

Séries entières

Calcul de rayon de convergence concret

Exercice 1 [00971] [Correction]

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$(a) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n \quad (c) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$$

$$(b) \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n \quad (d) \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

Exercice 2 [03054] [Correction]

Déterminer le rayon de convergence de :

$$(a) \sum_{n \geq 0} n! z^n \quad (c) \sum_{n \geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$$

$$(b) \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n \quad (d) \sum_{n \geq 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$$

Exercice 3 [00972] [Correction]

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$(a) \sum_{n \geq 0} z^{n^2} \quad (b) \sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n \quad (c) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$$

Exercice 4 [03298] [Correction]

(a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n \text{ et } \sum \sin(e^{-n}) x^n.$$

(b) Une série entière converge-t-elle normalement sur son disque ouvert de convergence ?

Exercice 5 [03383] [Correction]

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6 [02842] [Correction]

Quel est le rayon de convergence de $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$?

Exercice 7 [02841] [Correction]

On note a_n la n -ième décimale de $\sqrt{3}$.

Quel est l'intervalle de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 8 [02843] [Correction]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$?

Exercice 9 [00973] [Correction]

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} d(n) z^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} s(n) z^n$$

où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 10 [03483] [Correction]

Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}.$$

(a) Démontrer que $R_\alpha \leq 1$.

(b) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = (u_n)^{u_n}.$$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

En déduire que la série de terme général $1/u_n$ converge.

Dans la suite, on pose

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$

et on admet que α est irrationnel.

- (c) Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}.$$

- (d) Démontrer que $R_\alpha = 0$.
 (e) Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.
 Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Calcul de rayon de convergence abstrait

Exercice 11 [00977] [Correction]

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R .

Exercice 12 [00975] [Correction]

On suppose que $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
 Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 13 [00978] [Correction]

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 14 [00974] [Correction]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .
 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 15 [03310] [Correction]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .
 Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum a_n^2 z^n.$$

Exercice 16 [03309] [Correction]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
 Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Exercice 17 [02523] [Correction]

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul.

- (a) Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $|a_n| \leq 1/r^n$ à partir d'un certain rang.
 (b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?
 (c) On note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{S_n}{n!} z^n$?

Exercice 18 [03484] [Correction]

Soit (a_n) une suite de réels tous non nuls.
 Quelle relation lie les rayons de convergence des séries entières ci-dessous

$$\sum a_n z^n \text{ et } \sum \frac{1}{a_n} z^n.$$

Exercice 19 [00976] [Correction]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

- (a) Montrer que $R' \geq \max(1, R)$
 (b) Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
 (c) Exprimer alors R' en fonction de R .

Exercice 20 [00979] [Correction]

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b .
 On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$.
 Montrer que le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est $R = \min(R_a, R_b)$

Domaine de convergence

Exercice 21 [02855] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt.$$

- Déterminer la limite de (I_n) .
- Donner un équivalent de (I_n) .
- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 22 [03016] [Correction]

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

- Calculer $I(p, q)$.
- La série de terme général $u_n = I(n, n)$ est-elle convergente ou divergente?
- Donner le domaine de définition réel de la série entière de $\sum u_n x^n$.

Étude de la somme d'une série entière concrète

Exercice 23 [03307] [Correction]

Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (-1)^n \ln(n)x^n.$$

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$.
On note S sa somme.
- Montrer que

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \frac{1}{1+x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} \right).$$

- En déduire que S admet une limite en 1^- et que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right).$$

- Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule de Wallis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 24 [00038] [Correction]

- Étudier la convergence et préciser la limite éventuelle de (a_n) définie par

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \text{ et } a_0 > 0.$$

- Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$
- Étudier la convergence de $\left(\sum a_n x^n \right)$ sur le bord de l'intervalle de convergence
(on pourra étudier la limite de $1/a_{n+1} - 1/a_n$ et utiliser le théorème de Cesaro)

Exercice 25 [03653] [Correction]

Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f .
- Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1 .
- Établir la continuité de f en -1 .
- Déterminer la limite de f en 1 .

Exercice 26 [03890] [Correction]

- Donner l'intervalle de définition I de la fonction s qui au réel x associe

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

- Quel est le signe de s' sur $I \cap \mathbb{R}_+$?
Quelle est la limite de s en l'extrémité droite de $I \cap \mathbb{R}_+$?
- Écrire $(1-x)s'(x)$ sous forme d'une série et en déduire le signe de s' sur I .

(d) Étudier la convexité de f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f(x) = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})x.$$

En déduire que la fonction s est convexe.

Exercice 27 [03201] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n.$$

- (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f .
 (b) Étudier la convergence en $-R$ et en R .
 (c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1^-$.
 (d) Montrer que quand $x \rightarrow 1^-$

$$(1-x)f(x) \rightarrow 0.$$

Exercice 28 [03663] [Correction]

On pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ et } s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = 1.$$

Étude de la somme d'une série entière abstraite

Exercice 29 [00980] [Correction]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .

- (a) Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$.
 (b) Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 30 [00983] [Correction]

Soit (a_n) une suite non nulle et T périodique (avec $T \in \mathbb{N}^*$).

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

(b) Simplifier $\sum_{k=0}^{nT-1} a_k x^k$. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est, pour tout $x \in]-1; 1[$, une fraction rationnelle en x .

Exercice 31 [00982] [Correction]

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et on suppose

$$S_n \rightarrow +\infty \text{ et } a_n/S_n \rightarrow 0.$$

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.

Exercice 32 [00984] [Correction]

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que sur $[0; \alpha]$ on ait $S(x) = 0$.

Montrer que $S = 0$.

Exercice 33 [02854] [Correction]

Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

(a) Montrer que pour $0 < r < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

(b) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0?

(c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 34 [02856] [Correction]

Soient $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ et f une fonction continue de B dans \mathbb{C} dont la restriction à B° est somme d'une série entière. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k \geq 0}$ de polynôme convergeant uniformément vers f sur B .

Comportement en une extrémité de l'intervalle de convergence

Exercice 35 [03068] [Correction]

Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$$

converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.

(a) Déterminer I .

(b) On pose

$$a_1 = -1 \text{ et } a_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2.$$

Déterminer le domaine de définition de

$$g: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

(c) Trouver une relation entre f et g .

(d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1^-$.

(e) Donner la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow -1^+$

Exercice 36 [03783] [Correction]

Donner un équivalent simple quand $x \rightarrow 1^-$ de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

Exercice 37 [02844] [Correction]

(a) Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R . Déterminer les rayons de convergence de

$$\sum (a_n \ln n)x^n \text{ et } \sum \left(a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)x^n.$$

(b) Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$ quand $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 38 [02852] [Correction]

Domaine de définition et étude aux bornes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n.$$

Exercice 39 [03747] [Correction]

(a) Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n.$$

(b) Calculer $f(-1)$ et $\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} dx$ où E est la fonction partie entière.

(c) Donner un équivalent de f en $x = 1$

Exercice 40 [02853] [Correction]

On pose

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\text{th } t}{t^2} dt$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ entière pour x réel.

On note $f(x)$ la somme de cette série entière.

(b) La fonction f est-elle continue en -1 ?

(c) Donner un équivalent simple de f en 1^- .

Exercice 41 [02394] [Correction]

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

Pour $x \in]-1; 1[$, on définit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0; 1[$.

- (a) Montrer que $\sum a_n$ est une série convergente.
 (b) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 42 [03245] [Correction]

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0.$$

Pour $x \in]-1; 1[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on suppose que la fonction S est bornée.

- (a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
 (b) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 43 [03246] [Correction]

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme

$$x \in]-1; 1[\mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que la série numérique $\sum a_n$ converge, montrer que la fonction f est définie et continue en 1.

Exercice 44 [03244] [Correction]

Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.

On suppose l'existence d'un réel

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

- (a) Peut-on affirmer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?

- (b) Que dire si l'on sait de plus $a_n = o(1/n)$? [Théorème de Tauber]

Exercice 45 [00985] [Correction]

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$.

On suppose que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est R et que cette série diverge en R .

- (a) On suppose que $a_n = o(b_n)$. Montrer que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \rightarrow R^-$.
 (b) On suppose que $a_n \sim b_n$. Que dire de $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de R ?

Exercice 46 [02452] [Correction]

Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$.

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}.$$

- (a) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$ et étudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
 (b) Ici $p_n = n^q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \geq 2$. Donner un équivalent simple de f en 1.

Exercice 47 [02483] [Correction]

Soit $\alpha > -1$.

- (a) Donner le rayon de convergence R de

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n.$$

On désire trouver un équivalent de f_α lorsque $x \rightarrow R^-$.

- (b) On suppose que α est un entier p .
 Calculer f_0, f_1 . Donner avec un logiciel de calcul formel l'expression de f_2, \dots, f_5 .
 Trouver les équivalents recherchés.
 Montrer qu'il existe $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$f_p(x) = \frac{Q_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

(on calculera f'_p). En déduire l'équivalent recherché.

(c) On suppose $\alpha > -1$ quelconque.

Donner le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}}.$$

On notera b_n ses coefficients.

Montrer qu'il existe $A(\alpha) > 0$ tel que $n^\alpha \sim A(\alpha)b_n$. On étudiera la nature de la série de terme général

$$\ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n}.$$

En déduire que $f_\alpha(x)$ est équivalente à

$$\frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$$

quand x tend vers R^- .

Exercice 48 [03989] [Correction]

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^n.$$

- (a) Déterminer les rayons de convergence de f et de g .
- (b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1; 1[$.
- (c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1; 1[$.
- (d) Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $[-1; 1[$.
- (e) Trouver des équivalents de f et g en 1.

Fonctions développables en série entière

Exercice 49 [03303] [Correction]

Soit $f:]-R; R[\rightarrow \mathbb{R}$ (avec $R > 0$) de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; R[, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Montrer la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

pour tout $x \in]-R; R[$.

Exercice 50 [00994] [Correction]

Soient $a > 0$ et $f:]-a; a[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0.

Exercice 51 [00993] [Correction]

(Fonction absolument monotone) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 52 [03358] [Correction]

Montrer que la fonction

$$f: x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$$

admet un développement en série entière de rayon de convergence $R \geq 1$.

Exercice 53 [03302] [Correction]

Établir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

Exercice 54 [03687] [Correction]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}.$$

- (a) Montrer que la fonction f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- (b) Observer que le rayon de convergence de sa série de Taylor en 0 est nul.

Exercice 55 [02975] [Correction]

Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de carré sommable, on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-t}$$

où la variable t est réelle.

- (a) Préciser le domaine de définition de f .
- (b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
- (c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2; 1/2]$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est identiquement nulle.

Exercice 56 [02506] [Correction]

Soit $a \in]-1; 1[$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x).$$

- (a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{1 - |a|}.$$

- (c) Montrer que f est développable en série entière.

Calcul de développement en série entières**Exercice 57** [00987] [Correction]

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1).$$

Exercice 58 [00988] [Correction]

Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$.

Calculer c_n , le n -ième coefficient du développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{(1 - ax)(1 - bx)}.$$

Exprimer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n.$$

Exercice 59 [00990] [Correction]

Former le développement en série entière de

$$\frac{1 - z \cos t}{1 - 2z \cos t + z^2}$$

pour $|z| < 1$ et $t \in]0; \pi[$.

Exercice 60 [03485] [Correction]

Former le développement en série entière de

$$f: x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Exercice 61 [00995] [Correction]

Réaliser le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 62 [02859] [Correction]

(a) Montrer, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n| |f(t)| dt \right)_{n \geq 0}$ soit bornée.

Montrer que $F: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t) dt$ est développable en série entière en 0.

Exercice 63 [03761] [Correction]

Pour $x \in]-1; 1[$, on pose

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}.$$

(a) Justifier

$$\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 x^{2n}.$$

(b) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 64 [03707] [Correction]

(a) Pour quel réel x , l'intégrale suivante existe-t-elle

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} ?$$

(b) Donner alors sa valeur.

(c) Montrer que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$$

est développable en série entière et exprimer ce développement.

Exercice 65 [02512] [Correction]

(a) Quel est le domaine de définition de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$$

pour $a \in]-1; 1[$?

(b) Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$.

(c) Développer en série entière

$$S(x) - \frac{1}{x}$$

Exercice 66 [03878] [Correction]

Pour $\alpha \in [0; 1[$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{sh}(\alpha^n x).$$

(a) Montrer que la fonction S est définie et continue sur \mathbb{R} .

(b) Former une relation engageant $S(\alpha x)$ et $S(x)$.

(c) Établir que la fonction S est développable en série entière sur \mathbb{R} et exprimer ce développement.

Exercice 67 [03899] [Correction]

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Former le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}.$$

Exercice 68 [02605] [Correction]

Soit $\alpha \in]-1; 1[$.

(a) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite de terme général

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^n (1 - \alpha^k x)$$

vers une limite que l'on notera $P(x)$.

(b) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(E): \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x)f(\alpha x).$$

Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0)P(x).$$

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto P(x)$ est développable en série entière sur \mathbb{R} .

Exercice 69 [02520] [Correction]

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{z}{2^k}\right).$$

(a) Montrer que $|P_n(z)| \leq P_n(-|z|)$.

En déduire que la suite $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Indice : on pourra penser à introduire $\ln P_n(-|z|)$.

(b) En étudiant la convergence de la série $\sum (P_{n+1}(z) - P_n(z))$, établir la convergence de la suite $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$.

On introduit la fonction

$$f: z \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z).$$

(c) Montrer que f est continue en 0.

(d) Montrer que f est l'unique fonction continue en 0 vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (1-z)f(z/2) \text{ et } f(0) = 1.$$

(e) Montrer que f est développable en série entière.

Calcul de développement par dérivation intégration

Exercice 70 [00986] [Correction]

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6).$$

Exercice 71 [02857] [Correction]

Développer en série entière

$$x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

Exercice 72 [00078] [Correction]

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]0; \pi/2[$.

(a) Calculer la partie imaginaire du complexe

$$\frac{\sin \theta e^{i\theta}}{1 - x \sin \theta e^{i\theta}}.$$

(b) En déduire le développement en série entière de

$$f(x) = \arctan\left(x - \frac{1}{\tan \theta}\right).$$

Exercice 73 [02525] [Correction]

Montrer que

$$f(x) = \arctan(1+x)$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer cette série entière.

Exercice 74 [02848] [Correction]

Pour $x \in]-1; 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right).$$

Calcul de développement par équation différentielle

Exercice 75 [01013] [Correction]

Soient $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n.$$

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
- Calculer $f(x)$ en étudiant $(1-x)f'(x)$.

Exercice 76 [00937] [Correction]

Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

- en procédant à une intégration terme à terme.
- en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution.

Exercice 77 [02858] [Correction]

Développer en série entière $f: x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0.

Exercice 78 [03699] [Correction]

(a) Quel est l'ensemble de définition de

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} ?$$

- Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec pour condition initiale $f(0) = 0$.
- Montrer que f est développable en série entière et en donner le rayon de convergence.

Exercice 79 [01015] [Correction]

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$f: x \mapsto \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 80 [01018] [Correction]

Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x).$$

Exercice 81 [03694] [Correction]

(a) Étudier la parité de

$$f: x \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

(b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle à déterminer.

(c) Justifier que f est développable en série entière et donner ce développement.

Exercice 82 [03659] [Correction]

(a) Former une équation différentielle vérifiée par

$$f: x > -1 \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

(b) En déduire le développement en série entière en 0 de f .

Exercice 83 [03301] [Correction]

Développer $f(x) = \operatorname{ch}(x) \cos(x)$ en série entière en l'exprimant à l'aide de fonctions exponentielles.

Retrouver le résultat en remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

Exercice 84 [02500] [Correction]

Soient $k > 0$ et

$$f(x) = \int_0^1 t^k \sin(xt) dt.$$

(a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) + (k+1)f(x) = \sin x.$$

(c) Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de $xy' + (k+1)y = \sin x$ en précisant le rayon de convergence.

Exercice 85 [02498] [Correction]

On considère l'équation différentielle

$$(E): ty' + y = 3t^2 \cos(t^{3/2}).$$

(a) Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) développable en série entière sur un voisinage de 0.

(b) Trouver l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* et en déduire une expression plus simple de v .

Calcul de sommes de séries entières**Exercice 86** [00997] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$

(a) Déterminer l'intervalle de convergence de f .

(b) Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $] -1; 1[$

(c) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 87 [00996] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n.$$

Exercice 88 [00998] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n.$$

Exercice 89 [03648] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}.$$

Exercice 90 [02845] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}.$$

Exercice 91 [00999] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Exercice 92 [01000] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$$

Exercice 93 [01001] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}.$$

Exercice 94 [02448] [Correction]Pour $n > 0$, on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt.$$

- (a) Trouver la limite de (a_n) .
 (b) Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n .
 (c) On pose

$$u_n(x) = \frac{a_n}{n^\alpha} x^n.$$

Donner la nature de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et de α .

(d) On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.**Exercice 95** [02449] [Correction]Soit (a_n) la suite définie par

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) dt \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

- (a) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
 (b) Somme de $\sum a_n x^n$.

Exercice 96 [02847] [Correction](a) Déterminer le rayon de convergence R de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^n.$$

(b) Pour $x \in]-R; R[$ calculer la somme précédente.**Exercice 97** [03791] [Correction]

Étude et expression de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n.$$

Exercice 98 [00075] [Correction]

Calculer

$$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

(on pourra calculer $S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+k}}{(3n+k)!}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$)

Exercice 99 [02414] [Correction]

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R' .

(a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum c_n x^n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

(b) Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 100 [02565] [Correction]

Trouver le rayon de convergence de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)} x^n.$$

Calculer la somme dans le bon intervalle.

Exercice 101 [02551] [Correction]

Calculer

$$a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Calculer la somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 102 [02607] [Correction]

Pour $n \geq 0$, on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt.$$

(a) Trouver la limite de la suite (a_n) .

(b) Donner une relation simple entre a_{n+2} et a_n .

(c) On pose $f(x)$ la somme de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Déterminer l'intervalle de définition de f .

(d) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 103 [02534] [Correction]

On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \cos(n\theta).$$

(a) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1; 1[$.

(b) Montrer que pour tout $\theta \neq k\pi$, la série $\sum \frac{a_n}{n+1}$ converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

(c) Calculer cette intégrale pour $\theta \in]0; \pi[$.

Application à la détermination du terme général d'une suite

Exercice 104 [02850] [Correction]

On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} a_k.$$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!} x^n$.

Exercice 105 [01010] [Correction]

(a) Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

(b) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n.$$

Exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de ses premiers termes.

Exercice 106 [01011] [Correction]

On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} a_k.$$

(a) Donner une formule permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

(b) Calculer $S(x)$.

(c) Calculer les a_n .

(d) Donner un équivalent de la suite (a_n) .

Exercice 107 [02451] [Correction]

On note $N(n, p)$ le nombre de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n) = N(n, 0)$, puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n.$$

(a) relier $N(n, p)$ et $D(n - p)$.

(b) Justifier la définition de f sur $] -1; 1[$ puis calculer f .

(c) Calculer $N(n, p)$.

(d) Étudier la limite de $\left(\frac{1}{n!} N(n, p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Application à la régularité d'un prolongement continu

Exercice 108 [01002] [Correction]

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

(b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$

Exercice 109 [03308] [Correction]

Pour $x \neq 0$ on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt.$$

(a) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.

(b) Montrer que ce prolongement est développable en série entière sur \mathbb{R} .

Application au calcul de sommes

Exercice 110 [01003] [Correction]

Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}.$$

En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 111 [01009] [Correction]

(a) On note γ la constante d'Euler. Établir l'égalité

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right).$$

(b) En déduire que

$$\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k).$$

Exercice 112 [02808] [Correction]

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2) \times 3^n}.$$

Intégration terme à terme de séries entières

Exercice 113 [01004] [Correction]

Montrer

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 114 [01006] [Correction]

Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \arctan x \, dx.$$

En déduire la valeur de cette somme.

Exercice 115 [01008] [Correction]Observer que pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x \sin^2 t)}{\sin^2 t} \, dt = \pi(\sqrt{1+x} - 1).$$

Exercice 116 [00131] [Correction]Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 n t^n f(t) \, dt.$$

(b) Déterminer la limite de

$$v_n = \int_0^1 n \ln(1+t^n) f(t) \, dt.$$

Exercice 117 [02865] [Correction]

Étudier la limite de la suite de terme général

$$I_n = n \int_0^1 \ln(1+t^n) \, dt.$$

Exercice 118 [02597] [Correction]Montrer que $g: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n} (n!)^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .En déduire que $h: t \mapsto g(t)e^{-t}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .Montrer que $\int_0^{+\infty} h(t) \, dt$ existe et calculer son intégrale.**Exercice 119** [04106] [Correction]On considère une série entière complexe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.On note f sa somme définie pour $|z| < R$ par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

- (a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur le disque $D(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$ si $0 < r < R$.
- (b) Soit r un réel tel que $0 < r < R$, montrer que la fonction

$$z \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))}{r - ze^{-i\theta}} \, d\theta$$

est développable en série entière et exprimer la somme de cette série entière en fonction de $f(z)$ et de $f(0)$.

- (c) Déterminer les fonctions f , développables en série entière sur $D(0, R)$, et qui ne prennent que des valeurs réelles sur un ensemble de la forme $\{z \in \mathbb{C}, |z| = r\}$ pour $0 < r < R$.

Exercice 120 [04941] [Correction](a) Montrer que, pour tout $a \in]0; 1[$, l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \, dx.$$

(b) Justifier que, pour tout $a \in]0; 1[$,

$$\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \, dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}.$$

(c) En déduire la convergence et la valeur de

$$\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \, dx.$$

Applications variées des séries entières

Exercice 121 [02422] [Correction]

(a) Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}$$

avec m, n deux entiers non nuls.

(b) Déterminer deux polynômes U et V tels que

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1.$$

Exercice 122 [03074] [Correction]

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n.$$

On pose donc, pour t dans \mathbb{R} ,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

(b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x > r$, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $[0; +\infty[$ et exprimer cette intégrale sous forme de série entière en $1/x$.

Exercice 123 [00707] [Correction]

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

(a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n x^n \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Montrer que $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme dont la plus petite puissance de x est de degré $\geq N+1$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B^2 = I + A.$$

Exercice 124 [03932] [Correction]

(Formule de Chu-Vandermonde) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Établir

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Exercice 125 [04175] [Correction]

On note A l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{N} et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \{P \in A \mid P(2) = n\}.$$

(a) Montrer que A_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note u_n son cardinal.

Calculer u_0, u_1 et u_2 .

(b) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} = u_{2n-1} + u_n.$$

(c) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \sum_{k=0}^n u_k.$$

(d) Écrire un programme **Python** qui renvoie la liste des 100 premiers termes de la suite (u_n) .

(e) Quelle conjecture peut-on faire sur le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$? La démontrer !

Exercice 126 [04176] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On posera $B_0 = 1$.

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

(b) Écrire une fonction `Bell(n)` donnant la liste $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$

(c) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{B_n}{n!} x^n$ est strictement positif.

(d) Soit

$$f: x \in]-R; R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Déterminer une équation différentielle dont f est solution. Exprimer f et donner une expression de B_n .

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

- (a) $u_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| \rightarrow \frac{|z|}{3}$ donc $R = 3$.
- (b) $u_n(z) = z^n e^{-n^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n^2 u_n(z) \rightarrow 0$ donc $R = +\infty$.
- (c) $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^2 \rightarrow |z|^2$ donc $R = 1$.
- (d) $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} |z|^3 \rightarrow e |z|^3$ donc $R = e^{-1/3}$.

Exercice 2 : [énoncé]

- (a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = (n+1) |z| \rightarrow +\infty$$

donc $R = 0$.

- (b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \rightarrow 4 |z|$$

donc $R = 1/4$.

- (c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z| \rightarrow 27 |z|$$

donc $R = 1/27$.

- (d)

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n+1} \ln(n+1)} - e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \left(e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1 \right)$$

or $e^{\frac{1}{n} \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}$$

Par suite $R = 1$.

Exercice 3 : [énoncé]

- (a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

- (b) Posons $a_n = \sin n$.

(a_n) ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

- (c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.

(a_n) est bornée donc $R \geq 1$.

Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2} |z|^n \right)_{n \geq 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]

- (a) On a

$$\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$$

donc le rayon de convergence de la première série entière vaut 1.

Aussi

$$\sin(e^{-n}) \sim e^{-n}$$

donc le rayon de convergence de la deuxième série entière vaut e.

- (b) On sait qu'une série entière converge normalement sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence, mais en revanche elle ne converge pas normalement sur ce disque. La série entière $\sum z^n$ est un contre-exemple car

$$R = 1 \text{ et } \|z \mapsto z^n\|_{\infty, D(0,1)} = 1.$$

Exercice 5 : [énoncé]

La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son terme général est donné par

$$a_n = \alpha + n(\beta - \alpha).$$

Si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ alors $R = 1$.

Si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ alors $R = +\infty$.

Exercice 6 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$. Après calculs

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi x^2$$

donc $R = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 7 : [énoncé]

La suite (a_n) est bornée mais ne tend pas vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).

Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n .

En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend pas vers 0.

On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.

On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même pour $x = -1$.

On conclut que l'intervalle cherché est

$$]-1; 1[.$$

Exercice 8 : [énoncé]

Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Étudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geq 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 9 : [énoncé]

$d(n) \rightarrow 0$ donc $R_d \leq 1$ $d(n) \leq n$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} n z^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geq 1$. On peut conclure $R_d = 1$.

De même, en exploitant $s(n) \rightarrow 0$ et

$$s(n) \leq 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

on a $R_s = 1$.

Exercice 10 : [énoncé]

Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n\pi\alpha) \neq 0.$$

(a) Puisque

$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geq 1$$

la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leq 1$.

(b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n-1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

(c) On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_k}$$

et puisque la suite (u_n) est croissante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{K}{u_{n+1}}$$

avec

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}.$$

On en déduit

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{K\pi u_n}{u_{n+1}} = \frac{K\pi}{u_n^{u_n-1}}.$$

(d) Considérons $m = u_n \in \mathbb{N}^*$. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a pour $x > 0$

$$\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \rightarrow -\infty.$$

En effet

$$m\alpha = u_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} + u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}.$$

Or

$$u_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^n \frac{u_n}{u_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_{k+1}}{u_k} \in 1 + 2\mathbb{N}$$

et donc

$$-\sin(m\pi\alpha) = \sin\left(\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}\right)$$

d'où

$$0 \leq -\sin(m\pi\alpha) \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$

puis

$$-\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \geq C \frac{(xu_n)^{u_n}}{u_n} \rightarrow +\infty.$$

On en déduit que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge pour tout $x > 0$ et donc $R_\alpha = 0$.

(e) Par l'absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $qu_n\alpha \in \mathbb{N}$ or

$$qu_n\alpha = qu_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} + qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

avec comme vu ci-dessus

$$u_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}.$$

On en déduit

$$qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}.$$

Or

$$0 < qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} < \frac{qKu_n}{u_{n+1}} \rightarrow 0.$$

C'est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]

Par la convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ on a déjà $R \geq |z_0|$. Si $R > |z_0|$ alors il y a absolue convergence en z_0 ce qui est exclu par hypothèse. On conclut $R = |z_0|$.

Exercice 12 : [énoncé]

Pour $z \neq 0$, on observe que $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \rightarrow \ell |z|$. Or il est connu que pour $\sum u_n$ série à termes positifs, si $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow m \in [0; 1[$ alors la série converge et si $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow m > 1$ alors la série diverge (ce résultat s'obtient par comparaison avec une suite géométrique).

Si $\ell = 0$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \rightarrow 0$ donc $\sum a_n z^n$ converge en z et donc $R = +\infty$.

Si $\ell \in]0; +\infty[$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/\ell$, $\sum a_n z^n$ converge tandis que pour $|z| > 1/\ell$, $\sum a_n z^n$ diverge. On en déduit $R = 1/\ell$
Si $\ell = +\infty$ alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Exercice 13 : [énoncé]

Posons $b_n = n^\alpha a_n$ et comparons R_a et R_b .

Cas $\alpha = 0$: ok

Cas $\alpha > 0$: on a $a_n = o(b_n)$ et donc

$$R_a \geq R_b.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$, en considérant, $\rho \in]|z|; R_a[$, on peut écrire

$$b_n z^n = n^\alpha a_n z^n = a_n \rho^n \times n^\alpha \frac{z^n}{\rho^n} = o(a_n \rho^n).$$

Puisque $\sum a_n \rho^n$ converge absolument, la série $\sum b_n z^n$ converge et donc $R_b \geq |z|$. Or ceci pour tout z tel que $|z| < R_a$ donc

$$R_b \geq R_a.$$

Finalement

$$R_a = R_b.$$

Cas $\alpha < 0$: on écrit $a_n = n^{-\alpha} b_n$ et on exploite ce qui précède.

Exercice 14 : [énoncé]

Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.

Pour $|z| < \sqrt{R}$, $|z^2| < R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.

Pour $|z| > \sqrt{R}$, $|z^2| > R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.

On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Exercice 15 : [énoncé]

Montrons par double inégalité que le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$ vaut

$$R' = R^2.$$

Soit $|z| < R$.

Puisque la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, on a $a_n z^n \rightarrow 0$ et donc $a_n^2 z^{2n} \rightarrow 0$.

Or pour $|z| > R'$, on sait que la suite $(a_n^2 z^{2n})$ n'est pas bornée. On en déduit $|z|^2 \leq R'$ et donc

$$R \leq \sqrt{R'}$$

Soit $|z| < \sqrt{R'}$.

On a $|z|^2 < R'$ et donc $|a_n^2 z^{2n}| \rightarrow 0$ puis $|a_n z^n| \rightarrow 0$. On en déduit $|z| \leq R$ et donc

$$\sqrt{R'} \leq R.$$

Exercice 16 : [énoncé]

Soit $r \in]0; R[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n = o(a_n r^n)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Pour $r \in]0; R[$, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge donc $a_n r^n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang N , on a

$$|a_n| r^n \leq 1.$$

(b) On a alors

$$\frac{a_n z^n}{n!} = O\left(\frac{z^n}{r^n n!}\right).$$

Posons

$$u_n(z) = \frac{z^n}{r^n n!}.$$

Pour $z \neq 0$, on a

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.

Par comparaison, la série numérique $\sum a_n z^n / n!$ converge aussi absolument.

On peut donc la série entière $\sum a_n z^n / n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

(c) On a

$$|S_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^N |a_k| + \frac{n-N}{r^n}$$

et donc $S_n = O(n/r^n)$ puis

$$\frac{S_n z^n}{n!} = O\left(\frac{z^n}{r^n (n-1)!}\right).$$

Comme ci-dessus, la série entière $\sum S_n z^n / n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 18 : [énoncé]

Notons R et R' les deux rayons de convergence de séries entières introduites.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge et donc $a_n z^n \rightarrow 0$. On en déduit que

$$\left| \frac{1}{a_n z^n} \right| \rightarrow +\infty$$

et donc $|1/z| > R'$ d'où $|z| < 1/R'$. On en déduit $R \leq 1/R'$ puis

$$RR' \leq 1.$$

On ne peut affirmer mieux puisque, pour

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient $RR' = 1/2$.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) On a $|b_n| \leq |a_n|$ donc $R' \geq R$. On a $|b_n| \leq 1$ donc $R' \geq 1$

(b) Si $R' > 1$ alors $b_n \rightarrow 0$ et puisque $|b_n| = \frac{|a_n|}{1+|a_n|}$ donne $|a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|}$, on obtient $a_n = O(|b_n|)$ donc $R \geq R'$.

Par suite $R = R'$ d'où $R' = \max(1, R)$.

(c) Si $R' = 1$ alors $1 \geq R$ et $R' = \max(1, R)$.

Exercice 20 : [énoncé]

Par sommation de séries entière, on sait déjà $R \geq \min(R_a, R_b)$
 De plus, puisque $a_n b_n = 0$ on peut affirmer $|a_n| \leq |a_n + b_n|$ et donc $R \leq R_a$ et de même $R \leq R_b$ et donc $R \leq \min(R_a, R_b)$ puis $R = \min(R_a, R_b)$.

Exercice 21 : [énoncé]

- (a) Pour $t > 1$, $e^{-t^n} \rightarrow 0$ avec $0 \leq e^{-t^n} \leq e^{-t}$. Par convergence dominée $I_n \rightarrow 0$.
- (b) Par le changement de variable $u = t^n$ qui est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme,

$$I_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} e^{-u} du.$$

Par convergence dominée,

$$\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} e^{-u} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

donc

$$I_n \sim \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

- (c) Par l'équivalent précédent $R = 1$ et la série entière diverge en 1. Par application du critère spécial des séries alternées, la série entière converge en -1 .

Exercice 22 : [énoncé]

- (a) Par intégration par parties

$$I(p, q) = \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1)$$

puis

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

- (b)

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ et } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \rightarrow \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge.

- (c) Par le calcul ci-dessus $R = 4$ donc $] -4; 4[\subset \mathcal{D} \subset [-4; 4]$.
 Par la formule de Stirling :

$$u_n \sim \frac{2\pi n^{2n+1}}{e^{2n}} \frac{e^{2n+1}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{(2n+1)}} = \frac{\sqrt{2\pi}e}{\sqrt{2n+1}} \frac{1}{2^{2n+1}} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1}$$

et

$$\left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1} = \exp\left((2n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \right) \rightarrow \frac{1}{e}$$

donc

$$u_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\sqrt{n}}$$

$4^n u_n \sim \sqrt{\pi}/2\sqrt{n}$ et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum 4^n u_n$ diverge. $4 \notin \mathcal{D}$.

$v_n = (-4)^n u_n$, (v_n) est alternée, $|v_n| \rightarrow 0$ et

$$\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$$

donc $(|v_n|)$ est décroissante.

Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum v_n$ converge et donc $-4 \in \mathcal{D}$. Finalement $\mathcal{D} = [-4; 4[$.

Exercice 23 : [énoncé]

- (a) $R = 1$.
- (b) Pour $x \in]-1; 1[$, on a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^{n+1}.$$

Après décalage d'indice et réunion des deux sommes

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\ln(n+1) - \ln(n)) x^{n+1}$$

ce qui conduit à la relation demandée.

- (c) Posons

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

À l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ ce qui assure que sa somme est continue. On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right).$$

(d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{2k} \right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} \right) = \ln \left(\frac{1}{2n+1} \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \right)^2 \right).$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur \mathbb{R}_+^* et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Puisque $a_0 > 0$, la suite récurrente (a_n) est bien définie et à termes dans \mathbb{R}_+^* . Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on peut affirmer que la suite (a_n) est décroissante. Or elle est minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. En passant la relation $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ à la limite, on obtient $\ell = \ln(1+\ell)$ ce qui entraîne $\ell = 0$ (car $\ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$). Finalement $a_n \rightarrow 0^+$.

(b) On a alors

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_n} \rightarrow 1$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

(c) Pour $x = -1$, la série numérique

$$\sum a_n (-1)^n$$

converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.

Pour $x = 1$, déterminons la nature de la série numérique $\sum a_n$

On a

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n (a_n + o(a_n))} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$a_n \sim \frac{2}{n}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Pour $x \neq 0$, posons $u_n = x^n / \sqrt{n} \neq 0$. On a $|u_{n+1}/u_n| \rightarrow |x|$ donc $R = 1$.

(b) En $x = 1$, f n'est pas définie car il y a divergence de la série de Riemann $\sum 1/\sqrt{n}$.

En $x = -1$, f est définie car il y a convergence de la série alternée $\sum (-1)^n / \sqrt{n}$ satisfaisant le critère spécial.

(c) Posons $u_n(x) = x^n / \sqrt{n}$ pour $x \in [-1; 0]$.

Chaque fonction u_n est continue et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[-1; 0]$ en vertu du critère spécial des séries alternées. On a de plus

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$$

et il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-1; 0]$. On en déduit que sa somme est continue sur $[-1; 0]$ et donc f est notamment continue en -1 .

(d) Pour tout $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} \leq n$ donc pour tout $x \in [0; 1[$

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

Donc f tend vers $+\infty$ en 1^- .

Exercice 26 : [énoncé]

- (a) s est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
 La série diverge en $x = 1$ (par série de Riemann avec $1/2 \leq 1$) et converge en $x = -1$ par application du critère spécial des séries alternées. On conclut $I =]-1; 1[$.
- (b) Puisque s est la somme d'une série entière, on peut dériver terme à terme sur $]-1; 1[$ et

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n.$$

Sur $I \cap \mathbb{R}_+$, cette somme est positive. La fonction s est donc croissante sur $[0; 1[$.

Si celle-ci était majorée par un réel M , nous aurions pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in [0; 1[, \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leq M.$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \leq M.$$

Ceci est absurde car la série à termes positifs $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge et ne peut donc avoir ses sommes partielles majorées. La fonction s est donc croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$ en 1^- .

- (c) Pour $x \in]-1; 1[$

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n.$$

Pour $x \leq 0$, on peut écrire $x = -t$ avec $t \geq 0$ et alors

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n$$

avec $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$. On vérifie que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et donc le critère spécial s'applique à la série alternée $\sum (-1)^n a_n t^n$. Sa somme est donc du signe de son premier terme ce qui fournit $(1-x)s'(x) \geq 0$. On en déduit

$$\forall x \in]-1; 0], s'(x) \geq 0.$$

- (d) Après étude (un peu lourde) du signe de $f''(x)$, on peut affirmer que f est concave et croissante.

Pour $x \in [0; 1[$, on a clairement $s''(x) \geq 0$. Pour $x \in]-1; 0]$, considérons

$$((1-x)s'(x))' = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)x^n$$

puis

$$(1-x)((1-x)s'(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} (f(n+1) - f(n))x^n.$$

Posons $b_n = f(n+1) - f(n) \geq 0$.

On vérifie $b_n \rightarrow 0$ et $b_{n+1} \leq b_n$ car la concavité de f fournit

$$\frac{b_n + b_{n+2}}{2} \leq b_{n+1}.$$

Le critère spécial de série alternée s'applique à nouveau, la somme est du signe de son premier terme et cela fournit

$$(1-x)((1-x)s'(x))' \geq 0$$

puis $s''(x) \geq 0$ car on sait $s'(x) \geq 0$.

Finalement s est convexe.

Exercice 27 : [énoncé]

- (a) Posons

$$a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$, on peut affirmer $R = 1$.

- (b) La suite (a_n) décroît vers 0 donc par le critère spécial des séries alternée, la série entière converge en $x = -1$.

Puisque $a_n \sim 1/\sqrt{n}$, par équivalence de séries à termes positifs, la série entière diverge en $x = 1$.

- (c) Par positivité des termes sommés, on a pour $x \in [0; 1]$,

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n.$$

Or

$$\sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

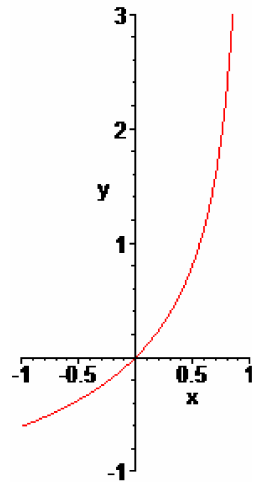


FIGURE 1 – Allure de la fonction s

Puisque

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq M + 1$$

et pour x au voisinage de 1^-

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M$$

puis

$$f(x) \geq M.$$

On peut donc affirmer que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

(d) On a

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^{n+1}$$

et par décalage d'indice

$$(1-x)f(x) = \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) x^n.$$

Puisque

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

la série entière en second membre est définie et continue en 1 par convergence normale de la série de fonctions associée. On en déduit

$$(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) = 0.$$

Il est aussi possible de procéder par les ε exploitant

$$\left| \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 28 : [énoncé](#)

Les rayons de convergences des séries entières définissant c et s sont infinis et on reconnaît

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = \cos x \text{ et } s(x) = \sin x$$

de sorte qu'on a déjà

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x)^2 + s(x)^2 = 1.$$

Par opérations sur les séries entières, on sait qu'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et l'on peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développable en série entière

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0$$

donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = 1.$$

Exercice 29 : [énoncé]

- (a) $\frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z^n + (-1)^n z^n) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} z^{2p}.$
- (b) $\frac{1}{3}(f(z) + f(jz) + f(j^2z)) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(1 + j^n + j^{2n})z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p} z^{3p}.$

Exercice 30 : [énoncé]

- (a) $a_n = O(1)$ donc $R \geq 1$. La suite (a_n) ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ et ainsi $R = 1$.
- (b) En réorganisant les termes sommés

$$\sum_{k=0}^{nT-1} a_k x^k = \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{p=0}^{n-1} a_{pT+k} x^{pT+k} = \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k \frac{1 - x^{nT}}{1 - x^T}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1 - x^T} \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k.$$

Exercice 31 : [énoncé]

Puisque $S_n \rightarrow +\infty$, on a $R_a \leq 1$.
 Comme $a_n \leq S_n$, on a aussi $R_a \geq R_s$.
 Enfin $S_n/S_{n+1} = 1 - a_{n+1}/S_{n+1} \rightarrow 1$ permet par la règle de d'Alembert d'obtenir $R_s = 1$.
 On conclut $R_a = R_s = 1$.
 Pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exercice 32 : [énoncé]

On a $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = 0$ compte tenu de l'hypothèse. On peut conclure que $S = 0$.

Exercice 33 : [énoncé]

- (a) Pour $0 < r < R$, il y a absolue convergence de $\sum a_n r^n$. On a

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n.$$

Puisque $\sum |a_n r^n|$ et $\sum |\overline{a_n} r^n|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum \sum_{k=0}^n |a_k| |\overline{a_{n-k}}| r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n d\theta.$$

Or $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta} d\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ donc, après simplification des termes nuls,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}.$$

- (b) Pour $0 < r < R$ suffisamment petit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 - |f(0)|^2 d\theta.$$

Par intégration, d'une fonction négative, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0.$$

La fonction f est alors constante.

- (c) Posons

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

Pour tout $r > 0$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Pour $p \geq N + 1$, on obtient

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta.$$

Or

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta \leq 2\pi \frac{(P(r))^2 + (\sum_{n=0}^N |a_n| r^n)^2}{r^{2p}} = \frac{O(r^{2N})}{r^{2p}}$$

donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour $p = N + 1$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = |a_{N+1}|^2 + \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2(n-N-1)}$$

avec

$$0 \leq \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2(n-N-1)} \leq \frac{1}{r^2} \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit $a_{N+1} = 0$ puis, en reprenant la démarche avec $p = N + 2, \dots$, on obtient successivement $a_{N+2} = 0, \dots$ et finalement $f = f_N \in \mathbb{C}_N[X]$

Exercice 34 : [énoncé]

Notons $\sum a_n z^n$ la série entière dont la somme est égale à f sur B° .

La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall z, z' \in B, |z - z'| \leq \delta \implies |f(z) - f(z')| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors $r = 1 - \delta$ et $g_r : z \mapsto f(rz)$.

Pour tout $z \in B, |z - rz| = \delta |z| \leq \delta$ donc $|f(z) - g_r(z)| \leq \varepsilon$. Ainsi $\|f - g\|_{\infty, B} \leq \varepsilon$

Puisque la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans B° , la série entière $\sum a_n r^n z^n$ converge uniformément vers g sur B . Il existe donc un polynôme P vérifiant $\|P - g\|_{\infty, B} \leq \varepsilon$ puis $\|f - P\|_{\infty, B} \leq 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) $\alpha_n = \ln n \neq 0$ pour $n \geq 2$.

$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \rightarrow 1$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln(n)x^n$ vaut 1.

De plus, la série entière est grossièrement divergente en 1 et -1.

On en déduit $I =]-1; 1[$.

(b) $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$ donc $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

De plus, la série entière est absolument convergente en 1 et -1.

La fonction g est donc définie sur l'intervalle $[-1; 1]$.

(c) Pour $n \geq 2, a_n = \ln n - \ln(n-1) - 1/n$ donc

$$a_n x^n = \ln(n)x^n - \ln(n-1)x^n - \frac{1}{n}x^n.$$

En sommant pour n allant de 2 à $+\infty$,

$$g(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x).$$

(d) Puisque $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum |a_n|$ est convergente et donc la fonction g est définie et continue sur le segment $[-1; 1]$. Par suite, la fonction g converge en 1^- et puisque le terme $\ln(1-x)$ diverge quand $x \rightarrow 1^-$, on obtient

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

(e) Puisque

$$f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$$

on obtient quand $x \rightarrow -1^+$,

$$f(x) \rightarrow \frac{g(-1) - \ln(2)}{2}.$$

Il reste à calculer $g(-1) \dots$

$$g(-1) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\ln n - \ln(n-1)) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Or

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

et en regroupant les termes pairs et impairs consécutifs

$$\sum_{n=2}^{2N+1} (-1)^n (\ln n - \ln(n-1)) = \sum_{p=1}^N 2 \ln \left(\frac{2p}{2p-1} \right) - \ln(2N+1) = \ln \frac{2^{4N} (N!)^4}{(2N+1)! (2N)!} \rightarrow \ln \frac{\pi}{2}$$

en vertu de la formule de Stirling.

Finalement

$$g(-1) = \ln \frac{\pi}{2} + \ln(2).$$

On en déduit

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 36 : [énoncé]

Commençons par noter que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et est donc définie sur $] -1 ; 1[$. Pour $x \in [0 ; 1[$, la fonction $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$ est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} x^{t^2} dt \leq x^{n^2} \leq \int_{n-1}^n x^{t^2} dt.$$

En sommant

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x} dt \text{ avec } \ln x < 0.$$

Posons le changement de variable $u = t\sqrt{|\ln x|}$

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x} dt = \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Or $\ln x \sim x - 1$ quand $x \rightarrow 1$ donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Exercice 37 : [énoncé]

(a) On sait que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence R (notamment car une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence). Puisque $a_n = o(a_n \ln n)$ et $a_n \ln n = o(n a_n)$ on peut affirmer par encadrement que la série entière $\sum (a_n \ln n) x^n$ a aussi pour rayon de convergence R . De plus

$$a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim a_n \ln n$$

donc la série entière $\sum \left(a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$ a encore pour rayon de convergence R .

(b) Notons que $\sum \ln n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. On sait

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc le terme générale

$$\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

est borné par un certain M .

Par suite

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M x^n = \frac{Mx}{1-x} = O\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

quand $x \rightarrow 1^-$.

Or par produit de Cauchy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 38 : [énoncé]

$R = 1$, il y a divergence en $x = 1$ et convergence par le CSSA en $x = -1$. La fonction somme est définie sur $] -1 ; 1[$.

Par application du critère spécial des séries alternées sur $[-1; 0]$,

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) x^k \right\|_{\infty, [-1; 0]} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \rightarrow 0$$

il y a donc convergence uniforme sur $[-1; 0]$ et donc continuité de la somme en -1 puis finalement sur $[-1; 1[$.

Pour étudier la fonction en 1^- , on peut exploiter l'encadrement

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit pour $x \in [0; 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 39 : [\[énoncé\]](#)

- (a) f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
Puisque $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$, la série n'est pas définie pour $x = 1$. En revanche, on vérifie aisément la convergence de la série en $x = -1$ en vertu du critère spécial des séries alternées. Finalement f est définie sur $[-1; 1[$.
- (b) Calculons la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) (-1)^n = \sum_{p=1}^N \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) = \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{(2^N N!)^4}\right).$$

Par la formule de Stirling

$$f(1) = \ln \frac{2}{\pi}.$$

Par le changement de variable $u = 1/x$ \mathcal{C}^1 bijectif, on ne modifie par la nature de l'intégrale et on a

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(u)}}{u} du.$$

Puisque

$$\left| \int_{E(x)}^x \frac{(-1)^{E(u)}}{u} du \right| \leq \int_{E(x)}^x \frac{du}{u} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

la nature de l'intégrale et sa valeur sont données par la limite de

$$\int_1^{n+1} \frac{(-1)^{E(u)}}{u} du = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{(-1)^k}{u} du = \sum_{k=1}^n (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

On peut conclure

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} dx = \ln \frac{2}{\pi}.$$

(c) On peut écrire

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^n \varepsilon_n x^n.$$

D'une part

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\rightarrow} +\infty$$

et d'autre part

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n| < +\infty.$$

On peut donc conclure

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 40 : [\[énoncé\]](#)

Notons que l'intégrale définissant a_n converge car $|\operatorname{th} t| \leq 1$.

(a) Pour $t \geq n$,

$$\frac{\text{th } n}{t^2} \leq \frac{\text{th } t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

En intégrant et en exploitant $\text{th } n \rightarrow 1$, on obtient $a_n \sim \frac{1}{n}$.

On en déduit que $R = 1$. Pour $x = -1$, $\sum a_n x^n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.

Pour $x = 1$, $\sum a_n x^n$ diverge par l'équivalent précédent. La fonction somme est définie sur $[-1; 1[$.

(b) Pour $x \in [-1; 0]$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série $\sum a_n x^n$ et affirmer

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série. Par suite la fonction somme est continue en -1 .

(c) On a

$$\left| a_n - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1 - \text{th } n}{n}$$

donc pour $x \in [0; 1[$,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \text{th } n}{n} x^n.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \rightarrow +\infty \text{ et } n^2 \frac{1 - \text{th } n}{n} \sim 2ne^{-2n} \rightarrow 0$$

donc $\sum \frac{1 - \text{th } n}{n}$ est absolument convergente et la somme de la série entière $\sum \frac{1 - \text{th } n}{n} x^n$ est définie et continue en 1. On en déduit

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \leq M$ pour tout $x \in [0; 1[$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n \leq S(x) \leq M.$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^N a_n \leq M.$$

La série à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.

(b) La fonction S est croissante sur $[0; 1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right).$$

De plus, cette valeur majore S sur $[0; 1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M , on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right).$$

Inversement, pour tout $x \in [0; 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc à la limite quand $x \rightarrow 1^-$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \leq M$ pour tout $x \in [0; 1[$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n \leq S(x) \leq M.$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^N a_n \leq M.$$

La série à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.

- (b) La fonction S est croissante sur $[0; 1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x).$$

De plus, cette valeur majore S sur $[0; 1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M , on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x).$$

Inversement, pour tout $x \in [0; 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc à la limite quand $x \rightarrow 1^-$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 43 : [\[énoncé\]](#)

La fonction f est évidemment définie en 1. Pour étudier sa continuité, introduisons

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

On peut écrire pour $x \in [0; 1[$ et $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (R_{k-1} - R_k) x^k.$$

Puisque $|x| < 1$ et $R_n \rightarrow 0$, on peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k$$

avec convergence des deux sommes introduites.

Par décalage d'indice, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k (x - 1) + R_n x^{n+1}$$

et ainsi

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + (x - 1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n (x^{n+1} - 1).$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $R_n \rightarrow 0$, pour n assez grand on a

$$\forall k \geq n, |R_k| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left| (x - 1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k \right| \leq (1 - x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon x^k \leq \varepsilon.$$

Pour un tel n fixé, on a quand $x \rightarrow 1^-$,

$$\sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) \rightarrow 0 \text{ et } R_n (x^{n+1} - 1) \rightarrow 0$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) \right| \leq \varepsilon \text{ et } |R_n (x^{n+1} - 1)| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| \leq 3\varepsilon.$$

Exercice 44 : [\[énoncé\]](#)

- (a) Pour $a_n = (-1)^n$, on a $f(x) = 1/(1+x)$, $\ell = 1/2$ et la série $\sum a_n$ diverge.
 (b) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1[$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^N a_n - \ell = A_N + B_N - C_N$$

avec

$$A_N = f(x) - \ell, B_N = \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^N a_n x^n \text{ et } C_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 au-delà duquel

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

et alors pour tout $N \geq n_0$

$$|C_N| \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

Posons alors

$$x = 1 - \frac{1}{N}$$

et on a

$$|C_N| \leq \varepsilon.$$

D'autre part

$$|B_N| = \left| \sum_{n=0}^N a_n(1-x^n) \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^N na_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N na_n.$$

En vertu du théorème de Cesaro

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N na_n \rightarrow 0$$

et donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq n_1$

$$|B_N| \leq \varepsilon.$$

Enfin, puis f tend vers ℓ en 1^- , il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq n_2$

$$A_N = |f(1 - 1/N) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour $N \geq \max(n_0, n_1, n_2)$

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - \ell \right| \leq 3\varepsilon.$$

On peut donc affirmer que la série $\sum a_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell.$$

Exercice 45 : [énoncé]

- (a) On peut écrire $a_n = b_n \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \varepsilon_n x^n.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$. On peut alors écrire

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} b_n \varepsilon_n x^n \right| \leq \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \leq \varepsilon g(x)$$

puis

$$|f(x)| \leq \varepsilon g(x) + \left| \sum_{n=0}^{N-1} b_n \varepsilon_n x^n \right|.$$

Quand $x \rightarrow R^-$,

$$g(x) \rightarrow +\infty \text{ et } \sum_{n=0}^{N-1} b_n \varepsilon_n x^n \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} b_n \varepsilon_n R^n = C^{te}$$

donc pour x assez proche de R

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} b_n \varepsilon_n R^n \right| \leq \varepsilon g(x)$$

puis

$$|f(x)| \leq 2\varepsilon g(x).$$

Cela permet de conclure que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \rightarrow R$.

(b) Si $a_n \sim b_n$ alors $a_n = b_n + o(b_n)$ donc $f(x) = g(x) + o(g(x)) \sim g(x)$ en vertu de a).

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Notons a_n le coefficient générale de la série entière étudiée $a_m = 1$ s'il existe n tel que $m = p_n$ et $a_m = 0$ sinon. On observe $a_n = O(1)$ donc $R \geq 1$ et $a_n \not\rightarrow 0$ donc $R \leq 1$ puis $R = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $n \leq \varepsilon p_n$. On a alors :

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} + (1-x) \sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon}.$$

Quand $x \rightarrow 1^-$,

$$(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} \rightarrow 0$$

et

$$(1-x) \sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon} \leq \frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} \rightarrow \varepsilon$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq 2\varepsilon.$$

Cela permet d'affirmer $(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.

(b) Ici, il faut penser à une comparaison série-intégrale...
Pour $x \in]0; 1[$, la fonction $t \mapsto x^{t^q}$ est décroissante. Par la démarche classique, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^q} dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^q \ln x} dt = \int_0^{+\infty} e^{-a^q t^q} dt$$

avec $a = \sqrt[q]{-\ln x}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-u^q} du$$

et on ne calculera pas cette dernière intégrale.

Par l'encadrement qui précède, on peut affirmer

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[q]{1-x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^q} du$$

sachant $\ln x \sim x - 1$

Exercice 47 : [énoncé]

(a) $R = 1$.

(b) $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

On obtient les expressions de f_2, \dots, f_5 par `seq(normal(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)), k=2..5)`;
On peut présumer un équivalent de la forme $\frac{C_\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

On peut obtenir les premières valeurs de C_α par `seq(eval(simplify(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)*(1-x)^(k+1)), x=1), k=0..5)`;

Cela laisse présumer $C_\alpha = (-1)^{\alpha+1} \alpha!$.

Pour $x \in]-1; 1[$, $f'_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1} x^{n-1}$ donc $x f'_p(x) = f_{p+1}(x)$.

En raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite (Q_p) de polynômes de sorte que

$$Q_0 = X \text{ et } Q_{p+1}(X) = X(1-X)Q'_p(X) + (p+1)XQ_p(X).$$

On observe $Q_{p+1}(1) = (p+1)Q_p(1)$ de sorte que $Q_p(1) = p!$.

On peut alors affirmer $f_p(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{1+p}}$.

(c) À partir du développement connu de $(1+u)^\alpha$, on obtient

$$b_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}.$$

$\ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n} = \alpha \ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série

$\sum \ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n}$ est absolument convergente.

On en déduit que la suite de terme général $\ln \frac{n^\alpha}{b_n}$ converge puis que $\frac{n^\alpha}{b_n}$ tend vers une constante $A(\alpha) > 0$.

On peut alors conclure en exploitant le résultat suivant :

$a_n \sim b_n$ avec $a_n > 0$, $R = 1$ et $\sum a_n$ diverge entraîne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Pour établir ce résultat :

- d'une part, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$,

- d'autre part, on écrit

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^N |a_n - b_n| + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ en choisissant } N$$

de sorte que $|a_n - b_n| \leq \varepsilon a_n$ pour $n \geq N$.

On peut alors conclure que $f_\alpha(x) \sim \frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

Exercice 48 : [énoncé]

- (a) Par application de la règles de d'Alembert, les rayons de convergence de séries entières définissant f et g sont égaux à 1.
- (b) g est assurément définie et continue sur $] -1; 1[$ en tant que somme de série entière.

La série entière définissant g converge aussi sur $[-1; 0]$ par application du critère spécial et

$$\forall x \in [-1; 0] \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) x^k \right| \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions continues définissant g sur $[-1; 0]$.

Ainsi g est définie et continue sur $[-1; 1]$.

On peut aussi souligner que g n'est pas définie en 1 car

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) 1^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

- (c) Pour $x \in] -1; 1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n - \ln(n-1))x^n = -g(x).$$

- (d) La fonction f est continue sur $] -1; 1[$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence 1. On peut prolonger f par continuité en -1 via

$$f(x) = -\frac{g(x)}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow -1} -\frac{g(-1)}{2}.$$

- (e) On a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc pour $x \in] -1; 1[$

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} -\frac{1}{n}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n$$

et donc

$$g(x) = \ln(1-x) + 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n.$$

Le terme sommatoire définit une fonction continue sur $[-1; 1]$ (par convergence normale) et donc

$$g(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \ln(1-x)$$

puis

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 49 : [énoncé]

Pour $x \in [0; R[$, la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ est une série à termes positifs. Par la formule de Taylor reste intégrale

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

et puisque le reste intégrale est positif, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x).$$

Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ est convergente.

Pour $x \in] -R; 0]$, on a

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} |x|^n$$

et la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 50 : [énoncé]

Pour tout $x \in] -a; a[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Posons

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Par le changement de variable $t = xu$, on peut écrire

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du.$$

Choisissons y tel que $|x| < y < a$. Puisque $f^{(n+1)}$ est croissante, on a

$$\forall u \in [0; 1], f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(yu)$$

et donc

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(yu) du \leq |x/y|^{n+1} R_n(y).$$

De plus $R_n(y) \leq f(y)$ car les termes de la somme partielle de Taylor en y sont tous positifs et donc

$$|R_n(x)| \leq |x/y|^{n+1} f(y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement f est aussi égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $] -a; a[$.

Exercice 51 : [énoncé]

Pour tout a et $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Pour $x \geq a$, la série numérique de terme général $\frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ est une série majorée par $f(x)$ et à termes positifs, elle est donc convergente ce qui assure

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour $x \leq 0$,

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(0) dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

en exploitant la remarque initiale avec 0 et $-x$ pour a et x .

Pour $x \geq 0$,

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \rightarrow 0$$

en exploitant la remarque initiale avec x et $2x$ pour a et x .

Finalement f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur \mathbb{R} .

Exercice 52 : [énoncé]

On a

$$(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$$

donc pour $x \in]-1; 1[$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x}} = (1-x^3)^{1/2} (1-x)^{-1/2}$$

est développable en série entière sur $] -1; 1[$ par produit de fonctions qui le sont.

Exercice 53 : [énoncé]

Posons

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x}.$$

La fonction f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty; R[$ avec $R = \operatorname{argsh} 1$.

Soit $x \in]-R; R[$. Puisque $|\operatorname{sh} x| < 1$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}^n x.$$

Chacune des fonctions $x \mapsto \operatorname{sh}^n x$ est développable en série entière sur \mathbb{R} ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{sh}^n x = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k.$$

Puisque les coefficients du développement en série entière de la fonction sh sont tous positifs, on a aussi $a_{n,k} \geq 0$ pour tout n, k . Pour $x \in]-R; R[$, on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k \right).$$

Puisque la série $\sum_{k \geq n} |a_{n,k} x^k| = \sum_{k \geq n} a_{n,k} |x|^k$ converge et puisque la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=n}^{+\infty} |a_{n,k} x^k| = \sum_{n \geq 0} (\operatorname{sh} |x|)^n$ converge aussi, on peut par le théorème de Fubini échanger les deux sommes ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^k a_{n,k} \right) x^k.$$

Ainsi la fonction f est développable en série entière sur $] -R; R[$. Le rayon de convergence de la série entière ainsi introduite est alors au moins égale à R et en fait exactement égal à R car f diverge vers $+\infty$ en R^- et ne peut donc être prolongée par continuité en R .

Exercice 54 : [énoncé]

(a) Posons

$$u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\cos(2^n x)}{n!}.$$

Les fonctions u_n sont de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|u_n^{(k)}(x)| \leq \frac{2^{nk}}{n!}.$$

Puisque le majorant est le terme général de la série exponentielle en 2^k , il est sommable et il y a donc convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$.

On en déduit que la fonction f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

(b) Par l'étude qui précède

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0).$$

Si k est impair, $u_n^{(k)}(x)$ s'exprime en fonction de $\sin(2^n x)$ et donc $u_n^{(k)}(0) = 0$ puis $f^{(k)}(0) = 0$.

Si k est pair, on peut écrire $k = 2p$ et alors

$$u_n^{(2p)}(x) = (-1)^p 2^{2np} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$$

puis

$$f^{(2p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^{2np}}{n!} = (-1)^p e^{2^{2p}}.$$

La série de Taylor de f en 0 est alors

$$\sum (-1)^p \frac{e^{2^{2p}}}{(2p)!} x^{2p}.$$

Pour $x \neq 0$, posons

$$u_p(x) = (-1)^p \frac{e^{2^{2p}}}{(2p)!} x^{2p} \neq 0.$$

On a

$$\left| \frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)} \right| = \frac{e^{3 \cdot 2^{2p}} x^2}{(2p+1)(2p+2)} \rightarrow +\infty.$$

Le rayon de convergence de la série de Taylor étudiée est donc nul.

Exercice 55 : [énoncé]

(a) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{a_n}{n-t} \right| \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{(n-t)^2} \right)$$

donc $\sum \frac{a_n}{n-t}$ est absolument convergente. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

(b) Pour $|t| < 1$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1-t/n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_n t^m}{n^{m+1}}.$$

Puisque la série $\sum_{m \geq 0} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}}$ converge pour tout $n \geq 1$ et puisque

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}} = \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n-|t|}$$

converge, peut appliquer le théorème de Fubini pour intervertir les deux sommes.

$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{m+1}} \right) t^m.$$

La fonction f apparaît alors comme développable en série entière sur $] -1; 1[$.

(c) Si $f(t) = 0$ sur $[-1/2; 1/2]$ alors le développement en série entière de f sur $] -1; 1[$ est nul et on en déduit que f est nulle sur $] -1; 1[$.

Or

$$f(t) = \frac{a_1}{1-t} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$$

avec $t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ définie et continue au voisinage de 1. On en déduit que $a_1 = 0$.

On peut alors reprendre l'étude du b) et, sachant $a_1 = 0$, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $] -2; 2[$. Or ce dernier développement étant nul, on obtient comme ci-dessus $a_2 = 0$ etc.

Au final, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est nulle.

Exercice 56 : [énoncé]

(a) $|\sin(a^n x)| \leq |x| |a^n|$, il y a donc convergence absolue de la série définissant $f(x)$.

(b) $f_n : x \mapsto \sin(a^n x)$ est \mathcal{C}^∞ et $\|f_n^{(k)}\|_\infty \leq |a|^{nk}$ terme général d'une série absolument convergente donc f est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^{nk} = \frac{1}{1 - |a|^k} \leq \frac{1}{1 - |a|}.$$

(c) Par la formule de Taylor-Laplace,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

avec

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{1}{1 - |a|} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Ainsi la série de Taylor de f converge sur \mathbb{R} vers f et donc f est développable en série entière.

Exercice 57 : [\[énoncé\]](#)

On peut écrire

$$\ln(1 - x^3) = \ln(1 - x) + \ln(1 + x + x^2)$$

donc sur $] -1; 1[$,

$$\ln(1 + x + x^2) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ si } n \neq 0 \text{ [3] et } a_{3n} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{3n} = -\frac{2}{3n}.$$

Exercice 58 : [\[énoncé\]](#)

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1 - ax)(1 - bx)} = \frac{a/(a-b)}{1 - ax} + \frac{b/(b-a)}{1 - bx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} x^n$$

avec $R = \min(1/a, 1/b)$.

On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n = \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (b^{2n+2} - 2a^{n+1}b^{n+1} + a^{2n+2}) x^n$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n = \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{b^2}{1 - b^2x} - \frac{2ab}{1 - abx} + \frac{a^2}{1 - a^2x} \right) = \frac{1 + abx}{(1 - a^2x)(1 - abx)(1 - b^2x)}.$$

Exercice 59 : [\[énoncé\]](#)

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1 - z \cos t}{1 - 2z \cos t + z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - (e^{it}z)} + \frac{1}{1 - (e^{-it}z)} \right)$$

donc

$$\frac{1 - z \cos t}{1 - 2z \cos t + z^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{int} + e^{-int}) z^n$$

puis

$$\frac{1 - z \cos t}{1 - 2z \cos t + z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) z^n.$$

Exercice 60 : [\[énoncé\]](#)

La fonction f est définie sur $] -1; 1[$ et

$$f(x) = \frac{(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+u)^\alpha$$

avec $u = -x^2 \in] -1; 1[$ et $\alpha = -1/2$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (x^{2n} + x^{2n+1}).$$

Exercice 61 : [énoncé]

On a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} \underset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{du}{1 + (ux)^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n} x^{2n} du.$$

Pour $|x| < 1$, il y a convergence normale sur $[0; 1]$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{\arctan x}{x}.$$

Exercice 62 : [énoncé]

(a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto e^{it}$ qui est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R} .

(b) La convergence de l'intégrale définissant F provient de la convergence supposée de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(itx)^k}{k!} f(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^n \frac{(itx)^k}{k!} \right) f(t) dt$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(itx)^k}{k!} f(t) dt = \sum_{k=0}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(it)^k f(t)}{k!} dt \right) x^k$$

et

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^n \frac{(itx)^k}{k!} \right) f(t) dt \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+1} |f(t)| dt \rightarrow 0$$

compte tenu des hypothèses.

On peut alors affirmer

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} f(t) dt \right) x^k$$

avec convergence sur \mathbb{R} de la série entière considérée.

Exercice 63 : [énoncé]

(a) On sait

$$\forall u \in]-1; 1[, \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} u^n$$

donc

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\theta) d\theta$$

avec

$$u_n(\theta) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n} \sin^{2n} \theta.$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0; \pi/2]$ et sa somme est continue par morceaux. Les fonctions u_n sont aussi intégrables sur $[0; \pi/2]$ et

$$\int_0^{\pi/2} |u_n(\theta)| d\theta = \int_0^{\pi/2} u_n(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 x^{2n}$$

car on sait calculer à l'aide d'une formule de récurrence obtenue par intégration par parties les intégrales de Wallis

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Par la formule de Stirling

$$\int_0^{\pi/2} |u_n(\theta)| d\theta \sim \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Ce terme est sommable et l'on peut donc procéder à une intégration terme à terme donnant la relation proposée.

(b) On a obtenu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \text{ avec } a_n \sim \frac{1}{2n}.$$

On peut écrire

$$a_n = \frac{1 + \varepsilon(n)}{2n} \text{ avec } \varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et avec convergence des sommes introduites

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} = a_0 - \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}.$$

Or

$$a_0 - \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) = a_0 - \frac{1}{2} \ln(1 + x) - \frac{1}{2} \ln(1 - x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1 - x)$$

et pour conclure il nous suffit d'établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o(\ln(1 - x)).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N, |\varepsilon(n)| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \ln(1 - x^2).$$

Le premier terme de la somme réalisant la majoration est polynomiale donc

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o(\ln(1 - x^2))$$

et donc, pour x suffisamment proche de 1,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \right| \leq \varepsilon \ln(1 - x^2).$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o(\ln(1 - x^2)) = o(\ln(1 - x^2)).$$

Finalement

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1 - x).$$

Exercice 64 : [\[énoncé\]](#)

(a) Si $x > -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x + e^t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable car

$$t^2/(x + e^t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Si $x = -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x + e^t)$ n'est pas définie en 0 et

$$\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}.$$

La fonction n'est donc pas intégrable et, puisque elle est positive, son intégrale diverge.

Si $x < -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x + e^t)$ n'est pas définie en $t_0 = \ln(-x) \in]0; +\infty[$. Par dérivabilité en t_0 , on obtient

$$\frac{1}{e^t + x} = \frac{1}{e^t - e^{t_0}} \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} \frac{1}{(t - t_0)e^{t_0}}$$

et encore une fois l'intégrale diverge.

(b) Pour $x = 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Pour $x \neq 0$, posons le changement de variable $u = e^t$ qui définit une bijection de classe \mathcal{C}^1

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(x + u)}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = \int_1^{+\infty} \frac{1/x}{u} - \frac{1/x}{x + u} du$$

et finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

(c) Pour $x \in]-1; 1[$, on a

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

On en déduit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^n.$$

Exercice 65 : [\[énoncé\]](#)

(a) S est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

(b) Par convergence normale sur $[1; +\infty[$, on peut intervertir limites et sommes infinies pour justifier,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

de sorte que

$$S(x) \sim \frac{1}{(1-a)x}.$$

(c) Pour $|x| < 1$;

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m.$$

Or $\sum \left| (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m \right|$ converge et $\sum \sum_{m=0}^{+\infty} \left| (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m \right|$ converge. Par le théorème de Fubini, on peut permuter les sommes infinies et affirmer

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^{m+1}} \right) x^m.$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(x) = \text{sh}(\alpha^n x)$. La fonction u_n est définie et continue sur \mathbb{R} . Pour $a \geq 0$, on a

$$\sup_{x \in [-a; a]} |u_n(x)| = \text{sh}(a\alpha^n)$$

avec

$$n^2 \text{sh}(a\alpha^n) \sim n^2 a \alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement sur $[-a; a]$ pour tout $a \geq 0$.

Par convergence normale sur tout segment, la fonction S est définie et continue sur \mathbb{R} .

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sh}(\alpha^n x) = S(x) - \text{sh}(x).$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) - S(\alpha x) = \text{sh}(x).$$

(c) Analyse : Supposons S développable en série entière sur \mathbb{R} avec

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

L'égalité $S(x) - S(\alpha x) = \text{sh}(x)$ fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \alpha^n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{1}{(1 - \alpha^{2n+1})(2n+1)!} \text{ et } a_{2n} = 0.$$

Synthèse : Considérons la fonction définie par

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(1 - \alpha^{2n+1})(2n+1)!}.$$

Le rayon de convergence de la série entière définissant T est $+\infty$ et par les calculs qui précèdent

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) - T(\alpha x) = \text{sh}(x).$$

Il reste à montrer $T = S$ pour conclure. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T(\alpha^n x) - T(\alpha^{n+1} x) = \text{sh}(\alpha^n x).$$

En sommant

$$T(x) - T(\alpha^n x) = \sum_{k=0}^{n-1} (T(\alpha^k x) - T(\alpha^{k+1} x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{sh}(\alpha^k x).$$

Sachant que T est continue en 0 avec $T(0) = 0$, on obtient quand $n \rightarrow +\infty$

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \text{sh}(\alpha^k x) = S(x).$$

Exercice 67 : [énoncé]

Pour $|x| < |a|$,

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1-x/a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{a^{n+1}} x^n.$$

Par dérivation à l'ordre p

$$\frac{(-1)^p p!}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}{a^{n+p+1}} x^n.$$

Ainsi

$$\frac{1}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1} (n+p)!}{a^{n+p+1} p! n!} x^n.$$

On peut aussi obtenir ce développement à partir de celui de $(1+u)^\alpha$.

Exercice 68 : [énoncé]

(a) Sachant $1 - \alpha^k x \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$, on peut affirmer que pour N assez grand

$$\forall k \geq N, 1 - \alpha^k x > 0.$$

Considérons alors la suite définie par la portion de produit au-delà du rang N

$$\left(\prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}.$$

On a

$$\ln \left(\prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right) = \sum_{k=N}^n \ln(1 - \alpha^k x)$$

avec $\ln(1 - \alpha^k x) = O(\alpha^k)$. La série de terme général α^k est absolument convergente et donc, par comparaison, la série $\sum \ln(1 - \alpha^k x)$ est aussi absolument convergente. On en déduit la convergence de la suite

$$\left(\sum_{k=N}^n \ln(1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}$$

puis, en composant avec la fonction exponentielle, la convergence de la suite

$$\left(\prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}.$$

Enfin, en tenant compte de la portion initiale du produit définissant $P_n(x)$, on obtient la convergence de la suite $(P_n(x))$

(b) Si f est solution de (E) alors

$$f(x) = (1 - \alpha x)f(\alpha x) = (1 - \alpha x)(1 - \alpha^2 x)f(\alpha^2 x) = \dots$$

Par récurrence, on obtient

$$f(x) = \prod_{k=0}^n (1 - \alpha^k x) f(\alpha^{n+1} x) = P_n(x) f(\alpha^{n+1} x).$$

Quand $n \rightarrow \infty$, $f(\alpha^{n+1} x) \rightarrow f(0)$ car f est continue et donc

$$f(x) = f(0) \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - \alpha^k x) = f(0) P(x).$$

(c) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$. La somme de cette série entière est solution de (E) si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \alpha^{n-1} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ceci équivaut à

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}.$$

Inversement, considérons alors la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$$a_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1} \right)$$

de sorte que

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}.$$

Cette série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} \rightarrow 0$$

et l'étude qui précède assure que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) prenant la valeur 1 en 0.

En vertu de la question précédente, on peut affirmer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1} \right) x^n = P(x).$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) Puisque

$$\left|1 - \frac{z}{2^k}\right| \leq 1 + \frac{|z|}{2^k}$$

l'inégalité $|P_n(z)| \leq P_n(-|z|)$ est immédiate.Par produit à facteurs strictement positifs, on a $P_n(-|z|) > 0$ et on peut donc introduire

$$\ln P_n(-|z|) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{|z|}{2^k}\right).$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{|z|}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|z|}{2^n}$$

et ce terme est donc sommable. On peut alors écrire

$$\ln P_n(-|z|) \leq M = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{|z|}{2^n}\right)$$

puis

$$|P_n(z)| \leq e^M.$$

(b) On a

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq |P_n(z)| \frac{|z|}{2^{n+1}} \leq e^M \frac{|z|}{2^{n+1}}.$$

Le majorant est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z) - P_n(z)$ est donc convergente et la suite $(P_n(z))$ est de même nature.(c) Pour $|z| \leq 1$, on a

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq \frac{e^M}{2^{n+1}} \text{ avec } M = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

et donc

$$\sup_{|z| \leq 1} |P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq \frac{e^M}{2^{n+1}}.$$

Ce terme est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z) - P_n(z)$ converge donc normalement, et donc uniformément, sur le domaine défini par la condition $|z| \leq 1$. On en déduit que la suite de fonctions $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur ce même domaine. Or chaque fonction P_n est continue en 0 et donc sa limite simple f est continue en 0.(d) La fonction f vérifie évidemment les conditions énoncées.Inversement, si une fonction g vérifie les conditions proposées alors

$$g(z) = (1-z)g(z/2) = (1-z)(1-z/2)g(z/4) = \dots$$

Par récurrence

$$g(z) = P_n(z)g(z/2^{n+1}).$$

Par continuité de g en 0, un passage à la limite donne $g(z) = f(z)$.(e) Par analyse-synthèse, la recherche d'une fonction somme de série entière $\sum a_n z^n$ solution conduit à

$$a_n = 2^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-2^k}$$

et un rayon de convergence infini.

Exercice 70 : [énoncé]

En dérivant et en décomposant en éléments simples

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\ln(x^2 - 5x + 6) \right) &= \frac{2x - 5}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-x/3} \end{aligned}$$

donc

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) x^n$$

avec un rayon de convergence $R = 2$.

On peut aussi trouver ce développement en série entière en factorisant

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(2-x) + \ln(3-x).$$

Exercice 71 : [énoncé]

Posons

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

On vérifie aisément la convergence de cette intégrale et la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} avec

$$f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Pour $|x| < 1$,

$$f'(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_{3n} = 1, a_{3n+1} = -1 \text{ et } a_{3n+2} = 0.$$

En intégrant,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

avec

$$f(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, on écrit

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right]_{-\infty}^0.$$

Après calculs

$$f(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 72 : [énoncé]

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut affirmer $x \sin \theta e^{i\theta} \neq 1$ et par multiplication par la quantité conjuguée

$$\frac{\sin \theta e^{i\theta}}{1 - x \sin \theta e^{i\theta}} = \frac{\sin \theta e^{i\theta} (1 - x \sin \theta e^{-i\theta})}{|1 - x \sin \theta e^{i\theta}|^2}.$$

On en déduit

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\sin \theta e^{i\theta}}{1 - x \sin \theta e^{i\theta}} \right) = \frac{\sin^2 \theta}{1 - 2x \sin \theta \cos \theta + x^2 \sin^2 \theta}.$$

(b) La fonction f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et, après calculs

$$f'(x) = \frac{\sin^2 \theta}{1 - 2x \sin \theta \cos \theta + x^2 \sin^2 \theta}.$$

Pour $|x \sin \theta| < 1$, on a

$$\frac{\sin \theta e^{i\theta}}{1 - x \sin \theta e^{i\theta}} = \sin \theta e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (x \sin \theta e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sin \theta)^{n+1} e^{i(n+1)\theta} x^n.$$

On en déduit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sin \theta)^{n+1} \sin((n+1)\theta) x^n$$

puis, par intégration de développement en série entière,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin \theta)^n \sin(n\theta)}{n} x^n$$

avec

$$f(0) = -\arctan \left(\frac{1}{\tan \theta} \right) = \arctan(\tan(\theta - \pi/2)) = \theta - \pi/2$$

car $\theta - \pi/2 \in]-\pi/2; \pi/2[$.

Exercice 73 : [énoncé]

La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1+x)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

est une fraction rationnelle dont 0 n'est pas pôle. La fonction f' puis f sont développables en série entière et les rayons de convergence des séries entières correspondantes sont égaux.

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1/2i}{x + 1 - i} - \frac{1/2i}{x + 1 + i} = \operatorname{Re} \left(\frac{-i}{x + 1 - i} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x + 1 - i} \right)$$

avec

$$\frac{1}{x + 1 - i} = \frac{1}{1 - i} \frac{1}{1 + \frac{x}{1-i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}} x^n$$

avec un rayon de convergence $R = \sqrt{2}$.

Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ on a

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos \frac{(3n+1)\pi}{4}}{2^{(n+1)/2}} x^n$$

puis

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos \frac{(3n+1)\pi}{4}}{(n+1)2^{(n+1)/2}} x^{n+1}$$

avec $R = \sqrt{2}$.

Exercice 74 : [énoncé]

Pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan \left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha} \right) \right) = \frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{e^{-i\alpha} - x} - \frac{1}{e^{i\alpha} - x} \right).$$

On reconnaît une écriture en $(Z - \bar{Z})/2i$, c'est donc une partie imaginaire

$$\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \text{Im} \left(\frac{1}{e^{-i\alpha} - x} \right) = \text{Im} \left(\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} \right).$$

Par sommation géométrique

$$\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n$$

et donc

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan \left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha} \right) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\alpha) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\alpha) x^{n-1}.$$

Par intégration de série entière, on obtient alors la relation proposée.

Exercice 75 : [énoncé]

(a) On a

$$\binom{n+p}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \sim \frac{1}{p!} n^p$$

donc le rayon de convergence de f vaut 1.

(b) Sur $] -1; 1[$ f est de classe C^∞ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p}{p} n x^{n-1}.$$

Donc

$$(1-x)f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \binom{n+p+1}{p} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n \binom{n+p}{p} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

avec

$$\alpha_n = (n+1) \binom{n+p+1}{p} - n \binom{n+p}{p}$$

qui donne

$$\alpha_n = (n+p+1) \binom{n+p}{p} - n \binom{n+p}{p} = (p+1) \binom{n+p}{p}.$$

Par suite

$$(1-x)f'(x) = (p+1)f(x).$$

Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(1-x)y' = (p+1)y$$

sur $] -1; 1[$ sont

$$y(x) = \frac{C}{(1-x)^{p+1}}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Sachant $f(0) = 1$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}.$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) On a

$$\sin(tx) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} x^{2k+1}.$$

À l'aide d'intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt = \frac{k!}{2}.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} x^{2k+1} \right| dt \leq \frac{k!}{2(2k+1)!} |x|^{2k+1}$$

qui est terme général d'une série convergente.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et affirmer

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!} x^{2k+1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) La fonction $t \mapsto e^{-t^2} \sin(tx)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ et

$$\left| \frac{d}{dx} (e^{-t^2} \sin(tx)) \right| \leq te^{-t^2}$$

avec $t \mapsto te^{-t^2}$ intégrable sur \mathbb{R}_+ .

La fonction

$$f: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \cos(tx) dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xf(x)$$

et ainsi f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$2y' + xy = 1.$$

De plus f vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Si une somme de série entière est solution de l'équation différentielle $2y' + xy = 1$ et vérifiant $y(0) = 0$, c'est, après calculs, la fonction

$$g: x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!} x^{2k+1}$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.

Puisque f et g sont solutions sur \mathbb{R} à l'équation différentielle linéaire

$2y' + xy = 1$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$ et puisque le théorème de Cauchy assure l'unicité d'une solution à un tel problème, on peut identifier f et g .

Finalement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!} x^{2k+1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 77 : [énoncé]

La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage de 0 avec

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} f(x)$$

et

$$f''(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)^{3/2}} f(x) + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} f'(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$.

Analyse :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S est solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x \in]-R; R[$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n.$$

La relation $(1+x^2)S''(x) + xS'(x) - S(x)/4 = 0$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - 1/4)a_n) x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{1}{4} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

En adjoignant les conditions initiales $S(0) = 1$ et $S'(0) = 1/2$, on parvient à

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{4p-1}} \frac{(4p-2)!}{((2p)!((2p-1)!))} \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{4p}} \frac{(4p-1)!}{(2p+1)!(2p-1)!}.$$

Synthèse :

Considérons la série entière déterminée au terme de l'analyse. Celle-ci se comprend comme la somme de deux séries entières $\sum a_{2p} x^{2p}$ et $\sum a_{2p+1} x^{2p+1}$ chacune de rayon de convergence 1 car

$$\left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = \frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)} \rightarrow 1.$$

Cette série entière est donc de rayon de convergence $R \geq 1$ et, compte tenu des calculs de l'analyse, sa somme est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0.$$

Elle vérifie de plus les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$. Puisque la fonction f est aussi solution de ce problème de Cauchy et que ce dernier possède une solution unique, on peut identifier f et la somme de la série entière.

Exercice 78 : [énoncé]

- (a) La fonction f est définie sur $] -1; 1[$.
 (b) On vérifie $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ et $f(0) = 0$.
 (c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $] -1; 1[$ et par suite la primitive $x \mapsto \arcsin x$ l'est aussi.
 Par produit de fonctions développable en série entière sur $] -1; 1[$, f l'est aussi.

Puisque f est impaire, le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

On a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n}$ puis

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

donc

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+3)a_{n+1} - (2n+2)a_n)x^{2n+2} = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n$$

d'où

$$a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Puisque pour $x \neq 0$

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} \right| = \frac{4(n+1)^2 x^2}{(2n+3)(2n+2)} \rightarrow x^2$$

on obtient $R = 1$.

Exercice 79 : [énoncé]

f admet un développement en série entière en 0 par produit fonctions développables en série entière.

De plus son rayon de convergence vérifie $R \geq 1$.

On peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ sur }] -1; 1[$$

f est dérivable et f est solution de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y' + xy - 1 = 0.$$

Or

$$(x^2 - 1)f'(x) + xf(x) - 1 = -(a_1 + 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (na_{n-1} - (n+1)a_{n+1})x^n.$$

Par identification

$$a_1 = -1 \text{ et } \forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}.$$

De plus $a_0 = f(0) = \pi/2$ donc

$$a_{2p} = \frac{(2p-1)}{2p} \times \dots \times \frac{1}{2} a_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \dots \frac{2}{3} a_1 = -\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 80 : [énoncé]

Posons $f: x \mapsto \text{sh}(\arcsin x)$

f vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Analyse :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . La fonction S vérifie sur $] -R; R[$ l'équation différentielle proposée et les conditions initiales imposées si, et seulement si,

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n^2 + 1}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Ceci donne

$$a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^p ((2k-1)^2 + 1)}{(2p+1)!}.$$

Synthèse :

Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.

Pour $x \neq 0$ et $u_p = a_{2p+1} x^{2p+1}$; on a

$$\left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| \rightarrow |x|^2$$

donc le rayon de convergence de la série entière étudiée vaut 1. Par les calculs qui précèdent on peut alors affirmer que sa somme S est solution de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' - y = 0$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Par unicité des solutions à un tel problème différentiel, on peut conclure que f est la somme de la série entière introduite sur $] -1; 1[$.

Exercice 81 : [énoncé]

- (a) La fonction f est impaire car produit d'une fonction paire par la primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire.
- (b) f est solution de l'équation différentielle

$$y' = xy + 1.$$

- (c) La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est développable en série entière sur \mathbb{R} , ces primitives le sont donc aussi et, par produit de fonctions développable en série entière, on peut affirmer que f est développable en série entière sur \mathbb{R} . Par imparité, on peut écrire ce développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

et l'équation différentielle donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)a_n = a_{n-1} \text{ et } a_0 = 1.$$

On en déduit

$$a_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}.$$

Exercice 82 : [énoncé]

- (a) Posons $u(x, t) = e^{-t}/(x+t)$ définie sur $] -1; +\infty[\times [1; +\infty[$. Pour chaque $x > -1$, $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$ et $t^2 u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. La fonction f est donc bien définie sur $] -1; +\infty[$. Pour chaque $t \geq 1$, $x \mapsto u(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}.$$

La fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux en t , continue en x et pour tout $a > -1$

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times [1; +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{e^{-t}}{(a+t)^2} = \varphi_a(t)$$

avec $\varphi_a : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable par des arguments analogues aux précédents.

On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

Par intégration par parties, on obtient

$$f'(x) - f(x) = -\frac{e^{-1}}{x+1}.$$

- (b) Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x \in] -R; R[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - a_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-1} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}e^{-1}.$$

Après résolution de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{a_0}{n!} + e^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{(n-1-k)}k!}{n!}.$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédents. On a

$$|a_n| \leq |a_0| + e^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} = |a_0| + e^{-1}.$$

La suite (a_n) est bornée donc le rayon de convergence R de la série entière est au moins égal à 1 et, par les calculs qui précèdent, on peut affirmer que la somme S de la série entière est solution de l'équation différentielle sur $] -1; 1[$. En ajoutant la condition initiale $a_0 = f(0)$, on peut affirmer que $f(x) = S(x)$ sur $] -1; 1[$ par unicité d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 83 : [énoncé]

On a

$$f(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{4}(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x})$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n}{4n!} x^n.$$

On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ etc, donc

$$\begin{aligned} (1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n &= 2\sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{3n\pi}{4} \right) \\ &= 4\sqrt{2}^n \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Finalement

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p \cos(\frac{p\pi}{2})}{(2p)!} x^{2p} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q 2^{2q}}{(4q)!} x^{4q}.$$

Retrouvons ce résultat, en exploitant l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$. La fonction f est développable en série entière sur \mathbb{R} par produit de telles fonctions. De plus, la fonction f est paire donc le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$, on obtient

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4} + 4a_n = 0.$$

Puisque $a_0 = 1, a_1 = a_3 = 0$ (par imparité) et $a_2 = 0$ (par calculs), on obtient

$$a_{4q} = \frac{(-1)^q 4^q}{(4q)!} \text{ et } a_{4q+1} = a_{4q+2} = a_{4q+3} = 0$$

ce qui conduit au développement précédent.

Exercice 84 : [énoncé]

- (a) $(x, t) \mapsto t^k \sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$ donc, par intégration sur un segment, f est continue.
- (b) $(x, t) \mapsto \frac{d}{dx}(t^k \sin(xt))$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$ donc par intégration sur un segment, f est de classe \mathcal{C}^1 avec

$$f'(x) = \int_0^1 x t^k \cos(xt) dt.$$

On en déduit

$$x f'(x) + (k+1)f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^k \sin(xt)) dt = \sin x.$$

- (c) Par analyse synthèse, on obtient une seule fonction solution :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+2+k)} x^{2n+2}$$

de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 85 : [énoncé]

- (a) Soit v la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
La fonction v est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-R; R[$ et

$$tv'(t) + v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n t^n.$$

Parallèlement, sur \mathbb{R}

$$3t^2 \cos(t^3/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 3t^{3n+2}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, v est solution de (E) sur $]-R; R[$ si, et seulement si,

$$a_{3n} = a_{3n+1} = 0 \text{ et } a_{3n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi la fonction v est déterminée de manière unique et de plus celle-ci existe puisque le rayon de convergence de la série entière définie par les a_n ci-dessus est $R = +\infty$.

- (b) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0; +\infty[$.

La solution générale homogène est $y(t) = \lambda/t$.

Par la méthode de la variation de la constante, on peut proposer la solution particulière

$$y(t) = \frac{2 \cos(t^3/2) + 2t^{3/2} \sin(t^3/2)}{t}$$

et finalement la solution générale

$$y(t) = \frac{2 \cos(t^3/2) + 2t^{3/2} \sin(t^3/2)}{t} + \frac{\lambda}{t}.$$

Parmi les solutions, la seule pouvant être prolongée par continuité en 0, et donc correspondre à v , est celle obtenue pour $\lambda = -2$.

Exercice 86 : [énoncé]

- (a) Notons \mathcal{D} l'intervalle de convergence de cette série entière.

Le rayon de convergence étant 1 on en déduit : $]-1; 1[\subset \mathcal{D} \subset [-1; 1]$.

De plus $\left| \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \right| \sim \frac{1}{n^2}$ donc $f(1)$ et $f(-1)$ existe. Ainsi $\mathcal{D} = [-1; 1]$.

- (b) Sur $]-1; 1[$, f est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x).$$

Donc

$$\int \ln(1+x) dx = (1+x) \ln(1+x) - x + C.$$

Puisque $f(0) = 0$, on conclut

$$f(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$$

sur $]-1; 1[$.

- (c)

$$\forall x \in [-1; 1], \left| \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n \right| \leq \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

donc la série de fonctions définissant f converge normalement sur $[-1; 1]$ et par suite f est continue.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ((1+x) \ln(1+x) - x) = 2 \ln 2 - 1$$

et

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} ((1+x) \ln(1+x) - x) = 1.$$

Exercice 87 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{n}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{x^n} / \frac{n-1}{n!} \right| \rightarrow 0$$

donc $R = +\infty$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = (x-1)e^x.$$

Exercice 88 : [énoncé]

Clairement $R = +\infty$.

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n - 2}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1) - 2}{n!} x^n$$

donc

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{(n-2)!} - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = (x^2 - 2)e^x.$$

Exercice 89 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n} \frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \right| \rightarrow |x^2|$$

donc $R = 1$.

Pour $x \in]-1; 1[$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

donc

$$xf'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n x^n$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = x \times \left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 90 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^{2n+1}}{3n+2} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow x^2$ donc $R = 1$.

La fonction somme S est impaire, on se limite alors à $x > 0$.

$$\sqrt{x}S(x^{3/2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{3n+1} dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^3} dt$$

donc $S(x) = \frac{1}{x^{4/3}} \int_0^{x^{2/3}} \frac{t}{1-t^3} dt$ et il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples etc.

$$S(x) = \frac{1}{6x^{4/3}} \ln \frac{x^{4/3} + x^{2/3} + 1}{x^{4/3} - 2x^{2/3} + 1} - \frac{1}{x^{4/3}\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{2x^{2/3} + 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\pi}{6} \right).$$

Exercice 91 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$, posons

$$u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1} \neq 0.$$

Puisque

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow |x|^2$$

on obtient $R = 1$.

Sachant

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

on obtient par intégration de développement en série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

puis, pour $x \neq 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Pour $x = 0$, la somme vaut 1.

Exercice 92 : [énoncé]

Par la règle de d'Alembert, on obtient $R = 1$.

Posons

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$$

On a

$$xS(x^2) = \arctan x.$$

On en déduit

$$S(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ pour } x > 0.$$

Sachant

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

on obtient par intégration de développement en série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

On en déduit

$$xS(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

donc

$$S(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \text{ si } x < 0.$$

Enfin, pour $x = 0$, $S(0) = 1$.

Exercice 93 : [\[énoncé\]](#)

Clairement $R = 1$.

Posons

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Sachant

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

on obtient par intégration de développement en série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

On en déduit

$$S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{4x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Exercice 94 : [\[énoncé\]](#)

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi: t \mapsto 1$, on obtient $a_n \rightarrow 0$.

(b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)' (\tan t)^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

(c) Par monotonie $a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2}$. On en déduit $a_n \sim \frac{1}{2n}$ puis $u_n(x) \sim \frac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1.

Pour $x = 1$, $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Pour $x = -1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement si $\alpha \leq -1$.

Pour $\alpha > -1$, $2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^\alpha} a_k = \alpha + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^\alpha} (a_k + a_{k+2}) + o(1)$

Or $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha(n+1)}$ converge par application de critère spécial des séries alternées (car $n \mapsto \frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ décroît vers 0 pour n assez grand) donc $\sum u_n(x)$ converge.

(d) Puisque $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^n + a_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On en déduit

$$f(x) + \frac{f(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} x}{x^2} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

puis

$$f(x) = \frac{-x \ln(1-x) + \frac{\pi}{4} + x \frac{\ln 2}{2}}{x^2 + 1}.$$

Exercice 95 : [\[énoncé\]](#)

(a) On a

$$|a_n| = \frac{1}{n!} \int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1} (k-t) dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k dt \leq \frac{1}{n}$$

donc $R \geq 1$.

$$|a_n| \geq \frac{1}{n!} \int_0^1 t(1-t) \times \prod_{k=2}^{n-1} (k-1) dt \geq \frac{1}{4n(n-1)}$$

donc $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

(b) Soit $x \in]-1; 1[$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) x^n dt$$

or par convergence uniforme de la suite de fonctions de la variable t sur $[0; 1]$ (convergence uniforme obtenue par convergence normale grâce à $|x| < 1$) on peut permuter somme et intégrale.

$$S(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) x^n dt = \int_0^1 (1+x)^t dt = \left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 96 : [énoncé]

(a) Posons $a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} \neq 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \rightarrow \frac{1}{2}$. $R = 2$.

(b) On sait que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt = \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t) dt.$$

Par convergence uniforme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin t}{2 - x \sin^2 t} dt.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(2-x) + x \cos^2 t} dt = \int_0^1 \frac{du}{(2-x) + xu^2}$$

puis

si $x > 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}} \arctan \sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

Si $x < 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \operatorname{argth} \sqrt{\frac{-x}{2-x}}.$$

Exercice 97 : [énoncé]

Posons

$$u_n(x) = n^{(-1)^n} x^n.$$

Pour $x \in [0; 1[$, on a $u_n(x) \rightarrow 0$ et pour $x = \pm 1$, $(u_n(x))$ ne tend pas vers 0.

Le rayon de convergence de cette série entière vaut donc $R = 1$ et l'intervalle de convergence est $] -1; 1[$.

Pour $x \in] -1; 1[$, on peut décomposer la somme en deux

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (2p)x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1}.$$

D'une part

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1} = \operatorname{argth}(x)$$

et d'autre part

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (2p)x^{2p} = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Exercice 98 : [énoncé]

Les séries entières définissant S_0, S_1 et S_2 sont de rayons de convergence $R = +\infty$.

Pour $x \in \mathbb{C}$, on a

$$S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

On a aussi

$$S_0(x) + jS_1(x) + j^2S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = \exp(jx)$$

et

$$S_0(x) + j^2S_1(x) + jS_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j^2x)^n}{n!} = \exp(j^2x).$$

En sommant ces trois relations, on obtient

$$S_0(x) = \frac{1}{3} (\exp(x) + \exp(jx) + \exp(j^2x)).$$

Exercice 99 : [énoncé]

- (a) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, pour $|x| < \min(R, R')$, $\sum c_n x^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right).$$

Ainsi le rayon de convergence R'' de $\sum c_n x^n$ vérifie $R'' \geq \min(R, R')$.
En revanche, on ne peut facilement rien dire de plus de façon générale. Par exemple $1-x$ et $\frac{1}{1-x}$ se développent en série entière de rayons de convergence $+\infty$ et 1 et leur produit de Cauchy est de rayon de convergence $+\infty \dots$

- (b) Puisque $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$, on obtient facilement $R = 1$.
Si l'on pose $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$ et $b_k = 1$ pour $k \geq 0$ alors

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Par suite, pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 100 : [énoncé]

Par la règle de d'Alembert, $R = 1/e$.
Sur $[-1/e; 1/e]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)} x^n = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ex)^n}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x/e)^n}{n(n+1)} \right).$$

Or sur $]-1; 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n+1} = -\ln(1-y) + \frac{1}{y}(\ln(1-y) + y).$$

Cette identité pouvant être prolongée en -1 et en 1 par continuité. Cela permet alors d'explicitier la somme cherchée.

Exercice 101 : [énoncé]

Par intégration par parties successives

$$a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Puisque $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \frac{1}{4}$ on a $R = 4$.

Pour $|x| < 4$, par convergence normale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t(1-t)x} = \int_0^1 \frac{dt}{xt^2 - xt + 1}.$$

Si $x \in]0; 4[$,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \arctan \sqrt{\frac{x}{4-x}}.$$

Si $x \in]-2; 0[$,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(x-4)}} \operatorname{argth} \sqrt{\frac{x}{x-4}}.$$

Si $x = 0$, $f(x) = 1$.

Exercice 102 : [énoncé]

- (a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi: t \mapsto 1$, on obtient $a_n \rightarrow 0$.
(b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)' (\tan t)^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

- (c) Par monotonie $a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2}$. On en déduit

$$a_n \sim \frac{1}{2n}.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1.
Pour $x = 1$, $\sum a_n$ diverge en vertu de l'équivalent précédent et par comparaison de séries à termes positifs.
Pour $x = -1$, $\sum (-1)^n a_n$ en vertu du critère spécial des séries alternées, la suite (a_n) étant notamment décroissante.
Ainsi la fonction f est définie sur $[-1; 1[$.

(d) Puisque $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2}x^{n+1} + a_nx^{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

pour $x \in [-1; 1[$. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2}x^{n+1} + a_nx^{n+1}) = \frac{1}{x} (f(x) - a_0 - a_1x) + xf(x)$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}x - x \ln(1-x) \right)$$

pour $x \neq 0$ et aussi pour $x = 0$ par continuité.

On peut aussi procéder à une permutation somme intégrale pour parvenir à

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x \tan t}.$$

Exercice 103 : [\[énoncé\]](#)

(a) Comme la suite (a_n) est bornée, on peut écrire $a_nx^n = O(x^n)$. Or la série $\sum x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$ et donc, par comparaison, la série $\sum a_nx^n$ est absolument convergente.

Puisque $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^n \right).$$

Par sommation géométrique (possible puisque $|xe^{i\theta}| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - xe^{i\theta}} \right) = \frac{1 - x \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}.$$

(b) La convergence de la série étudiée n'est pas immédiate. Exprimons ses sommes partielles

$$\sum_{n=0}^N \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^N \cos(n\theta)x^n dx.$$

Par le calcul au dessus, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^N \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} dx - \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n dx.$$

Puisque $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, on peut écrire

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{in\theta}x^n \right|$$

ce qui donne par un calcul analogue au précédent

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n \right| \leq \frac{x^{N+1}}{|1 - xe^{i\theta}|} \leq \frac{x^{N+1}}{|\operatorname{Im}(xe^{i\theta})|} = \frac{x^N}{|\sin \theta|}.$$

Par conséquent

$$\left| \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n dx \right| \leq \int_0^1 \frac{x^N}{|\sin \theta|} dx \leq \frac{1}{(N+1)|\sin \theta|} \rightarrow 0.$$

On en déduit que la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x \cos \theta}{x - 2x \cos \theta + 1} dx.$$

(c) On décompose l'intégrale étudiée en deux intégrales directement calculables

$$\int_0^1 \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} dx = \sin^2 \theta \int_0^1 \frac{dx}{(x - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{2} \int_0^1 \frac{2x - 2 \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$$

et l'on obtient

$$\int_0^1 \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} dx = \sin \theta \left[\arctan \frac{x - \cos \theta}{\sin \theta} \right]_0^1 - \frac{\cos \theta}{2} \left[\ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) \right]_0^1.$$

On simplifie en exploitant

$$\arctan \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) = \arctan(\tan(\theta - \pi/2)) = \theta - \pi/2.$$

$$\arctan \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \arctan \frac{2 \sin^2 \theta/2}{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2} = \frac{\theta}{2}$$

et

$$\ln(2 - 2 \cos \theta) = \ln(4 \sin^2 \theta/2).$$

On obtient au final

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \frac{\pi - \theta}{2} \sin \theta - \cos \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Exercice 104 : [\[énoncé\]](#)

Posons $b_n = \frac{a_n}{n!}$, on a $b_0 = 1$ et

$$(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_{n-k}b_k.$$

Notons S la somme de la série entière $\sum b_n x^n$ et posons R son rayon de convergence.

Par récurrence, on peut affirmer $|b_n| \leq 1$ et donc $R > 0$.

Sur $]-R; R[$, la relation précédente donne a

$$S'(x) = S^2(x).$$

Après résolution, sachant que $S(0) = 1$, on obtient

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

d'où l'on tire $a_n = n!$.

Exercice 105 : [\[énoncé\]](#)

(a) Pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \text{Card}\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \mid k + 2\ell = n\} = \lfloor n/2 \rfloor + 1.$$

(b) Analyse :

Introduisons la série entière $\sum u_n x^n$ de somme S et de rayon de convergence R .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3}x^{n+3} = u_{n+2}x^{n+3} + u_{n+1}x^{n+3} - u_n x^{n+3}.$$

En sommant, on obtient pour $|x| < R$,

$$S(x) - (u_0 + u_1x + u_2x^2) = x(S(x) - u_0 - u_1x) + x^2(S(x) - u_0) - x^3S(x).$$

On en déduit

$$S(x) = u_0 \frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} + u_1 \frac{x}{1-x^2} + u_2 \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}.$$

Synthèse : Considérons la fonction

$$f: x \mapsto u_0 \frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} + u_1 \frac{x}{1-x^2} + u_2 \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

f est une fonction rationnelle donc 0 n'est pas pôle, elle est développable en série entière sur $]-1; 1[$.

Puisque cette fonction vérifie la relation

$$f(x) - (u_0 + u_1x + u_2x^2) = x(f(x) - u_0 - u_1x) + x^2(f(x) - u_0) - x^3f(x)$$

les coefficients u_n de son développement en séries entières vérifient

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+2} + u_{n+1} - u_n)x^{n+3}.$$

Par identification des coefficients de séries entières de sommes égales sur $]-1; 1[$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n.$$

Ceci détermine alors entièrement la suite (u_n) moyennant la connaissance des coefficients u_0, u_1, u_2 .

Pour exprimer u_n , il ne reste plus qu'à former le développement en série entière de f .

$$\frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} = 1 - \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3}.$$

$$\frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} \text{ et } \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}.$$

On en déduit que pour $n \geq 3$,

$$u_n = -u_0 a_{n-3} + u_1 \varepsilon_n + u_2 a_{n-1}$$

avec $\varepsilon_n = 1$ si n est impair et 0 sinon.

Exercice 106 : [\[énoncé\]](#)

(a) Si la série entière S est de rayon de convergence $R > 0$, alors pour tout $x \in]-R; R[$ on a

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} x^n.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$S(x) = 1 + xS^2(x).$$

(b) Pour $x \neq 0$, on obtient, après résolution

$$S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ pour } x < 1/4.$$

Posons $\varepsilon(x)$ tel que

$$S(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

On a

$$\varepsilon(x) = \frac{2xS(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}.$$

La fonction ε est continue sur $]-R; 0[\cup]0, \min(R, 1/4)[$ et ne prend que les valeurs -1 ou 1 . On en déduit que cette fonction ε est constante et puisque S converge quand $x \rightarrow 0^{+/-}$, on peut affirmer que ε est constante égale à -1 car négative au voisinage de 0.

Finalement

$$S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ et } S(0) = 1.$$

(c) Après développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$, on obtient

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

et $R = 1/4$.

Puisque la fonction

$$T: x \mapsto \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

vérifie l'équation $xT^2(x) = T(x) - 1$, la reprise des calculs précédents (sachant $R > 0$) assure que les coefficients b_n vérifient

$$b_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_{n-k} b_k.$$

On en déduit $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car les conditions qui précèdent déterminent une suite de façon unique.

(d) Par la formule de Stirling

$$a_n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n^{3/2}}}.$$

Exercice 107 : [\[énoncé\]](#)

(a)

$$N(n, p) = \binom{n}{p} D(n-p).$$

(b) $D(n) \leq n!$ donc $\left| \frac{D(n)}{n!} \right| \leq 1$ qui implique $R \geq 1$.

On a $\sum_{p=0}^n N(n, p) = n!$ donc $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!(n-p)!} D(n-p) = 1$ d'où par produit de Cauchy $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ puis

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

(c)

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^n$$

donc

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

puis

$$N(n, p) = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(d) Finalement

$$\frac{1}{n!} N(n, p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p! e}.$$

Exercice 108 : [\[énoncé\]](#)

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donc

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

pour $x \neq 0$. Or

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , cela permet de conclure.

(b) Un raisonnement semblable, permet d'établir que $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ ne s'annulant pas. Par opération, le prolongement continue de $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1} = \frac{\sin x}{x} \frac{x}{e^x - 1}$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

Exercice 109 : [\[énoncé\]](#)

(a) Pour $t \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{\cos t}{t} = \frac{\cos t - 1}{t} + \frac{1}{t}.$$

Posons alors

$$g(t) = \frac{\cos t - 1}{t}.$$

La fonction g est continue sur \mathbb{R}^* et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

On a alors pour tout $x \neq 0$

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) dt + \ln 2 = G(2x) - G(x) + \ln 2$$

avec G une primitive de g sur \mathbb{R} .

On en déduit

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 2$$

et on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 2$.

(b) Pour $t \neq 0$ et aussi pour $t = 0$ on a

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n-1}.$$

On peut alors poser

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{2n}$$

primitive de g et on obtient

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{4^n - 1}{2n} x^{2n}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 110 : [\[énoncé\]](#)

Pour tout $t \in [0; 1[$ on sait

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

donc aussi

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na}.$$

Soit F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ sur $[0; 1]$.

Sur

$$[0; 1[, F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{na+1}}{na+1} + F(0).$$

Or F est continue sur $[0; 1]$ et la série de fonctions convergence uniformément sur $[0; 1]$.

Par passage à la limite en 1,

$$F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} + F(0).$$

Par suite

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = F(1) - F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 111 : [énoncé]

(a) Par télescopage

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N+1).$$

Or

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$$

donc

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \rightarrow \gamma.$$

(b) Puisque

$$\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{1}{n^k}$$

on obtient

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{1}{n^k}$$

or

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \frac{1}{n^k} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} < +\infty$$

donc on peut appliquer le théorème d'échange de Fubini et affirmer

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\zeta(k) - 1)$$

et enfin

$$\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k).$$

Exercice 112 : [énoncé]

Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

somme de série entière définie sur $] -1; 1[$.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2) \times 3^n} = \sqrt[3]{9} S \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right) = \sqrt[3]{9} \int_0^{1/\sqrt[3]{3}} \frac{t dt}{1-t^3}$$

ce qui donne un résultat assez monstrueux :

$$9^{(1/3)} \left(-\frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan \left(\left(\frac{2}{9} 3^{(2/3)} + \frac{1}{3} \right) \sqrt{3} \right) + \frac{1}{6} \ln(3) + \frac{1}{6} \ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)}) - \frac{1}{3} \ln(-3^{(2/3)}+3) + \frac{1}{18} \right)$$

fourni par Maple.

Exercice 113 : [énoncé]

On a

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$$

avec une convergence uniforme sur $[0; 1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial.

On a alors

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

On peut montrer que cette vaut $\pi^2/12$ si l'on sait

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 114 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

avec convergence uniforme sur $[0; 1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial. On peut donc intégrer terme à terme

$$\int_0^1 \arctan x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 115 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\ln(1+u) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} u^k}{k}$$

avec convergence normale sur $[-|x|; |x|]$ donc

$$\ln(1+x \sin^2 t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k \sin^{2k} t}{k}$$

avec convergence normale sur $[0; \pi/2]$.

Par suite

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x \sin^2 t)}{\sin^2 t} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{k} I_{k-1}$$

avec

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

puis

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x \sin^2 t)}{\sin^2 t} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{k} \frac{(2k-2)!}{(2^{k-1} (k-1)!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Or

$$\sqrt{1+u} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} x^k$$

avec

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^{2k-1} k ((k-1)!)^2}$$

d'où

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x \sin^2 t)}{\sin^2 t} dt = \pi(\sqrt{1+x} - 1).$$

Exercice 116 : [\[énoncé\]](#)

(a) Par le changement de variable $s = t^{n+1}$, on obtient

$$u_n = \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(s^{1/(n+1)}) ds.$$

Posons alors $f_n(s) = f(s^{1/(n+1)})$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et convergent simplement sur $]0; 1]$ vers la fonction constante égale à $f(1)$ elle-même continue par morceaux. On a de plus la domination

$$|f_n(s)| \leq \max_{t \in [0; 1]} |f(t)|.$$

Par convergence dominée, on a donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(1) ds = f(1).$$

(b) On réalise le changement de variable $s = t^n$ et on obtient

$$v_n = \int_0^1 \ln(1+s) f(s^{1/n}) s^{-\frac{n-1}{n}} ds.$$

Posons alors g_n la fonction définie par l'intégrande, on peut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée sachant

$$g_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+s)}{s} f(1) \text{ et } |g_n(s)| \leq \frac{\ln(1+s)}{s} f(1)$$

et l'on obtient

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1) \int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s} ds.$$

Pour calculer l'intégrale, il suffit ensuite d'écrire

$$\frac{\ln(1+s)}{s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} s^{n-1}$$

et de procéder à une intégration terme à terme sachant la sommabilité de

$$\int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} s^{n-1} \right| ds = \frac{1}{n^2}.$$

On obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s} ds = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 117 : [énoncé]

Par développement en série entière

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \int_{[0;1[} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk} dt.$$

Pour $n \geq 1$, il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues donc on peut donc intégrer terme à terme par le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}.$$

On a alors

$$n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

donc

$$n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 118 : [énoncé]

g est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$, c'est donc une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et h l'est aussi par produit.

$h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ avec

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n t^n e^{-t}}{2^{2n}(n)!}$$

pour tout $t \in [0; +\infty[$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sont intégrables sur \mathbb{R}_+ .

Puisque

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{1}{2^{2n}n!}$$

et donc la série $\sum \int_{[0;+\infty[} |f_n|$ converge.

Puisque $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers h continue par morceaux, on peut par théorème affirmer que h est intégrable sur \mathbb{R}_+ et

$$\int_0^{+\infty} h(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!} = e^{-1/4}.$$

Exercice 119 : [énoncé]

(a) R est la borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble

$$\left\{ r \in [0; +\infty[\mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Soit $0 < r < R$. On peut introduire ρ tel que $r < \rho$ et $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite bornée. Pour tout $z \in D(0, r)$, on a

$$|a_n z^n| \leq |a_n r^n| = |a_n| \rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = O\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right).$$

Ce majorant uniforme étant sommable (car $|r/\rho| < 1$), on obtient la convergence normale voulue.

(b) Pour $|z| < r$, on peut décomposer en série géométrique

$$\frac{1}{r - ze^{-i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-in\theta}}{r^{n+1}} z^n.$$

Sachant la fonction f bornée sur le compact $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, il y a convergence de la série

$$\sum \int_0^{2\pi} \left| \frac{\text{Im}(f(re^{i\theta}))e^{-in\theta}}{r^{n+1}} z^n \right| d\theta$$

ce qui permet une intégration terme à terme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Im}(f(re^{i\theta}))}{r - ze^{-i\theta}} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \text{Im}(f(re^{i\theta}))e^{-in\theta} d\theta \right) \frac{z^n}{r^{n+1}}.$$

On obtient ainsi un développement en série entière sur $D(0, r)$.

Pour l'expliciter, on calcule le terme intégral en procédant à une intégration terme à terme justifiée par l'absolue convergence de $\sum a_n r^n$

$$\int_0^{2\pi} \text{Im}(f(re^{i\theta}))e^{-in\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k r^k$$

avec

$$I_k = \text{Re}(a_k) \int_0^{2\pi} \sin(k\theta)e^{-in\theta} d\theta + \text{Im}(a_k) \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)e^{-in\theta} d\theta.$$

Pour $n \neq k$, les deux intégrales sont nulles.

Pour $n = k = 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)e^{-in\theta} d\theta = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)e^{-in\theta} d\theta = 2\pi.$$

Pour $n = k \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)e^{-in\theta} d\theta = -i \int_0^{2\pi} \sin^2(k\theta) d\theta = -i\pi \text{ et}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta)e^{-in\theta} d\theta = \pi.$$

On peut alors conclure

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Im}(f(re^{i\theta}))}{r - ze^{-i\theta}} d\theta = \frac{2\pi \text{Im}(a_0)}{r} + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\text{Im}(a_n) - i \text{Re}(a_n))z^n}{r}$$

$$= \frac{i\pi}{r} (\overline{f(0)} - f(z)).$$

(c) Si f est une telle fonction, l'intégrale au-dessus est nulle et donc

$$f(z) = \overline{f(0)} \text{ pour tout } |z| < r.$$

On en déduit $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 1$. La fonction f est alors constante réelle.

Exercice 120 : [énoncé]

(a) La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur $]0; a]$ et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur $-1/2$.

(b) Par développement en série entière, on a pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$\ln(1 - x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

et donc, pour tout $x]0; 1[$,

$$\frac{x + \ln(1 - x)}{x^2} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n}.$$

Après prolongement par continuité en 0, la fonction intégrée se confond avec la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. Celle-ci converge normalement sur $[0; a]$ ce qui permet d'intégrer terme à terme

$$\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = - \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^a \frac{x^{n-2}}{n} dx = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{n(n-1)} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}.$$

(c) Posons $u_n(a) = \frac{a^n}{n(n+1)}$ pour $a \in [0; 1]$.

Les fonctions u_n sont continues et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement car

$$|u_n(a)| \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{avec} \quad \sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ convergente.}$$

Par convergence uniforme, la somme de la série de fonctions est définie et continue en 1 et donc

$$\lim_{a \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

On en déduit

$$\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = -1$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 121 : [\[énoncé\]](#)

(a) En posant $Y = X - 1$,

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{1}{Y^n(Y+2)^m}.$$

Pour $Y \in]-1/2; 1/2[$,

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \frac{1}{2^m} \frac{1}{(1 + \frac{Y}{2})^m} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-m(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!} \frac{Y^k}{2^k}.$$

Après simplifications

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{m+k}} \binom{m+k-1}{k} Y^k.$$

On en déduit que la partie polaire relative au pôle 1 est

$$\frac{a_0}{(X-1)^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{X-1} = \frac{a_0}{Y^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y}$$

avec

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{m+k}} \binom{m+k-1}{k}.$$

De même, en posant $Z = X + 1$, la partie polaire relative au pôle -1 est

$$\frac{b_0}{(X+1)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{X+1} = \frac{b_0}{Z^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{Z}.$$

avec

$$b_k = \frac{(-1)^n}{2^{n+k}} \binom{n+k-1}{k}.$$

Enfin, puisque de partie entière nulle, la fraction rationnelle étudiée est la somme des deux parties polaires proposées.

(b) En réduisant chaque partie polaire au même dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(X-1)^k}{(X-1)^n} + \frac{\sum_{k=0}^{m-1} b_k(X+1)^k}{(X+1)^m}.$$

Par conséquent, on posant

$$U(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X-1)^k \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(X+1)^k$$

la poursuite de la réduction au même dénominateur du calcul précédent donne

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1.$$

Exercice 122 : [\[énoncé\]](#)

(a) Soit $r \in]0; R[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r} \right)^n = o(a_n r^n)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

(b) On a

$$f(t)e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \text{ avec } f_n(t) = \frac{a_n}{n!} t^n e^{-xt}.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

Les fonctions f_n et la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $[0; +\infty[$.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0; +\infty[$ car $t^2 f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt.$$

Par intégration par parties généralisées successives

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}.$$

Si $x > 1/R$ alors la série $\sum |a_n|/x^{n+1}$ est convergente et, par le théorème de Fubini, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}.$$

Exercice 123 : [énoncé]

(a) On a

$$S_N(x)^2 - 1 - x = S_N(x)^2 - S(x)^2 = R_N(x)(S(x) + S_N(x)).$$

C'est donc une série entière dont le premier terme non nul est au moins un x^{N+1} .

D'autre part $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme.

(b) Pour N tel que $A^N = 0$, $(S_N(A))^2 - I - A = O_n$ donc $B = S_N(A)$ convient.

Exercice 124 : [énoncé]

Pour $|x| < 1$, on a le développement en série entière

$$\left(\frac{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}{nx^n} \right)$$

On peut écrire

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a (1+x)^b.$$

Par produit de Cauchy de développements en série entière

$$(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient en étudiant le coefficient d'indice n

$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Exercice 125 : [énoncé]

(a) Cas: $n = 0$. Un polynôme P de A_0 est à coefficients positifs et prend la valeur 0 en 2, c'est nécessairement le polynôme nul.

Cas: $n \geq 1$. Soit $P \in A_n$. Celui-ci n'est pas nul, notons N son degré et écrivons

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_N X^N \text{ avec } a_0, \dots, a_N \in \mathbb{N} \text{ et } a_N \neq 0.$$

La condition $P(2) = n$ entraîne

$$n \geq a_N 2^N \geq 2^N.$$

On en déduit que le degré de P est majoré par $\log_2 n$. De plus, en étant large, on peut affirmer que les coefficients de P sont au plus compris entre 0 et n . Il n'y a donc qu'un nombre fini de polynômes solutions.

$A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{1\}$ et $A_2 = \{2, 1 + X\}$ donc $u_0 = u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $P \mapsto 1 + P$ transforme un polynôme de A_{2n} en un polynôme de A_{2n+1} . Inversement, un polynôme Q de A_{2n+1} a nécessairement un coefficient constant impair ce qui permet d'introduire $P = Q - 1$ qui est élément de A_{2n} . On en déduit $u_{2n} = u_{2n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $P \mapsto XP$ transforme un polynôme de A_n en un polynôme de A_{2n} dont le coefficient constant est nul et inversement, tout polynôme de A_{2n} de coefficient constant nul est de cette forme. De plus, comme au-dessus, on peut mettre en correspondance les polynômes de A_{2n} de coefficient constant non nul avec les polynômes de A_{2n-1} . On en déduit $u_{2n} = u_n + u_{2n-1}$.

- (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui précède donne

$$u_{2n} = u_{2n-2} + u_n \quad \text{donc} \quad u_{2n} - u_{2(n-1)} = u_n.$$

En sommant cette relation, on obtient par télescopage la relation demandée.

- (d)

```
def liste(n):
    if n == 0:
        L = [1]
    elif n % 2 == 1:
        L = liste(n-1)
        last = L[-1]
        L.append(last)
    else:
        L = liste(n-1)
        S = 0
        for k in range(n//2 + 1):
            S = S + L[k]
        L.append(S)
    return L
```

- (e) On peut conjecturer un rayon de convergence R égal à 1.

La suite (u_n) étant croissante, elle n'est pas de limite nulle et donc $R \leq 1$

Soit $\rho > 1$. Montrons $u_n \leq M\rho^n$ pour M bien choisi.

On raisonne par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ après une initialisation sur les rangs 0 à n_0 avec n_0 qui sera précisé par la suite.

La propriété est vraie aux rangs $0, \dots, n_0$ en choisissant M suffisamment grand :

$$M = \max \left\{ \frac{u_k}{\rho^k} \mid k \in \llbracket 0; n_0 \rrbracket \right\}.$$

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq n_0$.

Cas: $n + 1$ impair. La propriété est immédiate car $u_n = u_{n-1}$ et $\rho > 1$.

Cas: $n + 1$ pair. On écrit $n = 2p$. L'hypothèse de récurrence donne

$$u_{2p} \leq \sum_{k=0}^p M\rho^k = M \frac{\rho^{p+1} - 1}{\rho - 1} \leq M \frac{\rho^{p+1}}{\rho - 1} \leq M\rho^{2p}$$

sous réserve que $\rho^{p-1}(\rho - 1) \geq 1$ ce qu'il est possible d'obtenir pour p assez grand ce qui détermine la valeur de $n_0 \in \mathbb{N}$: on choisit celle-ci de sorte que

$$\rho^{n_0/2-1}(\rho - 1) \geq 1.$$

La récurrence est établie.

Cette comparaison assure que le rayon de convergence R est supérieur à $1/\rho$ et, puisque ceci vaut pour tout $\rho > 1$, on conclut $R = 1$.

Exercice 126 : [énoncé]

- (a) Considérons un ensemble E à $n + 1$ éléments. Parmi ceux-ci, choisissons un élément particulier que nous nommons x . Dans une partition de E , il existe une seule partie A contenant l'élément x et celle-ci est de cardinal $k + 1$ pour une certaine valeur de $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on construit une partition de E dont la partie contenant x est à $k + 1$ éléments en commençant par choisir k éléments dans $E \setminus \{x\}$ pour constituer A : cela offre $\binom{n}{k}$ possibilités. On complète ensuite la partie A à l'aide d'une partition de $E \setminus A$ afin de constituer une partition de E : cela offre B_{n-k} possibilités. Ainsi, il y a exactement $\binom{n}{k} B_{n-k}$ partitions de E dont la partie contenant x est de cardinal $k + 1$ et, finalement,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}.$$

En renversant l'indexation puis en exploitant la symétrie des coefficients binomiaux on obtient

$$B_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} B_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j.$$

- (b)

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * fact(n-1)
```



```
def binom(n,k): # Certes on peut faire mieux
    return fact(n)//fact(k)//fact(n-k)
```

```
def Bell(n):
    B = [1]
    for i in range(n):
        S = 0
        for k in range(i+1):
            S = S + binom(i,k)*B[k]
        B.append(S)
    return B
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

(c) Par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, vérifions $B_n \leq n!$

La propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq 2$. On a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \leq n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e \cdot n! \leq (n+1)!$$

car $n+1 \geq e$.

La récurrence est établie.

La suite $(B_n/n!)$ est bornée et le rayon de convergence de $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ est au moins égal à 1.

(d) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on sait que f est de classe \mathcal{C}^∞ et, pour tout $x \in]-R; R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^n.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$f'(x) = e^x f(x).$$

La résolution de cette équation différentielle linéaire sachant $f(0) = 1$ donne

$$f(x) = e^{e^x - 1}.$$

On peut alors exprimer B_n en déterminant le coefficient de x^n dans cette

série entière. On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} (e^x - 1)^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} e^{kx} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^n détermine $B_n/n!$ et donc

$$B_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{k^n}{p!}.$$

En réorganisant le calcul de cette somme (la famille est sommable)

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=k}^{+\infty} (-1)^{p-k} \frac{k^n}{k!(p-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

C'est la formule de Dobinski.

On peut aussi écrire

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \right)^p$$

auquel cas, on obtient

$$B_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \sum_{k_1+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!}.$$

Dans cette formule, le terme

$$\sum_{k_1+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!}$$

(où les k_j sont strictement positifs) se comprend comme le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments : ceci permet de comprendre le dénombrement réalisé ici. Au surplus, lorsque l'on connaît le nombre de ces surjections, on obtient

$$B_n = \sum_{p=1}^n \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{k^n}{p!}.$$

Ce n'est pas exactement la même formule qu'au-dessus mais on peut établir

$$\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{k^n}{p!} = 0$$

pour tout $p > n$.