$ en posant
$$\forall x\in\,]1\,;2],f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)-2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
Cette solution est bien continue en 1 car
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=2f\left(\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{1}{2}\right)^2=f(1)$$
De même, on prolonge la solution sur $[0\,;4]$, $[0\,;8]$, etc.

**Exercice 42 :** [énoncé]

(a) Pour $x>0$, $u_n(x)=\mathrm{O}(1/n^2)$. La série $\sum u_n(x)$ converge absolument.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $u_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec
$$u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$
Soit $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Par monotonie, pour tout $x \in [a\,;b]$
$$\left|u_n'(x)\right| \leq |u_n'(a)| + |u_n'(b)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Il y a donc convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. La fonction somme de $\sum u_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction $f$ l'est aussi par opérations.

(b) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est immédiat que $f(1)$ est nul et, pour tout $x > 0$, on a après télescopage
$$f'(x+1) - f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{x}$$
et
$$\begin{aligned}f(2) - f(1) = f(2) &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\bigl(2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)\bigr) = 0\end{aligned}$$
Ainsi, on peut affirmer $f(x+1) - f(x) = \ln x$. Enfin, $f$ est convexe en tant que somme de fonctions qui le sont.
Inversement, soit $g$ une autre fonction vérifiant les conditions proposées.
Étudions la fonction $h = f - g$.
La fonction $h$ est de classe $\mathcal{C}^1$, 1-périodique et prend la valeur 0 en 1. Nous allons montrer qu'elle est constante en observant que sa dérivée est nulle.
Pour $x > 0$, on a par croissance des dérivées de $f$ et de $g$
$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \leq f'\bigl(\lfloor x\rfloor + 1\bigr) - g'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr) = \frac{1}{\lfloor x\rfloor} + h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)$$
et parallèlement
$$h'(x) \geq h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr) - \frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$
La fonction $h'$ est 1-périodique, les valeurs $h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)$ sont donc constantes égales à $C$.
En passant à la limite quand $x \to +\infty$ l'encadrement
$$C - \frac{1}{\lfloor x\rfloor} \leq h'(x) \leq C + \frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$
on obtient que la fonction $h'$ présente une limite en $+\infty$. Puisque $h'$ est périodique cette fonction est constante et, puisque la fonction $h$ est périodique, la fonction $h'$ est constante égale à 0.

(c) On reconnaît en premier membre la fonction $\Gamma$ « connue » indéfiniment dérivable avec
$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
On sait aussi $\Gamma > 0$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Considérons alors $f(x) = \ln\bigl(\Gamma(x)\bigr)$.
La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(x+1) - f(x) = \ln x$, $f(1) = 0$ et $f$ convexe car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne
$$\bigl(\Gamma'(x)\bigr)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$
ce qui conduit à $f'' \geq 0$.
On peut donc affirmer
$$\Gamma(x) = \mathrm{e}^{f(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$
et on peut conclure sachant $n+1$ équivalent à $n$.

**Exercice 43 :** [énoncé]
On a
$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq 1/n^2$$
Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 44 :** [énoncé]
On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et
$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$
donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \to 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 45 :** [énoncé]
Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, introduisons $k = \lfloor x \rfloor$. Pour $N \geq k+1$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \frac{1}{k+1}$$

et donc la série de fonctions converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers $S$ avec

$$S(x) = \frac{1}{k+1} \text{ pour } x \in [k\,;k+1[$$

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a

$$S(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < N+1 \\ S(x) & \text{si } x \geq N+1 \end{cases}$$

et donc

$$\left| S(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Il y a donc convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.
Enfin $\|u_n\|_\infty = 1/(n+1)$ n'est pas sommable, il n'y a pas convergence normale.

**Exercice 46 :** [énoncé]

(a) Par croissance comparée, la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.
La fonction $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} (n-x) \,\mathrm{e}^{-x}$$

On peut alors dresser le tableau de variations de $f_n$ et affirmer

$$\sup_{x \in [a;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!} \mathrm{e}^{-n}$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{\mathrm{e}} \right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à 1.
Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a\,;+\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.
En revanche sur $[0\,;a]$, il y a convergence normale car pour $n$ assez grand de sorte que $n \geq a$, on a

$$\sup_{x \in [0;a]} |f_n(x)| = f_n(a)$$

Il y a aussi *a fortiori* convergence uniforme sur $[0\,;a]$.
Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$, on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.
Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

**Exercice 47 :** [énoncé]

(a) Pour $x = 1$, $u_n(x) = 0$ et la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.
Pour $x \in [0\,;1[$, on peut écrire $0 \leq u_n(x) \leq a_0 x^n (1-x) = \lambda x^n$. Or il y a convergence de la série numérique $\sum x^n$ et donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge.

(b) Après étude de fonction, on obtient

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |u_n(x)| = \frac{a_n}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \sim \frac{a_n}{\mathrm{e}n}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la convergence normale de $\sum u_n$ équivaut à la convergence de $\sum a_n/n$.

(c) Considérons le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x)$$

Par la décroissance de la suite $(a_n)$

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x)$$

Ainsi, pour $x \in [0\,;1[$ ou $x = 1$, on obtient

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1}$$

Par cette majoration uniforme, on peut affirmer que, si $(a_n)$ tend vers 0, alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément.
Inversement, supposons la série $\sum u_n$ uniformément convergente.
La suite $(a_n)$ étant décroissante et positive, elle admet nécessairement une limite $\ell \geq 0$. On a alors

$$\forall x \in [0\,;1[, R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k(1-x) = \ell x^{n+1} \geq 0$$

On obtient donc

$$\forall x \in [0\,;1[, \ell x^{n+1} \leq \|R_n\|_\infty$$

En faisant $x \to 1^-$,

$$\ell \leq \|R_n\|_\infty$$

et ceci valant pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut $\ell = 0$

**Exercice 48 :** [énoncé]
Remarquons que pour tout $t \in [0\,;1]$,

$$t - t^2 \in [0\,;1/4]$$

Pour $x \in [0\,;1/4]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leq x \|u_n\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4} \|u_n\|_{\infty,[0;1/4]}$$

Par une récurrence facile, on obtient

$$\|u_n\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

Par la remarque initiale, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leq \|u_n\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\|u_{n+1}\|_{\infty,[0;1]} \leq \frac{1}{4^n}$$

On peut conclure que la série $\sum u_n$ est normalement convergente.

**Exercice 49 :** [énoncé]
La fonction $u_n$ est dérivable avec

$$u_n'(x) = \frac{1 - n^2 x}{(1 + n^2 x)^3}$$

Les variations de $u_n$ sur $[0\,;+\infty[$ fournissent

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(1/n^2\right) = \frac{1}{4n^2}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0\,;+\infty[$, *a fortiori* uniformément et simplement.
Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$,

$$|u_n'(x)| \leq \frac{1 + n^2 x}{(1 + n^2 x)^3} = \frac{1}{(1 + n^2 a)^2} \sim \frac{1}{a^2} \frac{1}{n^4}$$

La série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$.
En revanche, il n'y a pas convergence en 0, ni convergence uniforme sur $]0\,;a]$ car le théorème de la double limite ne peut s'appliquer en 0.

**Exercice 50 :** [énoncé]

(a) Posons $u_n(x) = 1/n^x$ définie sur $]1\,;+\infty[$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1\,;+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$.
Plus précisément, pour $a > 1$, on a

$$\sup_{x \in [a;+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \text{ avec } \sum u_n(a) \text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions $u_n$ sur $[a\,;+\infty[$.
Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que $\zeta$ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

(b) Posons $v_n(x) = \zeta(n)x^n/n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$ (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1).
Pour $x = 1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}$$

Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $((-1)^n\zeta(n)/n)$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car $\zeta(n+1) \leq \zeta(n)$.

(c) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction $F$ est assurément de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1\,;1[$.
Les fonctions $v_n$ sont continues sur $[-1\,;0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in [-1\,;0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)\right| \leq |v_{n+1}(x)| \leq \frac{\zeta(n)}{n}$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1\,;0]$ et sa somme $F$ est donc continue.

(d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x \in ]-1\,;1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p\geq 1}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right| \text{ et } \sum_{n\geq 1}\sum_{p=1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{p}\right)$$

La série de fonction associée converge normalement sur tout segment de $]-1\,;1[$ et on peut donc intégrer terme à terme

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-t} - \frac{1}{p}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{p=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{1}{p-t} - \frac{1}{p}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{p}{p-x}\right) - \frac{x}{p}$$

**Exercice 51 :** [énoncé]
Chaque $f_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^x}$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $\eta$ sur $]0\,;+\infty[$.
La suite $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Étudions

$$\varphi\colon t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}$$

Pour $\ln t \geq 1/x$, $\varphi'(t) \leq 0$ donc $\varphi$ décroissante sur $[\mathrm{e}^{1/x}\,;+\infty[$. Ainsi $(f_n'(x))_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $\lfloor \mathrm{e}^{1/x}\rfloor + 1$ et tend vers 0. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geq \lfloor \mathrm{e}^{1/a}\rfloor + 1$ on a pour tout $x \in [a\,;+\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \to 0$$

$\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$.
On peut alors conclure que la fonction $\eta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

**Exercice 52 :** [énoncé]
Par le critère spécial des séries alternées, $\zeta_2$ est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
$f_n\colon x\mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x)=(-1)^{n+p}\frac{(\ln n)^p}{n^x}$$

La suite $(f_n^{(p)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Étudions

$$\varphi\colon t\mapsto \frac{(\ln t)^p}{t^x}$$

On a

$$\varphi'(t)=\frac{\ln(t)^{p-1}(p-x\ln t)}{t^{x+1}}$$

Pour $\ln t\geq p/x$, $\varphi'(t)\leq 0$ donc $\varphi$ décroissante sur $[\mathrm{e}^{p/x}\,;+\infty[$. Ainsi $(f_n^{(p)}(x))_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $E(\mathrm{e}^{p/x})+1$ et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a>0$ et pour $n\geq E(\mathrm{e}^{p/a})+1$ on a pour tout $x\in[a\,;+\infty[$,

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+p}(\ln n)^p}{n^x}\right|\leq\frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^x}\leq\frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a;+\infty[}\leq\frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a}\to 0$$

$\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$ (pour tout $a>0$) donc converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$.
Par théorème on peut alors conclure que $\zeta_2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

**Exercice 53 :** [énoncé]
La convergence pour $x>0$ de la série définissant $\zeta_2(x)$ est acquise par le critère spécial des séries alternées.
On peut combiner les termes d'indices impairs avec les termes d'indices pairs qui suivent

$$\zeta_2(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2p-1)^x}-\frac{1}{(2p)^x}\right)$$

Considérons alors la fonction $f\colon[1\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(t)=\frac{1}{(2t-1)^x}-\frac{1}{(2t)^x}$$

La fonction $f$ est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leq f(n)\leq\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

puis en sommant ces encadrements

$$\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\leq\zeta_2(x)\leq f(1)+\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2(1-x)}\left[(2t-1)^{1-x}-(2t)^{1-x}\right]_1^{+\infty}$$

avec

$$(2t-1)^{1-x}-(2t)^{1-x}=-(2t)^{1-x}\left(1-\left(1-\frac{1}{2t}\right)^{1-x}\right)\sim(x-1)(2t)^{-x}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

et donc

$$\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2(1-x)}\left(2^{1-x}-1\right)\xrightarrow[x\to0^+]{}\frac{1}{2}$$

De plus

$$f(1)=1-\frac{1}{2^x}\xrightarrow[x\to0^+]{}0$$

et donc par encadrement

$$\zeta_2(x)\xrightarrow[x\to0^+]{}\frac{1}{2}$$

**Exercice 54 :** [énoncé]

(a) $\zeta$ est définie sur $]1\,;+\infty[$ et $\zeta_2$ est définie sur $]0\,;+\infty[$ (via le critère spécial des séries alternées)

(b) $f_n\colon x\mapsto\frac{1}{n^x}$ est continue.
Pour tout $a>1$,

$$\left|\frac{1}{n^x}\right|\leq\frac{1}{n^a}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[}\leq\frac{1}{n^a}$$

or $\sum\frac{1}{n^a}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1\,;+\infty[$. Par théorème, on obtient que la fonction $\zeta$ est continue.

$g_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est continue.
Par le critère spécial des séries alternées

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{(N+1)^x}$$

Pour tout $a > 0$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{(N+1)^a}$$

donc $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0\,;+\infty[$. Par théorème on obtient que la fonction $\zeta_2$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Pour $x > 1$

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^x} = \zeta(x) - 2^{1-x}\zeta(x)$$

**Exercice 55 :** [énoncé]

(a) Supposons le domaine de définition $I$ non vide. Considérons $x \in I$. Puisque la suite $(u_n)$ tend vers l'infini, il existe un rang $N$ au-delà duquel tous ses termes sont supérieurs à 1. Pour tout réel $y \geq x$ et tout $n \geq N$

$$u_n^y = \mathrm{e}^{y \ln u_n} \geq \mathrm{e}^{x \ln u_n} = u_n^x \text{ donc } \frac{1}{u_n^y} \leq \frac{1}{u_n^x}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série définissant $f(y)$. Ainsi

$$x \in I \implies [x\,;+\infty[ \subset I$$

Lorsqu'il n'est pas vide, le domaine est donc un intervalle non majoré.

(b) Les fonctions $f_n\colon x \mapsto 1/u_n^x$ sont continues sur $I$ et on a la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq N} f_n$ sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ inclus dans $I$ car

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a\,;+\infty[, \left|\frac{1}{u_n^x}\right| = \frac{1}{u_n^x} \leq \frac{1}{u_n^a} = \alpha_n$$

avec $\sum \alpha_n$ convergente.
Par théorème, on peut affirmer que la fonction $f$ somme de $\sum f_n$ est continue.

(c) — Pour $u_n = \ln n$, $I = \emptyset$.
— Pour $u_n = n$, $I = ]1\,;+\infty[$ (cf. séries de Riemann).
— Pour $u_n = n(\ln n)^2$, $I = [1\,;+\infty[$ (cf. séries de Bertrand).

**Exercice 56 :** [énoncé]

(a) Pour $x \in ]0\,;1[$, on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

Cette relation vaut aussi pour $x = 0$ ou $x = 1$.

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x\right| \leq x^{2(n+2)}\,|\ln x|$$

L'étude de $\varphi\colon x \mapsto x^{2(n+2)}\,|\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0\,;1], x^{2(n+2)}\,|\ln x| \leq \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)} \to 0$$

(c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0\,;1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

**Exercice 57 :** [énoncé]

$$\left\|\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\right\|_{\infty,[0;1]} \leq \frac{1}{n^2}$$

est le terme générale d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment $[0\,;1]$ :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\,\mathrm{d}\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\alpha^2+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \pi\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{\operatorname{sh}\pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

donc

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\,\mathrm{d}\alpha = \left[\ln\frac{\operatorname{sh}\pi\alpha}{\alpha}\right]_0^1 = \ln\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}$$

On en déduit que

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}$$

**Exercice 58 :** [énoncé]
Pour $x \le 0$, il y a divergence grossière.
Pour $x > 0$, $n^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \to 0$ donc $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Ainsi $f$ est définie sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $a > 0$, sur $[a\,;+\infty[$, $\left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right| \le \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$. Cela permet d'établir la convergence normale de la série de fonctions sur $[a\,;+\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que $f$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Par convergence uniforme sur $[1\,;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = 1$$

Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \le \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \le \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

En sommant (avec $n = 0$ à part pour la majoration) on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \le f(x) \le 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2}$$

quand $x \to 0^+$.

**Exercice 59 :** [énoncé]
Par le critère spécial des séries alternées, il est immédiate de justifier que $S(t)$ est définie pour tout $t > 0$.
On peut réorganiser l'expression de $S(t)$ de la façon suivante :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{2p}}{2pt+1} + \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)t+1}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t}{(2pt+1)\left[(2p+1)t+1\right]}$$

La fonction $f_t\colon x \mapsto \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}$ est décroissante.
Par comparaison avec une intégrale, on obtient l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}x \le S(t) \le \int_0^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}x$$

Puisque par les calculs précédents

$$\frac{t}{(2xt+1)\left((2x+1)t+1\right)} = \frac{1}{2xt+1} - \frac{1}{(2x+1)t+1}$$

On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2t}\ln\frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(1+t)}{2t}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2t}\ln\frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1+3t)-\ln(1+2t)}{2t}$$

Quand $t \to 0^+$, on obtient par encadrement $S(t) \to 1/2$.

**Exercice 60 :** [énoncé]

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right\|_\infty \leq \ln\left(1+\frac{x^2}{(N+1)(1+x^2)}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right) \to 0$$

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

(b) $u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(1+1/n)$. Par converge uniformément

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+1/n)$$

Pour calculer cette somme, manipulons les sommes partielles et séparons les termes d'indice pair de ceux d'indice impair

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln(2n+1) - \ln(2n) + \sum_{n=1}^{N} \ln(2n-1) - \ln(2n)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\left(\frac{(2N)!}{(2^N N!)^2}\right)^2 (2N+1)\right)$$

Or

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N \mathrm{e}^{-N}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1+1/n) \sim \ln(2/\pi)$$

On en déduit

$$\ell = \ln(2/\pi)$$

**Exercice 61 :** [énoncé]

Posons

$$f_k(n) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \text{ pour } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$f_k(n) \to \exp(-k\alpha)$$

Pour $k \leq n$

$$|f_k(n)| = \exp(n\alpha \ln(1-k/n)) \leq \mathrm{e}^{-k\alpha}$$

et cette majoration vaut aussi pour $k > n$.

Ainsi

$$\|f_k\|_{\infty,\mathbb{N}} \leq \mathrm{e}^{-k\alpha}$$

et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A = \mathbb{N}$.

Par interversion limite/somme infinie

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k\alpha}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n\alpha} = \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha - 1}$$

**Exercice 62 :** [énoncé]

Par la formule du binôme

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k}$$

Considérons $f_k\colon [0\,;+\infty[ \to \mathbb{C}$ définies par

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}\frac{z^k}{x^k} \text{ si } x \geq k \text{ et } f_k(x) = 0 \text{ sinon}$$

En tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k} = \left(1+\frac{z}{p}\right)^p$$

La série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge simplement vers $x \to \left(1+\frac{z}{x}\right)^x$ en tout $p \in \mathbb{N}$. De plus, puisque $|f_k(x)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$, la convergence est normale sur $\mathbb{R}_+$. Pour $k$ fixé, quand $x \to +\infty$,

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k}\frac{z^k}{k!} \to \frac{z^k}{k!}$$

Par le théorème de la double limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

*i.e.*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z$$

**Exercice 63 :** [énoncé]
Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x} \text{ avec } x>0$$

(a) Soit $x\in\,]0\,;+\infty[$. On a $f_n(x)\sim 1/n^2x$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et donc la fonction $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bien définie.

(b) Les $f_n$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $a>0$,

$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{1}{n+n^2a} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$.
On peut donc conclure que $S$ est continue.

(c) Chaque $f_n$ est décroissante donc la fonction $S$ l'est aussi.

(d) Par convergence normale sur $[1\,;+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

On remarque

$$xf_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{1}{n^2}$$

Posons $g_n\colon x\mapsto \frac{x}{n(1+nx)}$. La fonction $g_n$ croît de 0 à $1/n^2$ sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\|g_n\|_{\infty,[0;+\infty[} = \frac{1}{n^2}$$

La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par suite $xS(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{6}$ puis

$$S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{6x}$$

(e) La fonction $t\mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante donc par comparaison avec une intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}$$

Or

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{x}{1+tx}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x)-\ln(x)$$

donc

$$S(x)\underset{x\to0}{\sim}-\ln(x)$$

**Exercice 64 :** [énoncé]

(a) $f_n\colon x\mapsto \frac{1}{n}-\frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$ est définie et continue sur $]-1\,;+\infty[$
Soient $-1<a\leq 0\leq 1\leq b$.

$$\|f_n\|_{\infty,[a;b]} \leq \frac{b}{n(n+a)}$$

La série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;b]$ et donc converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-1\,;+\infty[$.

(b) Chaque $f_n$ est croissante donc par sommation de monotonie, $S$ est croissante.

(c)

$$S(x+1)-S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$$

donc

$$S(x+1)-S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

(d) Quand $x\to-1$, $S(x+1)\to S(0)=0$ puis

$$S(x) = -\frac{1}{x+1}+S(x+1)\sim-\frac{1}{x+1}$$

(e) $S(0)=0$ et $S(x+1)-S(x)=\frac{1}{x+1}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

(f) On sait $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ et on sait $\ln(n+1) \sim \ln n$.
Puisque $S(E(x)) \leq S(x) \leq S(E(x)+1)$ on obtient

$$S(x) \sim \ln E(x) \sim \ln x$$

**Exercice 65 :** [énoncé]

(a) Posons $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$
Pour $x \leq 0$, la série $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.
Pour $x > 0$, $n^2 f_n(x) \to 0$ donc $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ converge absolument.
La fonction $f$ est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $a > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a)$$

et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$. Comme somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, on peut affirmer que $f$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) $f$ est somme de fonction strictement décroissante, elle donc elle-même strictement décroissante.

(c) Par convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

(d) Par monotonie de $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$,

$$\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

En sommant

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{x^2}$$

donc

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

**Exercice 66 :** [énoncé]

(a) Notons : $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.
Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc $S(x)$ est bien définie.
Pour $x \in ]0\,;1[$ : $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \sim x < 1$ et $S(x)$ est bien définie.
Pour $x = 1$ : $f_n(x) = 1/2$ et $S(x)$ n'est pas définie.
Pour $x \in ]1\,;+\infty[$ : $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \to \frac{1}{x} < 1$ donc $S(x)$ est bien définie.
Finalement $S$ est définie sur $[0\,;1[ \cup ]1\,;+\infty[$ par convergence simplement de $\sum f_n$ sur ce domaine.

(b)

$$\forall x \in ]0\,;1[ \cup ]1\,;+\infty[, S(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = S(x)$$

(c) Soit $0 < a < 1$. Sur $[0\,;a]$,

$$\|f_n\|_{\infty,[0;a]} \leq a^n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} a^n < 1$$

donc $\sum_{n\geq1} f_n$ converge normalement sur $[0\,;a]$ et donc converge uniformément sur tout segment de $[0\,;1[$. Par théorème $S$ est continue sur $[0\,;1[$.
Par composition de fonctions continues $S\colon x \mapsto S(1/x)$ est aussi continue sur $]1\,;+\infty[$.

(d)

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - 2nx^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$$

Chaque $f_n$ est croissante sur $[0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
Par sommation de monotonie, la fonction $S$ est croissante sur $[0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
$S(0) = 0$.
Quand $x \to 1^-$,

$$S(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{2x}{1-x} \to +\infty$$

donc $\lim_{x\to1^-} S(x) = +\infty$.
Puisque $S(1/x) = S(x)$, on obtient par composition de limites, $\lim_{x\to1^+} S(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

**Exercice 67 :** [énoncé]
Pour $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.
Pour $|x| < 1$,
$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$
et donc la série est absolument convergente.
La fonction $S$ est définie sur $]-1\,;1[$.
Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
$u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum u_n$ converge simplement,
$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$
donc pour $a \in [0\,;1[$,
$$\|u_n'\|_{\infty,[-a;a]} \leq n\frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$
ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $]-1\,;1[$.
Par suite la fonction $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$
Pour $x \in [0\,;1[$,
$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}$$
Puisque $\sum_{p\geq 0}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum_{n\geq 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer
$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$
On a alors
$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p u_p(x)$$
avec $u_p(x) = x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0\,;1[$.
La fonction $u_p$ est continue sur $[0\,;1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.
Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum(-1)^p u_p(x)$ et donc
$$\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty}(-1)^k u_k(x)\right\|_\infty \leq u_{p+1}(x)$$
et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer
$$(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$
et finalement
$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$$

**Exercice 68 :** [énoncé]
Posons
$$f_n\colon x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$
Sachant
$$2\,|nx| \leq 1 + n^2x^2$$
on a
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$$
On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $f_n$ étant continue, la somme $S$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$$
Soit $a > 0$. Pour $|x| \geq a$,
$$|f_n'(x)| \leq \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$$
On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^*$.
La somme $S$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Montrons que la fonction $S$ n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right)\geq\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)}$$

Par le changement de variable $u=tx$

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right)\geq\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{u(1+u^2)}\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$$

car la fonction positive $u\mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$.

**Exercice 69 :** [énoncé]
Posons

$$f_n(x)=\frac{1}{n^2}\arctan(nx)$$

Chaque $f_n$ est continue et $\|f_n\|_\infty=\frac{\pi}{2n^2}$ est terme général d'une série convergente.
Par convergence normale, on peut affirmer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Chaque $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x)=\frac{1}{n(1+(nx)^2)}$$

Pour $a>0$, sur $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;-a]$,

$$\|f_n'\|_\infty\leq\frac{1}{n(1+(na)^2)}$$

ce qui donne la convergence normale de la série des dérivées.
Ainsi, par convergence uniforme sur tout segment, on obtient $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

**Exercice 70 :** [énoncé]

(a) En vertu du théorème des accroissements finis

$$|u_n(x)|\leq\left(\sqrt{n+x}-\sqrt{n}\right)\sup_{[\sqrt{n};\sqrt{n+x}]}|(\arctan)'|=\frac{\sqrt{n+x}-\sqrt{n}}{1+n}$$

donc

$$|u_n(x)|\leq\frac{x}{(1+n)(\sqrt{n}+\sqrt{n+x})}\leq\frac{x}{2\sqrt{n}(n+1)}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et donc la fonction $S$ est bien définie.
Les fonctions $u_n$ sont continue et pour tout $a\in\mathbb{R}_+$,

$$\forall x\in[0\,;a],|u_n(x)|\leq\frac{a}{2\sqrt{n}(n+1)}$$

On peut donc affirmer la convergence uniforme sur tout segment de la série $\sum u_n$ ce qui assure la continuité de $S$.

(b) Montrons que $S$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Remarquons que par le théorème des accroissements finis

$$u_n(n)=\arctan\sqrt{2n}-\arctan\sqrt{n}\geq\frac{\sqrt{2n}-\sqrt{n}}{1+2n}\sim\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{n}}$$

et il y a donc divergence vers $+\infty$ de la série $\sum u_n(n)$.
Soit $A\in\mathbb{R}_+$. Il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{N}u_n(n)\geq A$$

Pour $x\geq N$,

$$S(x)\geq\sum_{n=0}^{N}u_n(x)\geq\sum_{n=0}^{N}u_n(N)\geq\sum_{n=0}^{N}u_n(n)\geq A$$

On peut donc affirmer

$$S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$

**Exercice 71 :** [énoncé]

(a) Posons

$$u_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2}$$

Les fonctions $u_n$ sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ car $u_n(x)\sim 1/n^2$.

On a
$$u_n'(x) = \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$$
donc sur $[-a\,;a]$,
$$\|u_n'\|_\infty \le \frac{2a}{n^4}$$
et la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
On peut conclure que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) La fonction $t \mapsto 1/(t^2+x^2)$ est décroissante donc
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \le f(x) \le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$$
Or
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{2x} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$$
donc
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

(c) On peut écrire
$$\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1+x^2/n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) + \frac{1}{n^4}\frac{x^4}{n^2+x^2}$$
et par convergence des sommes introduites
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{n^4} + x^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4(n^2+x^2)}$$
Or
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4(n^2+x^2)}\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} < +\infty$$
donc
$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}x^2 + \mathrm{O}(x^4)$$

**Exercice 72 :** [énoncé]
Posons
$$f_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$
Puisque les fonctions $f_n$ sont toutes impaires, on limite l'étude à $x \in [0\,;+\infty[$.
À partir d'un certain rang $N_x$, on a $x/n \le \pi/2$ et alors
$$\sin(x/n) \in [0\,;1]$$
La série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie alors les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang $N_x$ et par conséquent cette série converge.
Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donc sa fonction somme, que nous noterons $S$, est définie sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$$
de sorte que
$$\|f_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$$
On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, *a fortiori* cette fonction est continue.

**Exercice 73 :** [énoncé]

(a) Posons $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.
Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et
$$\|R_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \le \frac{1}{1+na} \to 0$$
pour tout $a > 0$.
Par converge uniformément sur tout segment d'une série de fonctions continue, $S$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Par converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$,
$$\lim_{+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nt} = 1$$
Par application du critère spécial des séries alternées
$$1 - \frac{1}{1+t} \le S(t) \le 1$$

(c) Les fonctions $f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.

$$f_n'(t) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}$$

La série $\sum f_n'(t)$ est alternée avec $|f_n'(t)| = \frac{n}{(1+nt)^2}$.
Puisque

$$|f_n'(t)| - |f_{n+1}'(t)| = \frac{n(n+1)t^2 - 1}{(1+nt)^2(1+(n+1)t)^2}$$

la suite $(|f_n'(t)|)$ décroît vers 0 à partir d'un certain rang.
Soit $a > 0$.
À partir d'un certain rang $n_0$,

$$n(n+1)a^2 - 1 \geq 0$$

et alors pour tout $t \geq a$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à partir du rang $n_0$.
On a alors

$$|R_n(t)| \leq \frac{n}{(1+nt)^2} \leq \frac{n}{(1+na)^2}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{n}{(1+na)^2} \to 0$$

Ainsi la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$.
Par théorème, on peut alors conclure que $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 74 :** [énoncé]
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x}{n+x^2}$$

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées et donc $\sum u_n$ converge simplement. La fonction $S$ est donc bien définie, elle est évidemment impaire.

(b) Soit $a > 0$. Par le critère spécial des séries alternées

$$|R_n(x)| \leq \frac{x}{(n+1)+x^2} \leq \frac{a}{n+1} \text{ pour } x \in [-a\,;a]$$

et donc

$$\|R_n\|_{\infty,[-a;a]} \leq \frac{a}{n} \to 0$$

Il y a convergence uniforme sur $[-a\,;a]$ pour tout $a > 0$ et donc convergence uniforme [1] sur tout segment de $\mathbb{R}$.
De plus chaque fonction $u_n$ est continue donc $S$ est continue.

(c) Par le critère spécial des séries alternées, on peut encadrer $S$ par deux sommes partielles consécutives

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2+x^2} \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$$

et on peut donc affirmer $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

**Exercice 75 :** [énoncé]

(a) Pour $x \in ]-1\,;1[$,

$$|u_n(x)| = \mathrm{o}\left(|x|^n\right)$$

donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.
Pour $x = 1$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

donc $\sum u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.
Pour $x \in ]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{|x|^n}\right)$$

donc $\sum u_n(x)$ est somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

(b)

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1/x^n}{1+1/x^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

(c) Soit $a \in [0\,;1[$.

$$\|f\|_{\infty,[-a;a]} \leq \frac{a^n}{1-a^n} \leq \frac{a^n}{1-a}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a\,;a]$.
Par convergence uniforme d'une série de fonctions continues sur tout segment de $]-1\,;1[$, on peut affirmer que $f$ est continue sur $]-1\,;1[$. Puisque $f(x) = C^{te} - f(1/x)$, $f$ est aussi continue sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]1\,;+\infty[$ par composition de fonctions continues.

1. Une étude des variations de la fonction $x \mapsto x/((n+1)+x^2)$ permet aussi d'établir qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

(d) Pour $x \in [0\,;1]$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n\geq 0}$ décroît vers 0 (après étude non détaillée ici) donc le critère spécial des séries alternées s'applique et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

puis

$$\|R_n\|_{\infty,[0;1]} \leq \frac{1}{n+1} \to 0$$

La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ donc $f$ est continue sur $[0\,;1]$ et donc continue à gauche en 1. Par la relation du b) on obtient aussi $f$ continue à droite en 1.

**Exercice 76 :** [énoncé]

(a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.

(b)

$$\ln\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(x\ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)\right)$$

avec $x\ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) = x\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.
Or la série $\sum\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$ et

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = x\ln n + \gamma x + \mathrm{o}(1) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

(c) Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ pour $x>0$ et $n\geq 1$. $f_n$ est $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $f_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment$[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 77 :** [énoncé]

(a) Si $x \leq 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x>0$ alors $n^2 f_n(x) = \mathrm{e}^{2\ln n - xn^\alpha} \to 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.
Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$. $f$ est définie sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Les fonctions $f_n$ sont continues.
Pour $a>0$, $\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que $f$ est continue.

(c) Par convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

**Exercice 78 :** [énoncé]

(a) Pour $x<0$, $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
Pour $x=0$, $u_n(x) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge
Pour $x>0$, $u_n(x) = \mathrm{o}(1/n^2)$ par croissance comparée et donc $\sum u_n(x)$ converge absolument.
On conclut $I = \mathbb{R}_+$

(b) Pour $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\|u_n\|_{\infty,[a;b]} = \sup_{x\in[a;b]} |u_n(x)| \leq \frac{n^\alpha b\mathrm{e}^{-na}}{n^2+1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Sa somme est alors continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |u_n(x)| = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha<2$.

(d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^\alpha\mathrm{e}^{-k/n}}{k^2+1} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2+1}\mathrm{e}^{-k/n} \geq \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n}$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n} = \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \to \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n \to +\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ alors

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0$$

ce qui vient d'être exclu.

(e) Si $S$ est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq S(1/n) \to S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

**Exercice 79 :** [énoncé]
Puisque $a_n > 0$ et $\sum a_n(1+|x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.
Posons $f_n(x) = a_n |x - x_n|$.
Comme $|a_n |x - x_n|| \leq |a_n| |x| + |a_n x_n|$, la série des fonctions $f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $f_n$ sont continues et sur $[-M ; M]$, $\|f_n\|_\infty \leq M a_n + a_n |x_n|$.
Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme $f$ est continue.
Soit $[\alpha ; \beta] \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \notin [\alpha ; \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les fonctions $f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha ; \beta]$ et $f_n'(x) = \varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon| = 1$.
Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha ; \beta]$, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]a ; b[$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin ]a ; b[$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x_n = a$.
En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a\}$, on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n\in A} a_n |x - a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A} a_n |x - x_n| = \alpha |x - a| + g(x)$$

avec $\alpha > 0$.
Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour $N$ assez grand, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_n \leq \frac{\alpha}{2}$.
On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha |x - a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\geq N+1} a_n |x - x_n| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\leq N} a_n |x - x_n|$$

La fonction $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\leq N} a_n |x - x_n|$ est dérivable au voisinage de $a$.
Cependant, la fonction

$$\varphi \colon x \mapsto \alpha |x - a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\geq N+1} a_n |x - x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en $a$.
En effet, pour $h > 0$,

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(a+h) - \varphi(a)\right) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour $h < 0$,

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(a+h) - \varphi(a)\right) \leq -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

**Exercice 80 :** [énoncé]

(a)
```
def S(N,x):
    if N == 0:
        return 1/x
    return S(N-1,x) + 1/(x-N) + 1/(x+N)
```

(b)
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def trace(N,a,b):
    X = linspace(a,b,100)
    Y = [S(N,x) for x in X]
    plt.plot(X,Y)
```

(c) Posons $u_n \colon \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{n^2}$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On peut alors affirmer la convergence simple de la suite de fonctions $(S_N)$ vers une certaine fonction $S$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(d) Soit $[a ; b]$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour $N_0$ assez grand, on a

$$[a ; b] \subset [-N_0 ; N_0]$$

Soit $x \in [a\,;b]$. Pour tout $N > N_0$ et tout $P \in \mathbb{N}$,

$$S_{N+P}(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

Le facteur $x^2 - n^2$ est négatif pour chaque terme sommé et par conséquent

$$\left|S_{N+P}(x) - S_N(x)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2\,|x|}{n^2 - x^2} \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2N_0}{n^2 - N_0^2}$$

En passant à la limite quand $P$ tend vers $+\infty$, on obtient la majoration uniforme

$$\left|S(x) - S_N(x)\right| \leq \alpha_N \quad \text{avec} \quad \alpha_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2N_0}{n^2 - N_0^2}$$

Puisque $\alpha_N$ est le reste de rang $N$ d'une série convergente, $\alpha_N$ est de limite nulle et on peut conclure que la suite de fonctions $(S_N)$ converge uniformément vers $S$ sur $[a\,;b]$.

(e) Les fonctions $S_N$ sont continues et par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que la fonction $S$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Les fonctions $S_N$ sont impaires et par convergence simple, on peut affirmer que $S$ est une fonction impaire.

Enfin, on obtient que la fonction $S$ est 1-périodique en passant à la limite l'égalité

$$S_N(x+1) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} = S_N(x) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N}$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(f) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on remarque

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{x}{2}\right) + S_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{2}{x-2n} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{2}{x-(2n-1)} \\ &= \sum_{n=-2N-1}^{2N} \frac{2}{x-n} = 2S_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1} \end{aligned}$$

On obtient la relation voulue en passant à la limite quand $N$ tend vers $+\infty$.

(g) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\cot\left(\pi\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\pi\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Après réduction au même dénominateur

$$\cot\left(\pi\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\pi\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2\cot(\pi x)$$

L'ensemble des fonctions vérifiant la relation proposée étant un sous-espace vectoriel, la fonction $f$ vérifie aussi cette relation.

(h) Pour $x \in \left]-1\,;1\right[ \setminus \{0\}$, on peut écrire

$$S(x) = \frac{1}{x} + T(x) \quad \text{avec} \quad T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

Par les arguments précédents, on peut affirmer que la fonction $T$ est continue sur $\left]-1\,;1\right[$. Aussi, on a par développement limité

$$\pi\cot(\pi x) \underset{x \to 1}{=} \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

donc

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}(1) - T(x)$$

ce qui permet de prolonger $f$ par continuité en 0 avec la valeur $-T(0) = 0$.

Par périodicité, on peut prolonger $f$ par continuité avec la valeur 0 en tout $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction $f$ est continue sur le compact $[0\,;1]$ et y présente un maximum de valeur $M$. Celui-ci est atteint en un certain $x_0 \in [0\,;1]$. Or

$$\underbrace{f\left(\frac{x_0}{2}\right)}_{\leq M} + \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\leq M} = 2f(x_0) = 2M$$

et donc

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = M$$

Ainsi, le maximum de $f$ est aussi atteint en $x_0/2$, puis en $x_0/4$, etc.

Finalement, le maximum de $f$ est atteint en 0 et il est donc de valeur nulle.

De même, on montre que le minimum de $f$ est nul et on peut conclure

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S(x) = \pi\cot(\pi x)$$

**Exercice 81 :** [énoncé]

(a) Puisque $\|a\| < 1$ et $\|a^n\| \leq \|a\|^n$, la série $\sum a^n$ est absolument convergente et sa somme $S$ vérifie $(1_E - a)S = S(1_E - a) = 1_E$ donc $1_E - a$ est inversible d'inverse $S$.

(b) Pour $\alpha \in [0\,;1[$, on montre par convergence normale la continuité de $a \mapsto (1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ sur $\bar{B}(0,\alpha)$. On en déduit que $x \mapsto x^{-1}$ est continue en $1_E$.

(c) Soit $a \in U(E)$. Quand $x \in U(E) \to a$ alors $xa^{-1} \to 1_E$ donc $(xa^{-1})^{-1} \to 1_E^{-1} = 1_E$ puis $x^{-1} = a^{-1}(xa^{-1})^{-1} \to a^{-1}$. Ainsi $x \mapsto x^{-1}$ est continue en chaque $a \in U(E)$.

**Exercice 82 :** [énoncé]

(a) $\left\|\frac{1}{k}t^kA^k\right\| = \frac{1}{k}|t|^k \|A\|^k$ avec $|t|\,\|A\| < 1$ donc la série converge simplement.

(b) Soit $\rho \in [0\,;1/\|A\|[$. $t \mapsto \frac{1}{k}t^kA^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $t^{k-1}A^k$ avec

$$\left\|t^{k-1}A^k\right\|_{\infty,[-\rho;\rho]} \leq \rho^{k-1}\|A\|^k$$

terme général d'une série convergente. La série des fonctions dérivées converge donc normalement sur $[-\rho\,;\rho]$ ce qui assure que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1/\|A\|\,;1/\|A\|[$ et

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^kA^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^kA^k\right)A.$$

Or

$$(I-tA)\sum_{k=0}^{+\infty} t^kA^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^kA^k - \sum_{k=1}^{+\infty} t^kA^k = I$$

donc $(I-tA)f'(t) = A$.

**Exercice 83 :** [énoncé]

(a) Soit $s = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^a}$$

Par conséquent, si $a > 1$, la série $\sum 1/n^s$ converge absolument et donc converge.

(b) Soit $s$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. En développant

$$\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} - \sum_{P=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^s}$$

Par absolue convergence, on peut séparer la première somme en deux paquets, celui des termes d'indices pairs et celui des termes d'indices impairs. Il vient alors

$$\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^s} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^s} \tag{1}$$

En regroupant ces sommes, on obtient

$$\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

avec sommabilité de la somme en second membre.

(c) En reprenant, l'expression (**??**), étudions

$$F(s) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^s} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^s} = \sum_{p=1}^{+\infty} u_p(s)$$

avec

$$u_p(s) = \frac{(2p)^s - (2p-1)^s}{(2p)^s(2p-1)^s}$$

définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Pour $s = a + ib$ fixé, la fonction $f\colon t \mapsto t^s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2p-1\,;2p]$ et

$$\left|f'(t)\right| = \left|st^{s-1}\right| = |s|\,t^{a-1} \leq |s|\left((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1}\right)$$

Par l'inégalité des accroissements finis

$$\left|(2p)^s - (2p-1)^s\right| \leq |s|\left((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\left|u_p(s)\right| &\leq |s|\frac{\left((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1}\right)}{(2p)^a(2p-1)^a}\\ &\leq |s|\left(\frac{1}{(2p)^a(2p-1)} + \frac{1}{(2p)(2p-1)^a}\right)\end{aligned}$$

Introduisons alors

$$\Omega_{\alpha,R} = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) \geq \alpha \text{ et } |z| \leq R\right\} \quad \text{pour} \quad \alpha, R > 0$$

Les fonctions $u_n$ sont continues sur $\Omega_{\alpha,R}$ et pour tout $s \in \Omega_{\alpha,R}$

$$\left|u_n(s)\right| \leq |R| \left(\frac{1}{(2p)^\alpha(2p-1)} + \frac{1}{(2p)(2p-1)^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right)$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\Omega_{\alpha,R}$ et sa fonction somme $F$ est définie et continue sur $\Omega_{\alpha,R}$. Ceci valant pour tous $\alpha$ et $R$ strictement positifs, on obtient que $F$ est définie et continue sur $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z)\right\}$. Enfin, la fonction $s \mapsto 1 - 2^{1-s}$ étant continue et ne s'annulant pas sur $\Omega$, on peut prolonger $\zeta$ par continuité sur $\Omega$ en posant

$$\zeta(s) = \frac{F(s)}{1 - 2^{1-s}}$$