Séries entières

Calcul de rayon de convergence concret

Exercice 1 [00971] [Correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

(b) $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$

(d) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

Exercice 2 [03054] [Correction]
Déterminer le rayon de convergence de :

(a) $\sum_{n\geq 0} n! z^n$

(b) $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n$

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

(d) $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) z^n$

Exercice 3 [00972] [Correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

(a) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$ (b) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$ (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Exercice 4 [03298] [Correction]

(a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n \text{ et } \sum \sin(\mathrm{e}^{-n}) x^n.$$

(b) Une série entière converge-t-elle normalement sur son disque ouvert de convergence ?

Exercice 5 [03383] [Correction]
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6 [02842] [Correction]
Quel est le rayon de convergence de $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$?

Exercice 7 [02841] [Correction]
On note a_n la n-ième décimale de $\sqrt{3}$.
Quel est l'intervalle de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 8 [02843] [Correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$?

Exercice 9 [00973] [Correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} d(n) z^n \text{ et } \sum_{n\geq 1} s(n) z^n$$

où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 10 [03483] [Correction]
Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}.$$

(a) Démontrer que $R_\alpha \leq 1$.

(b) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = (u_n)^{u_n}.$$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

En déduire que la série de terme général $1/u_n$ converge.
Dans la suite, on pose

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$

et on admet que α est irrationnel.

(c) Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}.$$

(d) Démontrer que $R_\alpha = 0$.

(e) Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.
Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Calcul de rayon de convergence abstrait

Exercice 11 [00977] [Correction]
Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R.

Exercice 12 [00975] [Correction]
On suppose que $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 13 [00978] [Correction]
Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 14 [00974] [Correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 15 [03310] [Correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de
$$\sum a_n^2 z^n.$$

Exercice 16 [03309] [Correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Déterminer le rayon de convergence de
$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Exercice 17 [02523] [Correction]
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul.

(a) Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $|a_n| \leq 1/r^n$ à partir d'un certain rang.

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

(c) On note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{S_n}{n!} z^n$?

Exercice 18 [03484] [Correction]
Soit (a_n) une suite de réels tous non nuls.
Quelle relation lie les rayons de convergence des séries entières ci-dessous
$$\sum a_n z^n \text{ et } \sum \frac{1}{a_n} z^n.$$

Exercice 19 [00976] [Correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose
$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$
et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

(a) Montrer que $R' \geq \max(1, R)$

(b) Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.

(c) Exprimer alors R' en fonction de R.

Exercice 20 [00979] [Correction]
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$.
Montrer que le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est $R = \min(R_a, R_b)$

Domaine de convergence

Exercice 21 [02855] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Déterminer la limite de (I_n).

(b) Donner un équivalent de (I_n).

(c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 22 [03016] [Correction]
Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose
$$I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

(a) Calculer $I(p,q)$.

(b) La série de terme général $u_n = I(n,n)$ est-elle convergente ou divergente ?

(c) Donner le domaine de définition réel de la série entière de $\sum u_n x^n$.

Étude de la somme d'une série entière concrète

Exercice 23 [03307] [Correction]
Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par
$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (-1)^n \ln(n) x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$.
On note S sa somme.

(b) Montrer que
$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[, S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}\right).$$

(c) En déduire que S admet une limite en 1^- et que
$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

(d) Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule de Wallis
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 24 [00038] [Correction]

(a) Étudier la convergence et préciser la limite éventuelle de (a_n) définie par
$$a_{n+1} = \ln(1+a_n) \text{ et } a_0 > 0.$$

(b) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

(c) Étudier la convergence de $\left(\sum a_n x^n\right)$ sur le bord de l'intervalle de convergence
(on pourra étudier la limite de $1/a_{n+1} - 1/a_n$ et utiliser le théorème de Cesaro)

Exercice 25 [03653] [Correction]
Pour x réel, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

(b) Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.

(c) Établir la continuité de f en -1.

(d) Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 26 [03890] [Correction]

(a) Donner l'intervalle de définition I de la fonction s qui au réel x associe
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

(b) Quel est le signe de s' sur $I \cap \mathbb{R}_+$?
Quelle est la limite de s en l'extrémité droite de $I \cap \mathbb{R}_+$?

(c) Écrire $(1-x)s'(x)$ sous forme d'une série et en déduire le signe de s' sur I.

(d) Étudier la convexité de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(x) = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)x.$$
En déduire que la fonction s est convexe.

Exercice 27 [03201] [Correction]
Soit
$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

(b) Étudier la convergence en $-R$ et en R.

(c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

(d) Montrer que quand $x \to 1^-$
$$(1-x)f(x) \to 0.$$

Exercice 28 [03663] [Correction]
On pose
$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ et } s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$
Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = 1.$$

Exercice 29 [05079] [Correction]
Pour x réel, on pose
$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)x^n.$$

(a) Préciser le domaine de définition de f.

(b) La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ?

Exercice 30 [05080] [Correction]
Pour x réel, on pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^n.$$

(a) Préciser l'intervalle de définition de f.

(b) Établir la continuité de f sur son domaine de définition.

(c) Déterminer la limite de f en -1.

(d) Étudier la dérivabilité de f et former une équation différentielle vérifiée par f.

Étude de la somme d'une série entière abstraite

Exercice 31 [00980] [Correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

(a) Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$.

(b) Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 32 [00983] [Correction]
Soit (a_n) une suite non nulle et T périodique (avec $T \in \mathbb{N}^*$).

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

(b) Simplifier $\sum_{k=0}^{nT-1} a_k x^k$. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$, une fraction rationnelle en x.

Exercice 33 [00982] [Correction]
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose
$$S_n \to +\infty \text{ et } a_n/S_n \to 0.$$
Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.

Exercice 34 [00984] [Correction]
Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que sur $[0\,;\alpha]$ on ait $S(x) = 0$.
Montrer que $S = 0$.

Exercice 35 [02854] [Correction]
Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

(a) Montrer que pour $0 < r < R$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta.$$

(b) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?

(c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $\left|f(z)\right| \leq P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 36 [02856] [Correction]
Soient $B = \left\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\right\}$ et f une fonction continue de B dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à B° est somme d'une série entière. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\geq 0}$ de polynôme convergeant uniformément vers f sur B.

Comportement en une extrémité de l'intervalle de convergence

Exercice 37 [03068] [Correction]
Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$$
converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.

(a) Déterminer I.

(b) On pose
$$a_1 = -1 \text{ et } a_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2.$$
Déterminer le domaine de définition de
$$g \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

(c) Trouver une relation entre f et g.

(d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

(e) Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to -1^+$

Exercice 38 [03783] [Correction]
Donner un équivalent simple quand $x \to 1^-$ de
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

Exercice 39 [02844] [Correction]

(a) Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence de
$$\sum (a_n \ln n) x^n \text{ et } \sum \left(a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n.$$

(b) Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 40 [02852] [Correction]

(a) Domaine de définition
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

(b) Déterminer un équivalent simple en 1.

Exercice 41 [03747] [Correction]

(a) Donner l'ensemble de définition de
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

(b) Calculer $f(-1)$ et $\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} dx$ où E est la fonction partie entière.

(c) Donner un équivalent de f en $x = 1$

Exercice 42 [02853] [Correction]
On pose

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ entière pour x réel.
On note $f(x)$ la somme de cette série entière.

(b) La fonction f est-elle continue en -1 ?

(c) Donner un équivalent simple de f en 1^-.

Exercice 43 [02394] [Correction]
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, on définit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0\,;1[$.

(a) Montrer que $\sum a_n$ est une série convergente.

(b) Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 44 [03245] [Correction]
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0.$$

Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on suppose que la fonction S est bornée.

(a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.

(b) Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 45 [03246] [Correction]
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme

$$x \in \left]-1\,;1\right[\mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que la série numérique $\sum a_n$ converge, montrer que la fonction f est définie et continue en 1.

Exercice 46 [03244] [Correction]
Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.
On suppose l'existence d'un réel

$$\ell = \lim_{x\to 1^-} f(x).$$

(a) Peut-on affirmer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?

(b) Que dire si l'on sait de plus $a_n = \mathrm{o}(1/n)$? [Théorème de Tauber]

Exercice 47 [00985] [Correction]
Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$.
On suppose que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est R et que cette série diverge en R.

(a) On suppose que $a_n = \mathrm{o}(b_n)$. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ quand $x \to R^-$.

(b) On suppose que $a_n \sim b_n$. Que dire de $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de R ?

Exercice 48 [02452] [Correction]
Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = \mathrm{o}(p_n)$.
On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}.$$

(a) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$ et étudier la limite de $(1 - x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(b) Ici $p_n = n^q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \geq 2$. Donner un équivalent simple de f en 1.

Exercice 49 [02483] [Correction]
Soit $\alpha > -1$.

(a) Donner le rayon de convergence R de
$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n.$$
On désire trouver un équivalent de f_α lorsque $x \to R^-$.

(b) On suppose que α est un entier p.
Calculer f_0, f_1. Donner avec un logiciel de calcul formel l'expression de $f_2, \dots, f_5$.
Trouver les équivalents recherchés.
Montrer qu'il existe $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$f_p(x) = \frac{Q_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$
(on calculera f_p'). En déduire l'équivalent recherché.

(c) On suppose $\alpha > -1$ quelconque.
Donner le développement en série entière de
$$\frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}}.$$
On notera b_n ses coefficients.
Montrer qu'il existe $A(\alpha) > 0$ tel que $n^\alpha \sim A(\alpha) b_n$. On étudiera la nature de la série de terme général
$$\ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n}.$$
En déduire que $f_\alpha(x)$ est équivalente à
$$\frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$$
quand x tend vers R^-.

Exercice 50 [03989] [Correction]
On pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n.$$

(a) Déterminer les rayons de convergence de f et de g.

(b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1\,;1[$.

(c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$.

(d) Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $[-1\,;1[$.

(e) Trouver des équivalents de f et g en 1.

Exercice 51 [05074] [Correction]
Pour x réel, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.

(b) Préciser l'intervalle de définition de f.

(c) Établir la continuité de f sur son domaine de définition.

(d) Déterminer la limite de f en -1.

Exercice 52 [05078] [Correction]
Pour x réel, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.

(b) Préciser l'intervalle de définition de f.

(c) Établir la continuité de f sur son domaine de définition.

(d) Déterminer un équivalent de f en 1 sachant $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Fonctions développables en série entière

Exercice 53 [03303] [Correction]
Soit $f : \left]-R\,;R\right[\to \mathbb{R}$ (avec $R > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;R[, f^{(n)}(x) \geq 0.$$
Montrer la convergence de la série
$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$
pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$.

Exercice 54 [00994] [Correction]
Soient $a > 0$ et $f\colon]-a\,;a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0.

Exercice 55 [00993] [Correction]
(Fonction absolument monotone) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 56 [03358] [Correction]
Montrer que la fonction
$$f\colon x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$$
admet un développement en série entière de rayon de convergence $R \geq 1$.

Exercice 57 [03302] [Correction]
Établir que la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x}$$
est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

Exercice 58 [03687] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}.$$
(a) Montrer que la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(b) Observer que le rayon de convergence de sa série de Taylor en 0 est nul.

Exercice 59 [02975] [Correction]
Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de carré sommable, on pose
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n - t}$$
où la variable t est réelle.

(a) Préciser le domaine de définition de f.
(b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
(c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2\,;1/2]$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est identiquement nulle.

Exercice 60 [02506] [Correction]
Soit $a \in]-1\,;1[$. On pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x).$$
(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \frac{1}{1 - |a|}.$$
(c) Montrer que f est développable en série entière.

Calcul de développement en série entières

Exercice 61 [00987] [Correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction
$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1).$$

Exercice 62 [00988] [Correction]
Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$.
Calculer c_n, le n-ième coefficient du développement en série entière en 0 de
$$x \mapsto \frac{1}{(1 - ax)(1 - bx)}.$$
Exprimer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n.$$

Exercice 63 [00990] [Correction]
Former le développement en série entière de

$$\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2}$$

pour $|z|<1$ et $t\in\,]0\,;\pi[$.

Exercice 64 [03485] [Correction]
Former le développement en série entière de

$$f\colon x\mapsto\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Exercice 65 [00995] [Correction]
Réaliser le développement en série entière en 0 de $x\mapsto\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 66 [02859] [Correction]

(a) Montrer, si $t\in\mathbb{R}$:
$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\right|\leq\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|t^n|\left|f(t)\right|\mathrm{d}t\right)_{n\geq0}$ soit bornée.

Montrer que $F\colon x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(t)$ est développable en série entière en 0.

Exercice 67 [03761] [Correction]
Pour $x\in\,]-1\,;1[$, on pose

$$f(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}.$$

(a) Justifier
$$\forall x\in\,]-1\,;1[,\,f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}\right)^2x^{2n}.$$

(b) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x\to1^-$.

Exercice 68 [03707] [Correction]

(a) Pour quel réel x, l'intégrale suivante existe-t-elle
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t}\,?.$$

(b) Donner alors sa valeur.

(c) Montrer que
$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t}$$
est développable en série entière et exprimer ce développement.

Exercice 69 [02512] [Correction]

(a) Quel est le domaine de définition de
$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{x+n}$$
pour $a\in\,]-1\,;1[\,$?

(b) Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$.

(c) Développer en série entière
$$S(x)-\frac{1}{x}.$$

Exercice 70 [03878] [Correction]
Pour $\alpha\in[0\,;1[$ et $x\in\mathbb{R}$ on pose

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{sh}(\alpha^nx).$$

(a) Montrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Former une relation engageant $S(\alpha x)$ et $S(x)$.

(c) Établir que la fonction S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et exprimer ce développement.

Exercice 71 [03899] [Correction]
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Former le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}.$$

Exercice 72 [02605] [Correction]
Soit $\alpha \in \left]-1\,;1\right[$.

(a) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite de terme général

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \left(1-\alpha^k x\right)$$

vers une limite que l'on notera $P(x)$.

(b) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(E)\colon \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x)f(\alpha x).$$

Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0)P(x).$$

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto P(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 73 [02520] [Correction]
Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right).$$

(a) Montrer que $\left|P_n(z)\right| \le P_n(-|z|)$.
En déduire que la suite $\left(P_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Indice : on pourra penser à introduire $\ln P_n(-|z|)$.

(b) En étudiant la convergence de la série $\sum\left(P_{n+1}(z) - P_n(z)\right)$, établir la convergence de la suite $\left(P_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
On introduit la fonction

$$f\colon z \mapsto \lim_{n\to+\infty} P_n(z).$$

(c) Montrer que f est continue en 0.

(d) Montrer que f est l'unique fonction continue en 0 vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (1-z)f(z/2) \text{ et } f(0) = 1.$$

(e) Montrer que f est développable en série entière.

Calcul de développement par dérivation intégration

Exercice 74 [00986] [Correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln\left(x^2 - 5x + 6\right).$$

Exercice 75 [02857] [Correction]
Développer en série entière

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}.$$

Exercice 76 [00078] [Correction]
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \left]0\,;\pi/2\right[$.

(a) Calculer la partie imaginaire du complexe

$$\frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - x\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$$

(b) En déduire le développement en série entière de

$$f(x) = \arctan\left(x - \frac{1}{\tan\theta}\right).$$

Exercice 77 [02525] [Correction]
Montrer que

$$f(x) = \arctan(1+x)$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer cette série entière.

Exercice 78 [02848] [Correction]
Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right).$$

Calcul de développement par équation différentielle

Exercice 79 [01013] [Correction]
Soient $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.

(b) Calculer $f(x)$ en étudiant $(1-x)f'(x)$.

Exercice 80 [00937] [Correction]
Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t.$$

(a) en procédant à une intégration terme à terme.

(b) en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution.

Exercice 81 [02858] [Correction]
Développer en série entière $f : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0.

Exercice 82 [03699] [Correction]

(a) Quel est l'ensemble de définition de

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ ?.$$

(b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec pour condition initiale $f(0) = 0$.

(c) Montrer que f est développable en série entière et en donner le rayon de convergence.

Exercice 83 [01015] [Correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 84 [01018] [Correction]
Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x).$$

Exercice 85 [03694] [Correction]

(a) Étudier la parité de

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle à déterminer.

(c) Justifier que f est développable en série entière et donner ce développement.

Exercice 86 [03659] [Correction]

(a) Former une équation différentielle vérifiée par

$$f : x > -1 \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire le développable en série entière en 0 de f.

Exercice 87 [03301] [Correction]
Développer $f(x) = \operatorname{ch}(x)\cos(x)$ en série entière en l'exprimant à l'aide de fonctions exponentielles.
Retrouver le résultat en remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

Exercice 88 [02500] [Correction]
Soient $k > 0$ et

$$f(x) = \int_0^1 t^k \sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) + (k+1) f(x) = \sin x.$$

(c) Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de $xy' + (k+1)y = \sin x$ en précisant le rayon de convergence.

Exercice 89 [02498] [Correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E)\colon ty' + y = 3t^2 \cos(t^{3/2}).$$

(a) Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) développable en série entière sur un voisinage de 0.
(b) Trouver l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire une expression plus simple de v.

Calcul de sommes de séries entières

Exercice 90 [00997] [Correction]
Soit

$$f\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$

(a) Déterminer l'intervalle de convergence de f.
(b) Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1\,;1[$
(c) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 91 [00996] [Correction]
Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^{2n}.$$

Exercice 92 [00998] [Correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n.$$

Exercice 93 [03648] [Correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}.$$

Exercice 94 [02845] [Correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}.$$

Exercice 95 [00999] [Correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Exercice 96 [01000] [Correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$$

Exercice 97 [01001] [Correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}.$$

Exercice 98 [02448] [Correction]
Pour $n > 0$, on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \,\mathrm{d}t.$$

(a) Trouver la limite de (a_n).
(b) Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n.
(c) On pose

$$u_n(x) = \frac{a_n}{n^\alpha} x^n.$$

Donner la nature de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et de α.

(d) On pose
$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n.$$
Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 99 [02449] [Correction]
Soit (a_n) la suite définie par
$$a_0=1 \text{ et } a_n=\frac{1}{n!}\int_0^1\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,\mathrm{d}t \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*.$$

(a) Rayon de convergence de $\sum a_nx^n$.
(b) Somme de $\sum a_nx^n$.

Exercice 100 [02847] [Correction]

(a) Déterminer le rayon de convergence R de
$$\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}x^n.$$
(b) Pour $x\in\left]-R\,;R\right[$ calculer la somme précédente.

Exercice 101 [03791] [Correction]
Étude et expression de la série
$$\sum_{n=0}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n.$$

Exercice 102 [00075] [Correction]
Calculer
$$S_0(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$$
(on pourra calculer $S_k(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+k}}{(3n+k)!}$ pour $k\in\{0,1,2\}$)

Exercice 103 [02414] [Correction]
Soient $\sum a_nx^n$ et $\sum b_nx^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'.

(a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum c_nx^n$ avec $c_n=\sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}$.
(b) Déterminer le rayon de convergence et la somme de
$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Exercice 104 [02565] [Correction]
Trouver le rayon de convergence de
$$\sum_{n\geq 1}\frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)}x^n.$$
Calculer la somme dans le bon intervalle.

Exercice 105 [02551] [Correction]
Calculer
$$a_n=\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$
pour $n\in\mathbb{N}^*$.
Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$.
Calculer la somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 106 [02607] [Correction]
Pour $n\geq 0$, on pose
$$a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,\mathrm{d}t.$$

(a) Trouver la limite de la suite (a_n).
(b) Donner une relation simple entre a_{n+2} et a_n.
(c) On pose $f(x)$ la somme de la série entière
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$
Déterminer l'intervalle de définition de f.

(d) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 107 [02534] [Correction]
On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \cos(n\theta).$$

(a) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$.

(b) Montrer que pour tout $\theta \neq k\pi$, la série $\sum \frac{a_n}{n+1}$ converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

(c) Calculer cette intégrale pour $\theta \in \left]0\,;\pi\right[$.

Exercice 108 [05081] [Correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le rayon de convergence et la somme sur son intervalle ouvert de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n.$$

Exercice 109 [05085] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \operatorname{tr}\left(A^n\right) z^n$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Application à la détermination du terme général d'une suite

Exercice 110 [02850] [Correction]
On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k.$$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!} x^n$.

Exercice 111 [01010] [Correction]

(a) Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

(b) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n.$$

Exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de ses premiers termes.

Exercice 112 [01011] [Correction]
On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k.$$

(a) Donner une formule permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

(b) Calculer $S(x)$.

(c) Calculer les a_n.

(d) Donner un équivalent de la suite (a_n).

Exercice 113 [02451] [Correction]
On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1\,;n]\!]$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n) = N(n,0)$, puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n.$$

(a) relier $N(n,p)$ et $D(n-p)$.

(b) Justifier la définition de f sur $\left]-1\,;1\right[$ puis calculer f.

(c) Calculer $N(n,p)$.

(d) Étudier la limite de $\left(\frac{1}{n!}N(n,p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 114 [05076] [Correction]
Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par

$$u_0=\alpha,\ u_1=\beta \quad \text{et} \quad u_{n+2}=u_{n+1}+2(n+1)u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Déterminer une fonction $S\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$S^{(n)}(0)=u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 115 [05077] [Correction]
Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ la suite déterminée[1] par

$$B_0=1 \quad \text{et} \quad B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

(a) Montrer que la série entière $\sum \frac{B_n}{n!}x^n$ est de rayon de convergence $R\geq 1$.

(b) Vérifier

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1} \quad \text{pour tout } x\in\,]-R\,;R[.$$

(c) En déduire

$$B_n=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Application à la régulatité d'un prolongement continu

Exercice 116 [01002] [Correction]

(a) Montrer que la fonction $x\mapsto\frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x\mapsto\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 117 [03308] [Correction]
Pour $x\neq 0$ on pose

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.

(b) Montrer que ce prolongement est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

1. B_n est le nombre de partitions possibles dans un ensemble fini à n éléments.

Application au calcul de sommes

Exercice 118 [01003] [Correction]
Montrer que pour tout $a>0$,

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}.$$

En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 119 [01009] [Correction]

(a) On note γ la constante d'Euler. Établir l'égalité

$$\gamma=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

(b) En déduire que

$$\gamma=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k).$$

Exercice 120 [02808] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)\times 3^n}.$$

Intégration terme à terme de séries entières

Exercice 121 [01004] [Correction]
Montrer

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 122 [01006] [Correction]
Montrer
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x.$$
En déduire la valeur de cette somme.

Exercice 123 [01008] [Correction]
Observer que pour tout $x\in\,]-1\,;1[$,
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\pi(\sqrt{1+x}-1).$$

Exercice 124 [00131] [Correction]
Soit $f\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Déterminer la limite de la suite de terme général
$$u_n=\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Déterminer la limite de
$$v_n=\int_0^1 n\ln\bigl(1+t^n\bigr)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 125 [02865] [Correction]
Étudier la limite de la suite de terme général
$$I_n=n\int_0^1\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 126 [02597] [Correction]
Montrer que $g\colon t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $h\colon t\mapsto g(t)\mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$ existe et calculer son intégrale.

Exercice 127 [04106] [Correction]
On considère une série entière complexe $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ de rayon de convergence $R>0$.
On note f sa somme définie pour $|z|<R$ par
$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n.$$

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et montrer que $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ converge normalement sur le disque $D(0,r)=\bigl\{z\in\mathbb{C},|z|\leq r\bigr\}$ si $0<r<R$.

(b) Soit r un réel tel que $0<r<R$, montrer que la fonction
$$z\mapsto\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{Im}(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))}{r-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$
est développable en série entière et exprimer la somme de cette série entière en fonction de $f(z)$ et de $f(0)$.

(c) Déterminer les fonctions f, développables en série entière sur $D(0,R)$, et qui ne prennent que des valeurs réelles sur un ensemble de la forme $\bigl\{z\in\mathbb{C},|z|=r\bigr\}$ pour $0<r<R$.

Exercice 128 [04941] [Correction]

(a) Montrer que, pour tout $a\in\,]0\,;1[$, l'intégrale suivante converge :
$$\int_0^a\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Justifier que, pour tout $a\in\,]0\,;1[$,
$$\int_0^a\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n(n+1)}.$$

(c) En déduire la convergence et la valeur de
$$\int_0^1\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 129 [05051] [Correction]
Montrer
$$\int_0^1\frac{\ln(t)\ln\bigl(1-t^2\bigr)}{t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)^2}$$
et en déduire la valeur de l'intégrale.

Applications variées des séries entières

Exercice 130 [02422] [Correction]

(a) Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}$$

avec m, n deux entiers non nuls.

(b) Déterminer deux polynômes U et V tels que

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1.$$

Exercice 131 [03074] [Correction]
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n.$$

On pose donc, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

(b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x > r$, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer cette intégrale sous forme de série entière en $1/x$.

Exercice 132 [00707] [Correction]
Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

(a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Montrer que $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme dont la plus petite puissance de x est de degré $\geq N+1$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B^2 = I + A.$$

Exercice 133 [03932] [Correction]
(Formule de Chu-Vandermonde) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Établir

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Exercice 134 [04175] [Correction]
On note A l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \left\{P \in A \,\middle|\, P(2) = n\right\}.$$

(a) Montrer que A_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note u_n son cardinal. Calculer u_0, u_1 et u_2.

(b) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} = u_{2n-1} + u_n.$$

(c) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(d) Écrire un programme **Python** qui renvoie la liste des 100 premiers termes de la suite (u_n).

(e) Quelle conjecture peut-on faire sur le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$? La démontrer !

Exercice 135 [04176] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On posera $B_0 = 1$.

(a) Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

(b) Écrire une fonction `Bell(n)` donnant la liste $(B_k)_{0 \le k \le n}$

(c) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{B_n}{n!} x^n$ est strictement positif.

(d) Soit
$$f\colon x \in \left]-R\,;R\right[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Déterminer une équation différentielle dont f est solution. Exprimer f et donner une expression de B_n.

Exercice 136 [05087] [Correction]
Soit $q \in \left]-1\,;1\right[$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant
$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = (1+x)f(qx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
et vérifier que celle-ci est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Posons $a_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|z|}{3}$$

donc $R = 3$.

(b) Posons $b_n(z) = z^n \mathrm{e}^{-n^2}$.

$$n^2 b_n(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}$$

donc $R = +\infty$.

(c) Posons $c_n(z) = \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{c_{n+1}(z)}{c_n(z)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|^2$$

donc $R = 1$.

(d) Posons $d_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{d_{n+1}(z)}{d_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} |z|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}|z|^3$$

donc $R = \mathrm{e}^{-1/3}$.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1)|z| \to +\infty$$

donc $R = 0$.

(b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|z| \to 4|z|$$

donc $R = 1/4$.

(c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}|z| \to 27|z|$$

donc $R = 1/27$.

(d)

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1\right)$$

or $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Par suite $R = 1$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

(b) Posons $a_n = \sin n$.
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

(c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.
(a_n) est bornée donc $R \geq 1$.
Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2}|z|^n\right)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) On a

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

donc le rayon de convergence de la première série entière vaut 1.
Aussi

$$\sin\left(\mathrm{e}^{-n}\right) \sim \mathrm{e}^{-n}$$

donc le rayon de convergence de la deuxième série entière vaut e.

(b) On sait qu'une série entière converge normalement sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence, mais en revanche elle ne converge pas normalement sur ce disque. La série entière $\sum z^n$ est un contre-exemple car

$$R = 1 \text{ et } \left\|z \mapsto z^n\right\|_{\infty,D(0,1)} = 1.$$

Exercice 5 : [énoncé]
La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son terme général est donné par

$$a_n = \alpha + n(\beta - \alpha).$$

Si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ alors $R = 1$.
Si $(\alpha,\beta) = (0,0)$ alors $R = +\infty$.

Exercice 6 : [énoncé]
Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}}x^{2n}$. Après calculs

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi x^2$$

donc $R = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 7 : [énoncé]
La suite (a_n) est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).
Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n.
En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend par 0.
On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même pour $x = -1$.
On conclut que l'intervalle cherché est

$$]-1\,;1[.$$

Exercice 8 : [énoncé]
Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Étudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geq 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 9 : [énoncé]
$d(n) \not\to 0$ donc $R_d \leq 1$ $d(n) \leq n$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} nz^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geq 1$. On peut conclure $R_d = 1$.
De même, en exploitant $s(n) \not\to 0$ et

$$s(n) \leq 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

on a $R_s = 1$.

Exercice 10 : [énoncé]
Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n\pi\alpha) \neq 0.$$

(a) Puisque

$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geq 1$$

la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leq 1$.

(b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n - 1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

(c) On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}\frac{1}{u_k}$$

et puisque la suite (u_n) est croissante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{K}{u_{n+1}}$$

avec

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}.$$

On en déduit

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{K\pi u_n}{u_{n+1}} = \frac{K\pi}{u_n^{u_n-1}}.$$

(d) Considérons $m = u_n \in \mathbb{N}^*$. Quand $n \to +\infty$, on a pour $x > 0$

$$\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \to -\infty.$$

En effet

$$m\alpha = u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}.$$

Or

$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_n}{u_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{k+1}}{u_k} \in 1 + 2\mathbb{N}$$

et donc

$$-\sin(m\pi\alpha) = \sin\left(\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}\right)$$

d'où

$$0 \le -\sin(m\pi\alpha) \le \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$

puis

$$-\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \ge C\frac{(xu_n)^{u_n}}{u_n} \to +\infty.$$

On en déduit que $\sum_{n\ge 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge pour tout $x > 0$ et donc $R_\alpha = 0$.

(e) Par l'absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $qu_n\alpha \in \mathbb{N}$ or

$$qu_n\alpha = qu_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

avec comme vu ci-dessus

$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}.$$

On en déduit

$$qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}.$$

Or

$$0 < qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} < \frac{qKu_n}{u_{n+1}} \to 0.$$

C'est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]
Par la convergence de $\sum_{n\ge 0} a_n z_0^n$ on a déjà $R \ge |z_0|$. Si $R > |z_0|$ alors il y a absolue convergence en z_0 ce qui est exclu par hypothèse. On conclut $R = |z_0|$.

Exercice 12 : [énoncé]
Pour $z \ne 0$, on observe que $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \to \ell|z|$. Or il est connu que pour $\sum u_n$ série à termes positifs, si $\sqrt[n]{u_n} \to m \in [0\,;1[$ alors la série converge et si $\sqrt[n]{u_n} \to m > 1$ alors la série diverge (ce résultat s'obtient par comparaison avec une suite géométrique).
Si $\ell = 0$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \to 0$ donc $\sum a_n z^n$ converge en z et donc $R = +\infty$.
Si $\ell \in]0\,;+\infty[$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/\ell$, $\sum a_n z^n$ converge tandis que pour $|z| > 1/\ell$, $\sum a_n z^n$ diverge. On en déduit $R = 1/\ell$
Si $\ell = +\infty$ alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Exercice 13 : [énoncé]
Posons $b_n = n^\alpha a_n$ et comparons R_a et R_b.
Cas $\alpha = 0$: ok
Cas $\alpha > 0$: on a $a_n = o(b_n)$ et donc

$$R_a \ge R_b.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$, en considérant, $\rho \in]|z|\,;R_a[$, on peut écrire

$$b_n z^n = n^\alpha a_n z^n = a_n \rho^n \times n^\alpha \frac{z^n}{\rho^n} = o(a_n \rho^n).$$

Puisque $\sum a_n \rho^n$ converge absolument, la série $\sum b_n z^n$ converge et donc $R_b \ge |z|$.
Or ceci pour tout z tel que $|z| < R_a$ donc

$$R_b \ge R_a.$$

Finalement

$$R_a = R_b.$$

Cas $\alpha < 0$: on écrit $a_n = n^{-\alpha} b_n$ et on exploite ce qui précède.

Exercice 14 : [énoncé]
Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.
Pour $|z| < \sqrt{R}$, $|z^2| < R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.
Pour $|z| > \sqrt{R}$, $|z^2| > R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.
On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Exercice 15 : [énoncé]
Montrons par double inégalité que le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$ vaut

$$R' = R^2.$$

Soit $|z| < R$.
Puisque la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, on a $a_n z^n \to 0$ et donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$.
Or pour $|Z| > R'$, on sait que la suite $(a_n^2 Z^n)$ n'est pas bornée. On en déduit $|z|^2 \leq R'$ et donc

$$R \leq \sqrt{R'}.$$

Soit $|z| < \sqrt{R'}$.
On a $|z|^2 < R'$ et donc $\left|a_n^2 z^{2n}\right| \to 0$ puis $\left|a_n z^n\right| \to 0$. On en déduit $|z| \leq R$ et donc

$$\sqrt{R'} \leq R.$$

Exercice 16 : [énoncé]
Soit $r \in \left]0\,;R\right[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n = \mathrm{o}(a_n r^n)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Pour $r \in \left]0\,;R\right[$, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge donc $a_n r^n \to 0$ et à partir d'un certain rang N, on a

$$|a_n| r^n \leq 1.$$

(b) On a alors

$$\frac{a_n z^n}{n!} = \mathrm{O}\left(\frac{z^n}{r^n n!}\right).$$

Posons

$$u_n(z) = \frac{z^n}{r^n n!}.$$

Pour $z \neq 0$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.
Par comparaison, la série numérique $\sum a_n z^n/n!$ converge aussi absolument.
On peut donc la série entière $\sum a_n z^n/n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

(c) On a

$$|S_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \frac{n-N}{r^n}$$

et donc $S_n = \mathrm{O}(n/r^n)$ puis

$$\frac{S_n z^n}{n!} = \mathrm{O}\left(\frac{z^n}{r^n (n-1)!}\right).$$

Comme ci-dessus, la série entière $\sum S_n z^n/n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 18 : [énoncé]
Notons R et R' les deux rayons de convergence de séries entières introduites.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge et donc $a_n z^n \to 0$. On en déduit que

$$\left|\frac{1}{a_n z^n}\right| \to +\infty$$

et donc $|1/z| > R'$ d'où $|z| < 1/R'$. On en déduit $R \leq 1/R'$ puis

$$RR' \leq 1.$$

On ne peut affirmer mieux puisque, pour

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient $RR' = 1/2$.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) On a $|b_n| \leq |a_n|$ donc $R' \geq R$. On a $|b_n| \leq 1$ donc $R' \geq 1$

(b) Si $R' > 1$ alors $b_n \to 0$ et puisque $|b_n| = \frac{|a_n|}{1+|a_n|}$ donne $|a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|}$, on obtient $a_n = \mathrm{O}(|b_n|)$ donc $R \geq R'$.
Par suite $R = R'$ d'où $R' = \max(1, R)$.

(c) Si $R' = 1$ alors $1 \geq R$ et $R' = \max(1, R)$.

Exercice 20 : [énoncé]
Par sommation de séries entière, on sait déjà $R \geq \min(R_a, R_b)$
De plus, puisque $a_n b_n = 0$ on peut affirmer $|a_n| \leq |a_n + b_n|$ et donc $R \leq R_a$ et de même $R \leq R_b$ et donc $R \leq \min(R_a, R_b)$ puis $R = \min(R_a, R_b)$.

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Pour $t > 1$, $\mathrm{e}^{-t^n} \to 0$ avec $0 \leq \mathrm{e}^{-t^n} \leq \mathrm{e}^{-t}$. Par convergence dominée $I_n \to 0$.

(b) Par le changement de variable $u = t^n$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,
$$I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$
Par convergence dominée,
$$\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$
donc
$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

(c) Par l'équivalent précédent $R = 1$ et la série entière diverge en 1. Par application du critère spécial des séries alternées, la série entière converge en -1.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties
$$I(p,q) = \frac{p}{q+1}I(p-1,q+1)$$
puis
$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

(b)
$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ et } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to \frac{1}{4} < 1$$
donc $\sum u_n$ converge.

(c) Par le calcul ci-dessus $R = 4$ donc $]-4\,;4[\ \subset \mathcal{D} \subset [-4\,;4]$.
Par la formule de Stirling :
$$u_n \sim \frac{2\pi n^{2n+1}}{\mathrm{e}^{2n}}\frac{\mathrm{e}^{2n+1}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{(2n+1)}} = \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}}{\sqrt{2n+1}}\frac{1}{2^{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$$
et
$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} = \exp\left((2n+1)\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right) \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$
donc
$$u_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\sqrt{n}}$$
$4^n u_n \sim \sqrt{\pi}/2\sqrt{n}$ et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum 4^n u_n$ diverge. $4 \notin \mathcal{D}$.
$v_n = (-4)^n u_n$, (v_n) est alternée, $|v_n| \to 0$ et
$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$$
donc $(|v_n|)$ est décroissante.
Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum v_n$ converge et donc $-4 \in \mathcal{D}$. Finalement $\mathcal{D} = [-4\,;4[$.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) $R = 1$.

(b) Pour $x \in\ ]-1\,;1[$, on a
$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln(n)x^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln(n)x^{n+1}.$$
Après décalage d'indice et réunion des deux sommes
$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)x^{n+1}$$
ce qui conduit à la relation demandée.

(c) Posons

$$g_n(x) = (-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue.
À l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ ce qui assure que sa somme est continue. On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

(d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)^2\right).$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $a_0 > 0$, la suite récurrente (a_n) est bien définie et à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Sachant $\ln(1+x) \le x$, on peut affirmer que la suite (a_n) est décroissante. Or elle est minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \ge 0$. En passant la relation $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ à la limite, on obtient $\ell = \ln(1+\ell)$ ce qui entraîne $\ell = 0$ (car $\ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$). Finalement $a_n \to 0^+$.

(b) On a alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_n} \to 1$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

(c) Pour $x = -1$, la série numérique

$$\sum a_n(-1)^n$$

converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.
Pour $x = 1$, déterminons la nature de la série numérique $\sum a_n$
On a

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n(a_n + o(a_n))} \to \frac{1}{2}.$$

Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right) \to \frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$a_n \sim \frac{2}{n}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Pour $x \ne 0$, posons $u_n = x^n/\sqrt{n} \ne 0$. On a $|u_{n+1}/u_n| \to |x|$ donc $R = 1$.

(b) En $x = 1$, f n'est pas définie car il y a divergence de la série de Riemann $\sum 1/\sqrt{n}$.
En $x = -1$, f est définie car il y a convergence de la série alternée $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ satisfaisant le critère spécial.

(c) Posons $u_n(x) = x^n/\sqrt{n}$ pour $x \in [-1\,;0]$.
Chaque fonction u_n est continue et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[-1\,;0]$ en vertu du critère spécial des séries alternées. On a de plus

$$\left|R_n(x)\right| \le \left|u_{n+1}(x)\right| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

et il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-1\,;0]$.
On en déduit que sa somme est continue sur $[-1\,;0]$ et donc f est notamment continue en -1.

(d) Pour tout $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} \leq n$ donc pour tout $x \in [0\,;1[$

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty.$$

Donc f tend vers $+\infty$ en 1^-.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) s est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
La série diverge en $x = 1$ (par série de Riemann avec $1/2 \leq 1$) et converge en $x = -1$ par application du critère spécial des séries alternées. On conclut $I = [-1\,;1[$.

(b) Puisque s est la somme d'une série entière, on peut dériver terme à terme sur $]-1\,;1[$ et

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n.$$

Sur $I \cap \mathbb{R}_+$, cette somme est positive. La fonction s est donc croissante sur $[0\,;1[$.
Si celle-ci était majorée par un réel M, nous aurions pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in [0\,;1[, \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leq M.$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq M.$$

Ceci est absurde car la série à termes positifs $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge et ne peut donc avoir ses sommes partielles majorées. La fonction s est donc croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$ en 1^-.

(c) Pour $x \in]-1\,;1[$

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \bigl(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\bigr) x^n.$$

Pour $x \leq 0$, on peut écrire $x = -t$ avec $t \geq 0$ et alors

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n$$

avec $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$. On vérifie que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et donc le critère spécial s'applique à la série alternée $\sum (-1)^n a_n t^n$. Sa somme est donc du signe de son premier terme ce qui fournit $(1-x)s'(x) \geq 0$. On en déduit

$$\forall x \in]-1\,;0], s'(x) \geq 0.$$

(d) Après étude (un peu lourde) du signe de $f''(x)$, on peut affirmer que f est concave et croissante.
Pour $x \in [0\,;1[$, on a clairement $s''(x) \geq 0$. Pour $x \in]-1\,;0]$, considérons

$$\bigl((1-x)s'(x)\bigr)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) x^n$$

puis

$$(1-x)\bigl((1-x)s'(x)\bigr)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \bigl(f(n+1) - f(n)\bigr) x^n.$$

Posons $b_n = f(n+1) - f(n) \geq 0$.
On vérifie $b_n \to 0$ et $b_{n+1} \leq b_n$ car la concavité de f fournit

$$\frac{b_n + b_{n+2}}{2} \leq b_{n+1}.$$

Le critère spécial de série alternée s'applique à nouveau, la somme est du signe de son premier terme et cela fournit

$$(1-x)\bigl((1-x)s'(x)\bigr)' \geq 0$$

puis $s''(x) \geq 0$ car on sait $s'(x) \geq 0$.
Finalement s est convexe.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Posons

$$a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $a_{n+1}/a_n \to 1$, on peut affirmer $R = 1$.

(b) La suite (a_n) décroît vers 0 donc par le critère spécial des séries alternée, la série entière converge en $x = -1$.
Puisque $a_n \sim 1/\sqrt{n}$, par équivalence de séries à termes positifs, la série entière diverge en $x = 1$.

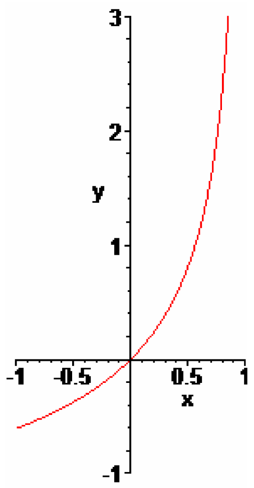

FIGURE 1 – Allure de la fonction s

(c) Par positivité des termes sommés, on a pour $x \in [0;1]$,

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \xrightarrow[x \to 1^-]{} \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Puisque

$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty.$$

Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq M + 1$$

et pour x au voisinage de 1^-

$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M$$

puis

$$f(x) \geq M.$$

On peut donc affirmer que

$$f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty.$$

(d) On a

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^{n+1}$$

et par décalage d'indice

$$(1-x)f(x) = \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n.$$

Puisque

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

la série entière en second membre est définie et continue en 1 par convergence normale de la série de fonctions associée. On en déduit

$$(1-x)f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) = 0.$$

Il est aussi possible de procéder par les en ε exploitant

$$\left|\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 28 : [énoncé]
Les rayons de convergences des séries entières définissants c et s sont infinis et on reconnaît

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = \cos x \text{ et } s(x) = \sin x$$

de sorte qu'on a déjà

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x)^2 + s(x)^2 = 1.$$

Par opérations sur les séries entières, on sait qu'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et l'on peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développable en série entière

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0$$

donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = 1.$$

Exercice 29 : [énoncé]

(a) *La fonction f est la somme d'une série entière : on détermine son domaine de définition en commençant par un calcul de rayon de convergence.*

Introduisons le coefficient de la série entière définissant f

$$a_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

En employant le développement limité $\sin(u) = u - \frac{1}{6}u^3 + \mathrm{o}(u^3)$ quand u tend vers 0, on remarque

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}.$$

On vérifie ensuite par le critère de d'Alembert que la série entière $\sum \frac{1}{6n^3} x^n$ a pour rayon de convergence 1. En effet, pour $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6n^3}{6(n+1)^3}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Par équivalence des coefficients, la série entière définissant f est aussi de rayon de convergence égal à 1.

La somme d'une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ est assurément définie sur $]-R\,;R[$ et l'est peut-être aussi en R et/ou en $-R$.

La fonction f est définie sur un intervalle contenant $]-1\,;1[$ et inclus dans $[-1\,;1]$.
Pour $x = 1$ ou $x = -1$, la série définissant $f(x)$ converge absolument et donc converge car

$$\left|a_n x^n\right| = |a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{6n^3} \text{ converge.}$$

Ainsi, la fonction f est définie sur $[-1\,;1]$.

(b) Puisque f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$, on est assuré de sa continuité sur $]-1\,;1[$. Il reste à étudier la continuité de f en 1 et en -1.

Il ne figure pas dans le cours de théorème assurant la continuité d'une fonction somme de série entière aux points correspondant au rayon de convergence. Pour obtenir cette continuité, on revient à la théorie des séries de fonctions et l'on raisonne par convergence uniforme.

Posons $u_n(x) = a_n x^n$ pour $x \in [-1\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On observe

$$\left|u_n(x)\right| = |a_n||x|^n \leq |a_n| \quad \text{avec} \quad \sum |a_n| \text{ convergente.}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge alors normalement sur $[-1\,;1]$ et donc uniformément sur cet intervalle. Au surplus, les fonctions u_n sont continues et la fonction f est donc continue sur $[-1\,;1]$.
Plus généralement, si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et si $\sum |a_n| R^n$ converge, la somme de la série entière est définie et continue sur $[-R\,;R]$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) La fonction f est la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$$a_n = \frac{(-1)^n}{3n+1} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cette série entière est de rayon de convergence 1 car

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{3n+1}{3n+4}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

La fonction f est donc définie sur un intervalle contenant $]-1\,;1[$ et inclus dans $[-1\,;1]$.

En $x=-1$, la série définissant $f(x)$ diverge car

$$a_nx^n = \frac{1}{3n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{3n} \text{ diverge.}$$

En $x=1$, la série définissant $f(x)$ converge en vertu du critère spécial :

$$a_nx^n = \frac{(-1)^n}{3n+1} = (-1)^n\left|\frac{(-1)^n}{3n+1}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{(-1)^n}{3n+1}\right| = \frac{1}{3n+1} \text{ décroît vers } 0.$$

On conclut que l'intervalle de définition de f est $]-1\,;1]$.

(b) On peut affirmer la continuité de f sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$. Reste à étudier la continuité en 1.

On montre la convergence uniforme de la série entière sur un voisinage de 1.

Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{3n+1}x^n$ pour $x\in[0\,;1]$. La série $\sum u_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $\big(u_n(x)\big)$ est alternée car on a pris garde de choisir x positif ce qui permet d'écrire

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{3n+1}x^n = (-1)^n\big|u_n(x)\big|.$$

Au surplus,

$$\big|u_n(x)\big| = \frac{1}{3n+1}x^n \quad \text{décroît vers } 0$$

car on y voit le produit d'une suite décroissante de limite nulle par la suite $\big(x^n\big)$ qui décroît vers 0 ou bien est constante égale à 1.
Par application du critère spécial, on peut borner le reste $R_n(x)$ de la série par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. Pour tout réel $x\in[0\,;1]$,

$$\big|R_n(x)\big| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \big|u_{n+1}(x)\big| = \frac{x^{n+1}}{3n+4} \leq \frac{1}{3n+4}.$$

Puisque le majorant est uniforme (il ne dépend pas de x) et est de limite nulle, on peut affirmer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0\,;1]$. Les fonctions sommées étant toutes continues, on conclut que la fonction somme f est continue sur $[0\,;1]$, puis, finalement, sur $]-1\,;1]$.

(c) *Pour obtenir la limite d'une série entière en un point où celle-ci n'est pas définie, il est fréquent de comparer à une série entière de somme connue.*

On compare $f(x)$ au développement en série entière

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \text{pour tout } x\in\,]-1\,;1[. \tag{1}$$

Pour tout $n\geq 1$, on a

$$\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{3n+1} \leq \frac{1}{3n}.$$

Pour $x\in\,]-1\,;0]$, le facteur $(-1)^nx^n$ est positif et donc

$$\frac{(-1)^n}{4n}x^n \leq \frac{(-1)^n}{3n+1}x^n \leq \frac{(-1)^n}{3n}x^n.$$

En isolant le terme d'indice 0 de la somme définissant $f(x)$, on obtient

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n}x^n \leq f(x) \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n}x^n$$

ce qui donne à l'aide de (**??**)

$$1 - \frac{1}{4}\ln(1+x) \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{3}\ln(1+x).$$

Seule la minoration importe[2] et permet d'affirmer que f tend vers $+\infty$ en -1.

(d) *La somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ et on accède à ses dérivées successives par dérivation terme à terme.*

Puisque f est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, on sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ avec[3]

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{3n+1}x^{n-1} \quad \text{pour tout } x\in\,]-1\,;1[.$$

La fonction f est aussi définie et continue en 1 mais on ignore pour le moment si elle y est dérivable : on commence par former une équation différentielle vérifiée par f avant d'employer celle-ci pour étudier la limite de $f'(x)$.

2. En encadrant plus finement $\frac{1}{3n+1}$ par $\frac{1}{3n}$ et $\frac{1}{3(n+1)}$, on peut aussi montrer que f est équivalente à $x\mapsto -\frac{1}{3}\ln(1+x)$ quand x tend vers -1.

3. Par dérivation, le terme constant de la série entière disparaît ce qui explique pourquoi la somme écrite commence à partir du rang 1.

Pour $x \in]-1\,;1[$,

$$3xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n}{3n+1} x^n.$$

En adjoignant un terme nul d'indice $n=0$ à la somme et en écrivant $3n = (3n+1) - 1$,

$$3xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^n = \frac{1}{1+x} - f(x).$$

La fonction f est donc solution sur $]-1\,;1[$ de l'équation différentielle[4]

$$(E)\colon 3xy' + y = \frac{1}{1+x}.$$

On en déduit

$$f'(x) = \frac{1}{3x}\left(\frac{1}{1+x} - f(x)\right) \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{1}{6} - \frac{1}{2} f(1) \in \mathbb{R}.$$

Par le théorème de la limite de la dérivée, on peut affirmer que f est dérivable en 1 et que f est encore solution de l'équation (E) sur $]-1\,;1]$.

4. La résolution de l'équation différentielle (E) par la méthode de variation de la constante est possible et permet d'exprimer f à l'aide des fonctions usuelles mais le calcul intégral à mener est assez technique.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) $\frac{1}{2}\big(f(z) + f(-z)\big) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^n + (-1)^n z^n) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} z^{2p}$.

(b) $\frac{1}{3}\big(f(z) + f(jz) + f(j^2 z)\big) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(1 + j^n + j^{2n}\big) z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p} z^{3p}$.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) $a_n = \mathrm{O}(1)$ donc $R \geq 1$. La suite (a_n) ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ et ainsi $R = 1$.

(b) En réorganisant les termes sommés

$$\sum_{k=0}^{nT-1} a_k x^k = \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{p=0}^{n-1} a_{pT+k} x^{pT+k} = \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k \frac{1 - x^{nT}}{1 - x^T}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1 - x^T} \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k.$$

Exercice 33 : [énoncé]

Puisque $S_n \to +\infty$, on a $R_a \leq 1$.
Comme $a_n \leq S_n$, on a aussi $R_a \geq R_s$.
Enfin $S_n / S_{n+1} = 1 - a_{n+1}/S_{n+1} \to 1$ permet par la règle de d'Alembert d'obtenir $R_s = 1$.
On conclut $R_a = R_s = 1$.
Pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exercice 34 : [énoncé]

On a $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = 0$ compte tenu de l'hypothèse. On peut conclure que $S = 0$.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) Pour $0 < r < R$, il y a absolument convergence de $\sum a_n r^n$. On a

$$\left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n \mathrm{e}^{-in\theta}.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$\left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta} r^n.$$

Puisque $\sum \left|a_n r^n\right|$ et $\sum \left|\overline{a_n} r^n\right|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left|\overline{a_{n-k}}\right| r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :

$$\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta} r^n \,\mathrm{d}\theta.$$

Or $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta} \,\mathrm{d}\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ donc, après simplification des termes nuls,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}.$$

(b) Pour $0 < r < R$ suffisamment petit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 - \left|f(0)\right|^2 d\theta.$$

Par intégration, d'une fonction négative, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n} \leq 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0.$$

La fonction f est alors constante.

(c) Posons

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

Pour tout $r > 0$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n} - \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta.$$

Pour $p \geq N+1$, on obtient

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n}}{r^{2p}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta.$$

Or

$$0 \leq \int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta \leq 2\pi\frac{\left(P(r)\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|r^n\right)^2}{r^{2p}} = \frac{O(r^{2N})}{r^{2p}}$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

Pour $p = N+1$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n}}{r^{2p}} = |a_{N+1}|^2 + \sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2r^{2(n-N-1)}$$

avec

$$0 \leq \sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2r^{2(n-N-1)} \leq \frac{1}{r^2}\sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit $a_{N+1} = 0$ puis, en reprenant la démarche avec $p = N+2, \dots$, on obtient successivement $a_{N+2} = 0, \dots$ et finalement $f = f_N \in \mathbb{C}_N[X]$

Exercice 36 : [énoncé]

Notons $\sum a_n z^n$ la série entière dont la somme est égale à f sur $B°$.
La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall z, z' \in B, |z - z'| \leq \delta \implies \left|f(z) - f(z')\right| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors $r = 1 - \delta$ et $g_r : z \mapsto f(rz)$.
Pour tout $z \in B$, $|z - rz| = \delta|z| \leq \delta$ donc $\left|f(z) - g(z)\right| \leq \varepsilon$. Ainsi $\|f - g\|_{\infty,B} \leq \varepsilon$
Puisque la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans $B°$, la série entière $\sum a_n r^n z^n$ converge uniformément vers g sur B. Il existe donc un polynôme P vérifiant $\|P - g\|_{\infty,B} \leq \varepsilon$ puis $\|f - P\|_{\infty,B} \leq 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) $\alpha_n = \ln n \neq 0$ pour $n \geq 2$.
$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \to 1$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln(n)x^n$ vaut 1.
De plus, la série entière est grossièrement divergente en 1 et -1.
On en déduit $I = \left]-1\,;1\right[$.

(b) $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$ donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.
De plus, la série entière est absolument convergente en 1 et -1.
La fonction g est donc définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

(c) Pour $n \geq 2$, $a_n = \ln n - \ln(n-1) - 1/n$ donc

$$a_n x^n = \ln(n)x^n - \ln(n-1)x^n - \frac{1}{n}x^n.$$

En sommant pour n allant de 2 à $+\infty$,

$$g(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x).$$

(d) Puisque $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum|a_n|$ est convergente et donc la fonction g est définie et continue sur le segment $[-1\,;1]$. Par suite, la fonction g converge en 1^- et puisque le terme $\ln(1-x)$ diverge quand $x \to 1^-$, on obtient

$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

(e) Puisque
$$f(x)=\frac{g(x)-\ln(1-x)}{1-x}$$
on obtient quand $x\to -1^+$,
$$f(x)\to\frac{g(-1)-\ln(2)}{2}.$$
Il reste à calculer $g(-1)$ ...
$$g(-1)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\bigl(\ln n-\ln(n-1)\bigr)+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$
Or
$$1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$$
et en regroupant les termes pairs et impairs consécutifs
$$\sum_{n=2}^{2N+1}(-1)^n\bigl(\ln n-\ln(n-1)\bigr)=\sum_{p=1}^{N}2\ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right)-\ln(2N+1)=\ln\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)!(2N)!}\to\ln\frac{\pi}{2}$$
en vertu de la formule de Stirling.
Finalement
$$g(-1)=\ln\frac{\pi}{2}+\ln(2).$$
On en déduit
$$f(x)\xrightarrow[x\to-1^+]{}\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 38 : [énoncé]
Commençons par noter que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R=1$ et est donc définie sur $]-1\,;1[$. Pour $x\in[0\,;1[$, la fonction $t\mapsto x^{t^2}=\mathrm{e}^{t^2\ln x}$ est décroissante et donc
$$\int_n^{n+1}x^{t^2}\,\mathrm{d}t\le x^{n^2}\le\int_{n-1}^{n}x^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
En sommant
$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t\le f(x)\le 1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{t^2\ln x}\,\mathrm{d}t \text{ avec } \ln x<0.$$
Posons le changement de variable $u=t\sqrt{|\ln x|}$
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{t^2\ln x}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$
Or $\ln x\sim x-1$ quand $x\to1$ donc
$$f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Exercice 39 : [énoncé]
(a) On sait que les séries entières $\sum a_nx^n$ et $\sum na_nx^n$ ont le même rayon de convergence R (notamment car une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence). Puisque $a_n=\mathrm{o}(a_n\ln n)$ et $a_n\ln n=\mathrm{o}(na_n)$ on peut affirmer par encadrement que la série entière $\sum(a_n\ln n)x^n$ a aussi pour rayon de convergence R. De plus
$$a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim a_n\ln n$$
donc la série entière $\sum\left(a_n\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)x^n$ a encore pour rayon de convergence R.

(b) Notons que $\sum\ln nx^n$ a pour rayon de convergence $R=1$. On sait
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
donc le terme générale
$$\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
est borné par un certain M.
Par suite
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}Mx^n=\frac{Mx}{1-x}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

quand $x \to 1^-$.
Or par produit de Cauchy

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Il y a divergence de la série entière en $x=1$ et convergence par le CSSA en $x=-1$. Le rayon de convergence est donc égal à 1 et la fonction somme est définie sur $[-1\,;1[$.

(b) Par application du critère spécial des séries alternées sur $[-1\,;0]$,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)x^k\right\|_{\infty,[-1;0]} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

il y a donc convergence uniforme sur $[-1\,;0]$ et donc continuité de la somme en -1 puis finalement sur $[-1\,;1[$.
Pour étudier la fonction en 1^-, on peut exploiter l'encadrement

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1)-\ln n = \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit pour $x\in[0\,;1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right) \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R=1$.
Puisque $\ln(1+1/n)\sim 1/n$, la série n'est pas définie pour $x=1$. En revanche, on vérifie aisément la convergence de la série en $x=-1$ en vertu du critère spécial des séries alternées. Finalement f est définie sur $[-1\,;1[$.

(b) Calculons la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{2N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right)-\ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) = \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{\left(2^N N!\right)^4}\right).$$

Par la formule de Stirling

$$f(1) = \ln\frac{2}{\pi}.$$

Par le changement de variable $u=1/x$ $\mathcal{C}^1$ bijectif, on ne modifie par la nature de l'intégrale et on a

$$\int_0^1\frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Puisque

$$\left|\int_{E(x)}^{x}\frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_{E(x)}^{x}\frac{\mathrm{d}u}{u} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

la nature de l'intégrale et sa valeur sont données par la limite de

$$\int_1^{n+1}\frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{(-1)^k}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

On peut conclure

$$\int_0^1\frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{2}{\pi}.$$

(c) On peut écrire

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}+\varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x^n.$$

D'une part

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$$

et d'autre part
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|\varepsilon_n| < +\infty.$$
On peut donc conclure
$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 42 : [énoncé]
Notons que l'intégrale définissant a_n converge car $|\operatorname{th} t| \leq 1$.

(a) Pour $t \geq n$,
$$\frac{\operatorname{th} n}{t^2} \leq \frac{\operatorname{th} t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$
En intégrant et en exploitant $\operatorname{th} n \to 1$, on obtient $a_n \sim \frac{1}{n}$.
On en déduit que $R = 1$. Pour $x = -1$, $\sum a_n x^n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.
Pour $x = 1$, $\sum a_n x^n$ diverge par l'équivalent précédent. La fonction somme est définie sur $[-1\,;1[$.

(b) Pour $x \in [-1\,;0]$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série $\sum a_n x^n$ et affirmer
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq a_{n+1}|x|^{n+1} \leq a_{n+1}$$
ce qui assure la convergence uniforme de la série. Par suite la fonction somme est continue en -1.

(c) On a
$$\left|a_n - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1-\operatorname{th} n}{n}$$
donc pour $x \in [0\,;1[$,
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\operatorname{th} n}{n}x^n.$$
Or
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x) \to +\infty \text{ et } n^2\frac{1-\operatorname{th} n}{n} \sim 2n\mathrm{e}^{-2n} \to 0$$
donc $\sum \frac{1-\operatorname{th} n}{n}$ est absolument convergente et la somme de la série entière $\sum \frac{1-\operatorname{th} n}{n}x^n$ est définie et continue en 1. On en déduit
$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \leq M$ pour tout $x \in [0\,;1[$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,
$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq S(x) \leq M.$$
En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient
$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq M.$$
La séries à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.

(b) La fonction S est croissante sur $[0\,;1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire
$$\lim_{x\to1^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right).$$
De plus, cette valeur majore S sur $[0\,;1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M, on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \lim_{x\to1^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right).$$
Inversement, pour tout $x \in [0\,;1[$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
et donc à la limite quand $x \to 1^-$
$$\lim_{x\to1^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \leq M$ pour tout $x \in [0\,;1[$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq S(x) \leq M.$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq M.$$

La séries à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.

(b) La fonction S est croissante sur $[0\,;1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire

$$\lim_{x\to 1^-} S(x).$$

De plus, cette valeur majore S sur $[0\,;1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \lim_{x\to 1^-} S(x).$$

Inversement, pour tout $x \in [0\,;1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc à la limite quand $x \to 1^-$

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 45 : [énoncé]
La fonction f est évidemment définie en 1. Pour étudier sa continuité, introduisons

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

On peut écrire pour $x \in [0\,;1[$ et $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (R_{k-1} - R_k) x^k.$$

Puisque $|x| < 1$ et $R_n \to 0$, on peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k$$

avec convergence des deux sommes introduites.
Par décalage d'indice, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k (x-1) + R_n x^{n+1}$$

et ainsi

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $R_n \to 0$, pour n assez grand on a

$$\forall k \geq n, |R_k| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left|(x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k\right| \leq (1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon x^k \leq \varepsilon.$$

Pour un tel n fixé, on a quand $x \to 1^-$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) \to 0 \text{ et } R_n(x^{n+1} - 1) \to 0$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1)\right| \leq \varepsilon \text{ et } \left|R_n(x^{n+1} - 1)\right| \leq \varepsilon$$

donc
$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\right|\leq 3\varepsilon.$$

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Pour $a_n=(-1)^n$, on a $f(x)=1/(1+x)$, $\ell=1/2$ et la série $\sum a_n$ diverge.

(b) Pour $N\in\mathbb{N}$ et $x\in[0\,;1[$, on peut écrire
$$\sum_{n=0}^{N}a_n-\ell=A_N+B_N-C_N$$
avec
$$A_N=f(x)-\ell, B_N=\sum_{n=0}^{N}a_n-\sum_{n=0}^{N}a_nx^n \text{ et } C_N=\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_nx^n.$$
Pour $\varepsilon>0$, il existe un rang n_0 au-delà duquel
$$|a_n|\leq\frac{\varepsilon}{n}$$
et alors pour tout $N\geq n_0$
$$|C_N|\leq\frac{\varepsilon}{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty}x^n\leq\frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$
Posons alors
$$x=1-\frac{1}{N}$$
et on a
$$|C_N|\leq\varepsilon.$$
D'autre part
$$|B_N|=\left|\sum_{n=0}^{N}a_n(1-x^n)\right|\leq(1-x)\sum_{n=0}^{N}na_n=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}na_n.$$
En vertu du théorème de Cesaro
$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}na_n\to 0$$
et donc il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que pour $N\geq n_1$
$$|B_N|\leq\varepsilon.$$
Enfin, puis f tend vers ℓ en 1^-, il existe $n_2\in\mathbb{N}$ tel que pour $N\geq n_2$
$$A_N=\left|f(1-1/N)-\ell\right|\leq\varepsilon.$$
Finalement, pour $N\geq\max(n_0,n_1,n_2)$
$$\left|\sum_{n=0}^{N}a_n-\ell\right|\leq 3\varepsilon.$$
On peut donc affirmer que la série $\sum a_n$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\ell.$$

Exercice 47 : [énoncé]

(a) On peut écrire $a_n=b_n\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n\to 0$ et alors
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\varepsilon_nx^n.$$
Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on ait $|\varepsilon_n|\leq\varepsilon$. On peut alors écrire
$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N-1}b_n\varepsilon_nx^n\right|\leq\varepsilon\sum_{n=N}^{+\infty}b_nx^n\leq\varepsilon g(x)$$
puis
$$\left|f(x)\right|\leq\varepsilon g(x)+\left|\sum_{n=0}^{N-1}b_n\varepsilon_nx^n\right|.$$
Quand $x\to R^-$,
$$g(x)\to+\infty \text{ et } \sum_{n=0}^{N-1}b_n\varepsilon_nx^n\to\sum_{n=0}^{N-1}b_n\varepsilon_nR^n=C^{te}$$

donc pour x assez proche de R

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n R^n\right| \leq \varepsilon g(x)$$

puis

$$\left|f(x)\right| \leq 2\varepsilon g(x).$$

Cela permet de conclure que $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ quand $x \to R$.

(b) Si $a_n \sim b_n$ alors $a_n = b_n + \mathrm{o}(b_n)$ donc $f(x) = g(x) + \mathrm{o}(g(x)) \sim g(x)$ en vertu de a).

Exercice 48 : [énoncé]

(a) Notons a_n le coefficient générale de la série entière étudiée $a_m = 1$ s'il existe n tel que $m = p_n$ et $a_m = 0$ sinon. On observe$a_n = \mathrm{O}(1)$ donc $R \geq 1$ et $a_n \not\to 0$ donc $R \leq 1$ puis $R = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $n \leq \varepsilon p_n$. On a alors :

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon}.$$

Quand $x \to 1^-$,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} \to 0$$

et

$$(1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon} \leq \frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} \to \varepsilon$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq 2\varepsilon.$$

Cela permet d'affirmer $(1-x)f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$.

(b) Ici, il faut penser à une comparaison série-intégrale…
Pour $x \in \left]0\,;1\right[$, la fonction $t \mapsto x^{t^q}$ est décroissante. Par la démarche classique, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^q \ln x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^q t^q}\,\mathrm{d}t$$

avec $a = \sqrt[q]{-\ln x}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

et on ne calculera pas cette dernière intégrale.
Par l'encadrement qui précède, on peut affirmer

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[q]{1-x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

sachant $\ln x \sim x - 1$

Exercice 49 : [énoncé]

(a) $R = 1$.

(b) $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
On obtient les expressions de $f_2, \ldots, f_5$ par
`seq(normal(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)), k=2..5);`
On peut présumer un équivalent de la forme $\frac{C_\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}}$.
On peut obtenir les premières valeurs de C_α par
`seq(eval(simplify(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)*(1-x)^(k+1)), x=1), k=0..5);`
Cela laisse présumer $C_\alpha = (-1)^{\alpha+1}\alpha!$.
Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, $f_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1}x^{n-1}$ donc $xf_p'(x) = f_{p+1}(x)$.
En raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite (Q_p) de polynômes de sorte que
$Q_0 = X$ et $Q_{p+1}(X) = X(1-X)Q_p'(X) + (p+1)XQ_p(X)$.
On observe $Q_{p+1}(1) = (p+1)Q_p(1)$ de sorte que $Q_p(1) = p!$.
On peut alors affirmer $f_p(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{1+p}}$.

(c) À partir du développement connu de$(1+u)^\alpha$, on obtient
$b_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}$.
$\ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n} = \alpha\ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série
$\sum \ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ est absolument convergente.
On en déduit que la suite de terme général $\ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ converge puis que $\frac{n^\alpha}{b_n}$ tend vers une constante $A(\alpha) > 0$.

On peut alors conclure en exploitant le résultat suivant :
$a_n \sim b_n$ avec $a_n > 0$, $R = 1$ et $\sum a_n$ diverge entraine
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
Pour établir ce résultat :
- d'une part, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$,
- d'autre part, on écrit
$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en choisissant N
de sorte que $|a_n - b_n| \leq \varepsilon a_n$ pour $n \geq N$.
On peut alors conclure que $f_\alpha(x) \sim \frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

Exercice 50 : [énoncé]

(a) Par application de la règles de d'Alembert, les rayons de convergence de séries entières définissant f et g sont égaux à 1.

(b) g est assurément définie et continue sur $]-1\,;1[$ en tant que somme de série entière.
La série entière définissant g converge aussi sur $[-1\,;0]$ par application du critère spécial et

$$\forall x \in [-1\,;0] \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) x^k\right| \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions continues définissant g sur $[-1\,;0]$.
Ainsi g est définie et continue sur $[-1\,;1[$.
On peut aussi souligner que g n'est pas définie en 1 car

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) 1^n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

(c) Pour $x \in]-1\,;1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \big(\ln n - \ln(n-1)\big) x^n = -g(x).$$

(d) La fonction f est continue sur $]-1\,;1[$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence 1. On peut prolonger f par continuité en -1 via

$$f(x) = -\frac{g(x)}{1-x} \xrightarrow[x\to -1]{} -\frac{g(-1)}{2}.$$

(e) On a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc pour $x \in]-1\,;1[$

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} -\frac{1}{n} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) x^n$$

et donc

$$g(x) = \ln(1-x) + 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) x^n.$$

Le terme sommatoire définit une fonction continue sur $[-1\,;1]$ (par convergence normale) et donc

$$g(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \ln(1-x)$$

puis

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 51 : [énoncé]

(a) Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n \neq 0$. On a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série numérique $\sum u_n$ converge absolument. Si $|x| > 1$, elle diverge grossièrement. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.

(b) La fonction f est définie sur un intervalle contenant $]-1\,;1[$ et inclus dans $[-1\,;1]$. En $x = -1$, la série définissant $f(x)$ diverge car il s'agit d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leq 1$. En $x = 1$, la série définissant $f(x)$ converge en vertu du critère spécial :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ décroît vers } 0.$$

On conclut que l'intervalle de définition de f est $]-1\,;1]$.

(c) On peut affirmer la continuité de f sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$. Reste à étudier la continuité en 1.

Il ne figure pas dans le cours de théorème assurant la continuité d'une fonction somme de série entière aux points correspondant au rayon de convergence, et ce même si celle-ci converge en ce point ! Pour obtenir la continuité, on revient à la théorie des séries de fonctions et l'on raisonne par convergence uniforme.

Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}x^n$ pour $x \in [0\,;1]$. La série $\sum u_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $\big(u_n(x)\big)$ est alternée car on a pris garde de choisir x positif ce qui permet d'écrire

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}x^n = (-1)^n\big|u_n(x)\big|.$$

Au surplus,

$$\big|u_n(x)\big| = \frac{1}{\sqrt{n}}x^n \quad \text{décroît vers } 0$$

car on y voit le produit d'une suite décroissante de limite nulle par la suite $\big(x^n\big)$ qui décroît vers 0 ou bien est constante égale à 1.
Par application du critère spécial, on peut borner le reste $R_n(x)$ de la série par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. Pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$\big|R_n(x)\big| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \big|u_{n+1}(x)\big| = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Puisque le majorant est uniforme (il ne dépend pas de x) et est de limite nulle, on peut affirmer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0\,;1]$. Les fonctions sommées étant toutes continues, on conclut que la fonction somme f est continue sur $[0\,;1]$, puis, finalement, sur $]-1\,;1]$.

(d) *Pour obtenir la limite d'une série entière en un point où celle-ci n'est pas définie, il est fréquent de comparer à une série entière de somme connue.*

Pour tout $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} \leq n$ et donc, pour tout $x \in\,]-1\,;0]$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \text{puis} \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}x^n \geq \frac{(-1)^n}{n}x^n \quad \text{car} \quad (-1)^n x^n \geq 0.$$

En sommant, on obtient

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}x^n = -\ln(1+x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} +\infty.$$

Par théorème de limite infinie par minoration, la fonction f tend vers $+\infty$ en -1.

Exercice 52 : [énoncé]

(a) Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \neq 0$, le terme $a_n x^n$ n'est pas nul et

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument et, si $|x| > 1$, elle diverge grossièrement. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.

(b) La fonction f est définie sur un intervalle contenant $]-1\,;1[$ et inclus dans $[-1\,;1]$. En $x = 1$, la série définissant $f(x)$ diverge car il s'agit d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leq 1$. En $x = -1$, la série définissant $f(x)$ converge en vertu du critère spécial :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ décroît vers } 0.$$

On conclut que l'intervalle de définition de f est $[-1\,;1[$.

(c) On peut affirmer la continuité de f sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$. Reste à étudier la continuité en -1.

Par le critère spécial, on montre que la série entière converge uniformément sur $[-1\,;0]$.

Posons $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ pour $x \in [0\,;1]$. La série $\sum u_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $\big(u_n(x)\big)$ est alternée car on a pris garde de choisir x négatif ce qui permet d'écrire

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}|x|^n = (-1)^n\big|u_n(x)\big|.$$

Au surplus,

$$\big|u_n(x)\big| = \frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n \quad \text{décroît vers } 0$$

car on y voit le produit d'une suite décroissante de limite nulle par la suite $\big(x^n\big)$ qui décroît vers 0 ou bien est constante égale à 1.

Par application du critère spécial, on peut borner le reste $R_n(x)$ de la série par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. Pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \left|u_{n+1}(x)\right| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Puisque le majorant est uniforme (il ne dépend pas de x) et est de limite nulle, on peut affirmer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-1\,;0]$. Les fonctions sommées étant toutes continues, on conclut que la fonction somme f est continue sur $[-1\,;0]$, puis, finalement, sur $[-1\,;1[$.

(d) *On réalise une comparaison série-intégrale.*

Soit $x \in [0\,;1[$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}x^t$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ en tant que produit de fonction décroissante. On peut donc écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}x^t \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\sqrt{n}}x^n \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}x^t \,\mathrm{d}t$$

(lorsque $n = 1$, l'intégrale de droite est généralisée en 0 et l'on vérifie qu'elle est convergente). En sommant ces encadrements, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}x^t \,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}x^t \,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales écrites car l'on sait la convergence de la série définissant $f(x)$.

Par le changement de variable $t = u^2$ (où l'application $u \mapsto u^2$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ vers lui-même), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}x^t \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2x^{u^2} \,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{u^2 \ln(x)} \,\mathrm{d}u.$$

On réalise un nouveau changement de variable $v = u\sqrt{-\ln(x)}$ (le terme $\ln(x)$ est négatif)

$$2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{u^2 \ln(x)} \,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2} \,\mathrm{d}v = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\ln(x)}}.$$

Sachant $\ln(x) \sim x - 1$ lorsque x tend vers 1, on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}x^t \,\mathrm{d}t \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

Par des calculs semblables, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}x^t \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_{\sqrt{-\ln(x)}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2} \,\mathrm{d}v \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

Finalement, on conclut par encadrement

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

Exercice 53 : [énoncé]

Pour $x \in [0\,;R[$, la série $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est une série à termes positifs. Par la formule de Taylor reste intégrale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}t$$

et puisque le reste intégrale est positif, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \leq f(x).$$

Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est convergente.

Pour $x \in\,]-R\,;0]$, on a

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}|x|^n$$

et la série $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 54 : [énoncé]

Pour tout $x \in\,]-a\,;a[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $t = xu$, on peut écrire

$$R_n(x) = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u.$$

Choisissons y tel que $|x| < y < a$. Puisque $f^{(n+1)}$ est croissante, on a

$$\forall u \in [0\,;1], f^{(n+1)}(xu) \le f^{(n+1)}(yu)$$

et donc

$$\left|R_n(x)\right| \le |x|^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(yu)\,\mathrm{d}u \le |x/y|^{n+1} R_n(y).$$

De plus $R_n(y) \le f(y)$ car les termes de la somme partielle de Taylor en y sont tous positifs et donc

$$\left|R_n(x)\right| \le |x/y|^{n+1} f(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Finalement f est aussi égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $]-a\,;a[$.

Exercice 55 : [énoncé]
Pour tout a et $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \ge a$, la série numérique de terme général $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est une série majorée par $f(x)$ et à termes positifs, elle est donc convergente ce qui assure

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Pour $x \le 0$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(0)\,\mathrm{d}t = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

en exploitant la remarque initiale avec 0 et $-x$ pour a et x.
Pour $x \ge 0$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \to 0$$

en exploitant la remarque initiale avec x et $2x$ pour a et x.
Finalement f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 56 : [énoncé]
On a

$$(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$$

donc pour $x \in\,]-1\,;1[$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x}} = (1-x^3)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$$

est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ par produit de fonctions qui le sont.

Exercice 57 : [énoncé]
Posons

$$f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sh} x}.$$

La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty\,;R[$ avec $R = \operatorname{argsh} 1$.
Soit $x \in\,]-R\,;R[$. Puisque $|\operatorname{sh} x| < 1$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sh} x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}^n x.$$

Chacune des fonctions $x \mapsto \operatorname{sh}^n x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{sh}^n x = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k.$$

Puisque les coefficients du développement en série entière de la fonction sh sont tous positifs, on a aussi $a_{n,k} \ge 0$ pour tout n, k. Pour $x \in\,]-R\,;R[$, on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k\right).$$

Puisque la série $\sum_{k\ge n}\left|a_{n,k}x^k\right| = \sum_{k\ge n} a_{n,k}|x|^k$ converge et puisque la série $\sum_{n\ge 0}\sum_{k=n}^{+\infty}\left|a_{n,k}x^k\right| = \sum_{n\ge 0}\left(\operatorname{sh}|x|\right)^n$ converge aussi, on peut par le théorème de Fubini échanger les deux sommes ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_{n,k}\right)x^k.$$

Ainsi la fonction f est développable en série entière sur $]-R\,;R[$. Le rayon de convergence de la série entière ainsi introduite est alors au moins égale à R et en fait exactement égal à R car f diverge vers $+\infty$ en R^- et ne peut donc être prolongée par continuité en R.

Exercice 58 : [énoncé]

(a) Posons
$$u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\cos(2^n x)}{n!}.$$
Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{2^{nk}}{n!}.$$
Puisque le majorant est le terme général de la série exponentielle en 2^k, il est sommable et il y a donc convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$. On en déduit que la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Par l'étude qui précède
$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0).$$
Si k est impair, $u_n^{(k)}(x)$ s'exprime en fonction de $\sin(2^n x)$ et donc $u_n^{(k)}(0) = 0$ puis $f^{(k)}(0) = 0$.
Si k est pair, on peut écrire $k = 2p$ et alors
$$u_n^{(2p)}(x) = (-1)^p 2^{2np} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$$
puis
$$f^{(2p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^{2np}}{n!} = (-1)^p \mathrm{e}^{2^{2p}}.$$
La série de Taylor de f en 0 est alors
$$\sum (-1)^p \frac{\mathrm{e}^{2^{2p}}}{(2p)!} x^{2p}.$$
Pour $x \neq 0$, posons
$$u_p(x) = (-1)^p \frac{\mathrm{e}^{2^{2p}}}{(2p)!} x^{2p} \neq 0.$$
On a
$$\left|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \frac{\mathrm{e}^{3.2^{2p}} x^2}{(2p+1)(2p+2)} \to +\infty.$$
Le rayon de convergence de la série de Taylor étudiée est donc nul.

Exercice 59 : [énoncé]

(a) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$,
$$\left|\frac{a_n}{n-t}\right| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{(n-t)^2}\right)$$
donc $\sum \frac{a_n}{n-t}$ est absolument convergente. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

(b) Pour $|t| < 1$,
$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1 - t/n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_n t^m}{n^{m+1}}.$$
Puisque la série $\sum_{m\geq 0} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}}$ converge pour tout $n \geq 1$ et puisque
$$\sum_{n\geq 1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}} = \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|}{n - |t|}$$
converge, peut appliquer le théorème de Fubini pour intervertir les deux sommes.
$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{m+1}}\right) t^m.$$
La fonction f apparaît alors comme développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

(c) Si $f(t) = 0$ sur $[-1/2\,;1/2]$ alors le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$ est nul et on en déduit que f est nulle sur $]-1\,;1[$.
Or
$$f(t) = \frac{a_1}{1-t} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$$
avec $t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ définie et continue au voisinage de 1. On en déduit que $a_1 = 0$.
On peut alors reprendre l'étude du b) et, sachant $a_1 = 0$, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $]-2\,;2[$. Or ce dernier développement étant nul, on obtient comme ci-dessus $a_2 = 0$ etc.
Au final, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle.

Exercice 60 : [énoncé]

(a) $\left|\sin(a^n x)\right| \leq |x|\left|a^n\right|$, il y a donc convergence absolue de la série définissant $f(x)$.

(b) $f_n\colon x\mapsto \sin(a^n x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \le |a|^{nk}$ terme général d'une série absolument convergente donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \le \sum_{n=0}^{+\infty}|a|^{nk} = \frac{1}{1-|a|^k} \le \frac{1}{1-|a|}.$$

(c) Par la formule de Taylor-Laplace,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{1-|a|}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Ainsi la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$ vers f et donc f est développable en série entière.

Exercice 61 : [énoncé]
On peut écrire

$$\ln(1-x^3) = \ln(1-x) + \ln(1+x+x^2)$$

donc sur $]-1\,;1[$,

$$\ln(1+x+x^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ si } n\ne 0\ [3] \text{ et } a_{3n} = -\frac{1}{n}+\frac{1}{3n} = -\frac{2}{3n}.$$

Exercice 62 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{a/(a-b)}{1-ax} + \frac{b/(b-a)}{1-bx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}x^n$$

avec $R = \min(1/a, 1/b)$.
On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n^2 x^n = \frac{1}{(b-a)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(b^{2n+2}-2a^{n+1}b^{n+1}+a^{2n+2})x^n$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n^2 x^n = \frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{b^2}{1-b^2x} - \frac{2ab}{1-abx} + \frac{a^2}{1-a^2x}\right) = \frac{1+abx}{(1-a^2x)(1-abx)(1-b^2x)}.$$

Exercice 63 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}z)} + \frac{1}{1-(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}z)}\right)$$

donc

$$\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt})z^n$$

puis

$$\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nt)z^n.$$

Exercice 64 : [énoncé]
La fonction f est définie sur $]-1\,;1[$ et

$$f(x) = \frac{(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour $|x|<1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+u)^\alpha$$

avec $u = -x^2 \in\,]-1\,;1[$ et $\alpha = -1/2$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$$

puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(x^{2n}+x^{2n+1}).$$

Exercice 65 : [énoncé]
On a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \underset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+(ux)^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n} x^{2n}\,\mathrm{d}u.$$

Pour $|x|<1$, il y a convergence normale sur $[0\,;1]$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{\arctan x}{x}.$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) La convergence de l'intégrale définissant F provient de la convergence supposée de $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$.
On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k f(t)}{k!}\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

et

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+1} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \to 0$$

compte tenu des hypothèses.
On peut alors affirmer

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

avec convergence sur $\mathbb{R}$ de la série entière considérée.

Exercice 67 : [énoncé]

(a) On sait

$$\forall u \in \left]-1\,;1\right[,\ \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} u^n$$

donc

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

avec

$$u_n(\theta) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}\theta.$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0\,;\pi/2]$ et sa somme est continue par morceaux. Les fonctions u_n sont aussi intégrables sur $[0\,;\pi/2]$ et

$$\int_0^{\pi/2} \left|u_n(\theta)\right| \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} u_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right)^2 x^{2n}$$

car on sait calculer à l'aide d'une formule de récurrence obtenue par intégration par parties les intégrales de Wallis

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Par la formule de Stirling

$$\int_0^{\pi/2} \left|u_n(\theta)\right| \mathrm{d}\theta \sim \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Ce terme est sommable et l'on peut donc procéder à une intégration terme à terme donnant la relation proposée.

(b) On a obtenu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \text{ avec } a_n \sim \frac{1}{2n}.$$

On peut écrire

$$a_n = \frac{1+\varepsilon(n)}{2n} \text{ avec } \varepsilon(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et avec convergence des sommes introduites

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n) x^{2n}}{2n} = a_0 - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n) x^{2n}}{2n}.$$

Or

$$a_0 - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = a_0 - \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{2}\ln(1-x)$$

et pour conclure il nous suffit d'établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x\to 1^-}{=} \mathrm{o}\big(\ln(1-x)\big).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N, \left|\varepsilon(n)\right| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\ln(1-x^2).$$

Le premier terme de la somme réalisant la majoration est polynomiale donc

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x\to 1^-}{=} \mathrm{o}\big(\ln(1-x^2)\big)$$

et donc, pour x suffisamment proche de 1,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}\right| \leq \varepsilon\ln(1-x^2).$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x\to 1^-}{=} \mathrm{o}\big(\ln(1-x^2)\big) = \mathrm{o}\big(\ln(1-x^2)\big).$$

Finalement

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{2}\ln(1-x).$$

Exercice 68 : [énoncé]

(a) Si $x > -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x+\mathrm{e}^t)$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$t^2/(x+\mathrm{e}^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Si $x = -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x+\mathrm{e}^t)$ n'est pas définie en 0 et

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}.$$

La fonction n'est donc pas intégrable et, puisque elle est positive, son intégrale diverge.
Si $x < -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x+\mathrm{e}^t)$ n'est pas définie en $t_0 = \ln(-x) \in \left]0\,;+\infty\right[$. Par dérivabilité en t_0, on obtient

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t + x} = \frac{1}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{t_0}} \underset{t\to t_0}{\sim} \frac{1}{(t-t_0)\mathrm{e}^{t_0}}$$

et encore une fois l'intégrale diverge.

(b) Pour $x = 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Pour $x \neq 0$, posons le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$ qui définit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(x+u)}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} = \int_1^{+\infty} \frac{1/x}{u} - \frac{1/x}{x+u}\,\mathrm{d}u$$

et finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

(c) Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

On en déduit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^n.$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) S est définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$.

(b) Par convergence normale sur $[1\,;+\infty[$, on peut intervertir limites et sommes infinies pour justifier,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

de sorte que

$$S(x) \sim \frac{1}{(1-a)x}.$$

(c) Pour $|x|<1$;

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m.$$

Or $\sum\left|(-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m\right|$ converge et $\sum\sum_{m=0}^{+\infty}\left|(-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m\right|$ converge. Par le théorème de Fubini, on peut permuter les sommes infinies et affirmer

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^{m+1}}\right) x^m.$$

Exercice 70 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(x) = \operatorname{sh}(\alpha^n x)$. La fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $a \geq 0$, on a

$$\sup_{x\in[-a;a]} \left|u_n(x)\right| = \operatorname{sh}(a\alpha^n)$$

avec

$$n^2 \operatorname{sh}(a\alpha^n) \sim n^2 a\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement sur $[-a\,;a]$ pour tout $a \geq 0$.
Par convergence normale sur tout segment, la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sh}(\alpha^n x) = S(x) - \operatorname{sh}(x).$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) - S(\alpha x) = \operatorname{sh}(x).$$

(c) Analyse : Supposons S développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

L'égalité $S(x) - S(\alpha x) = \operatorname{sh}(x)$ fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(1-\alpha^n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{1}{(1-\alpha^{2n+1})(2n+1)!} \text{ et } a_{2n} = 0.$$

Synthèse : Considérons la fonction définie par

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(1-\alpha^{2n+1})(2n+1)!}.$$

Le rayon de convergence de la série entière définissant T est $+\infty$ et par les calculs qui précèdent

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) - T(\alpha x) = \operatorname{sh}(x).$$

Il reste à montrer $T = S$ pour conclure. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T(\alpha^n x) - T(\alpha^{n+1} x) = \operatorname{sh}(\alpha^n x).$$

En sommant

$$T(x) - T(\alpha^n x) = \sum_{k=0}^{n-1}\big(T(\alpha^k x) - T(\alpha^{k+1}x)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(\alpha^k x).$$

Sachant que T est continue en 0 avec $T(0) = 0$, on obtient quand $n \to +\infty$

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(\alpha^k x) = S(x).$$

Exercice 71 : [énoncé]
Pour $|x| < |a|$,

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-x/a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{a^{n+1}}x^n.$$

Par dérivation à l'ordre p

$$\frac{(-1)^p p!}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}{a^{n+p+1}}x^n.$$

Ainsi

$$\frac{1}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{a^{n+p+1}}\frac{(n+p)!}{p!n!}x^n.$$

On peut aussi obtenir ce développement à partir de celui de $(1+u)^\alpha$.

Exercice 72 : [énoncé]

(a) Sachant $1-\alpha^k x \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$, on peut affirmer que pour N assez grand

$$\forall k \geq N, 1-\alpha^k x > 0.$$

Considérons alors la suite définie par la portion de produit au-delà du rang N

$$\left(\prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x)\right)_{n\geq N}.$$

On a

$$\ln\left(\prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x)\right) = \sum_{k=N}^{n}\ln(1-\alpha^k x)$$

avec $\ln(1-\alpha^k x) = \mathrm{O}(\alpha^k)$. La série de terme général α^k est absolument convergente et donc, par comparaison, la série $\sum \ln(1-\alpha^k x)$ est aussi absolument convergente. On en déduit la convergence de la suite

$$\left(\sum_{k=N}^{n}\ln(1-\alpha^k x)\right)_{n\geq N}$$

puis, en composant avec la fonction exponentielle, la convergence de la suite

$$\left(\prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x)\right)_{n\geq N}.$$

Enfin, en tenant compte de la portion initiale du produit définissant $P_n(x)$, on obtient la convergence de la suite $\big(P_n(x)\big)$

(b) Si f est solution de (E) alors

$$f(x) = (1-\alpha x)f(\alpha x) = (1-\alpha x)(1-\alpha^2 x)f(\alpha^2 x) = \dots$$

Par récurrence, on obtient

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n}(1-\alpha^k x)f(\alpha^{n+1}x) = P_n(x)f(\alpha^{n+1}x).$$

Quand $n\to\infty$, $f(\alpha^{n+1}x)\to f(0)$ car f est continue et donc

$$f(x) = f(0)\prod_{k=0}^{+\infty}(1-\alpha^k x) = f(0)P(x).$$

(c) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R=+\infty$.
La somme de cette série entière est solution de (E) si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\alpha^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\alpha^{n-1}x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ceci équivaut à

$$\forall n\geq 1, a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n-1}a_{n-1}.$$

Inversement, considérons alors la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k-1}\right)$$

de sorte que

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n-1}a_{n-1}.$$

Cette série entière est de rayon de convergence $R=+\infty$ car

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n-1}\to 0$$

et l'étude qui précède assure que sa somme $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ est solution de (E) prenant la valeur 1 en 0.
En vertu de la question précédente, on peut affirmer

$$\forall x\in\mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k-1}\right)x^n = P(x).$$

Exercice 73 : [énoncé]

(a) Puisque
$$\left|1-\frac{z}{2^k}\right|\leq 1+\frac{|z|}{2^k}$$
l'inégalité $\left|P_n(z)\right|\leq P_n(-|z|)$ est immédiate.
Par produit à facteurs strictement positifs, on a $P_n(-|z|)>0$ et on peut donc introduire
$$\ln P_n(-|z|)=\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{|z|}{2^k}\right).$$
Or
$$\ln\left(1+\frac{|z|}{2^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{|z|}{2^n}$$
et ce terme est donc sommable. On peut alors écrire
$$\ln P_n(-|z|)\leq M=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{|z|}{2^n}\right)$$
puis
$$\left|P_n(z)\right|\leq \mathrm{e}^M.$$

(b) On a
$$\left|P_{n+1}(z)-P_n(z)\right|\leq\left|P_n(z)\right|\frac{|z|}{2^{n+1}}\leq \mathrm{e}^M\frac{|z|}{2^{n+1}}.$$
Le majorant est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z)-P_n(z)$ est donc convergente et la suite $(P_n(z))$ est de même nature.

(c) Pour $|z|\leq 1$, on a
$$\left|P_{n+1}(z)-P_n(z)\right|\leq\frac{\mathrm{e}^M}{2^{n+1}}\text{ avec }M=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$
et donc
$$\sup_{|z|\leq 1}\left|P_{n+1}(z)-P_n(z)\right|\leq\frac{\mathrm{e}^M}{2^{n+1}}.$$
Ce terme est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z)-P_n(z)$ converge donc normalement, et donc uniformément, sur le domaine défini par la condition $|z|\leq 1$. On en déduit que la suite de fonctions $\left(P_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur ce même domaine. Or chaque fonction P_n est continue en 0 et donc sa limite simple f est continue en 0.

(d) La fonction f vérifie évidemment les conditions énoncées.
Inversement, si une fonction g vérifie les conditions proposées alors
$$g(z)=(1-z)g(z/2)=(1-z)(1-z/2)g(z/4)=\dots$$
Par récurrence
$$g(z)=P_n(z)g(z/2^{n+1}).$$
Par continuité de g en 0, un passage à la limite donne $g(z)=f(z)$.

(e) Par analyse-synthèse, la recherche d'une fonction somme de série entière $\sum a_nz^n$ solution conduit à
$$a_n=2^n\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-2^k}$$
et un rayon de convergence infini.

Exercice 74 : [énoncé]

En dérivant et en décomposant en éléments simples
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(x^2-5x+6\right)\right)=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3}$$
donc
$$\ln\left(x^2-5x+6\right)=\ln 6-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n$$
avec un rayon de convergence $R=2$.
On peut aussi trouver ce développement en série entière en factorisant
$$\ln\left(x^2-5x+6\right)=\ln(2-x)+\ln(3-x).$$

Exercice 75 : [énoncé]

Posons
$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}.$$
On vérifie aisément la convergence de cette intégrale et la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$f'(x)=\frac{1}{1+x+x^2}.$$

Pour $|x| < 1$,

$$f'(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_{3n} = 1, a_{3n+1} = -1 \text{ et } a_{3n+2} = 0.$$

En intégrant,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

avec

$$f(0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, on écrit

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{0}.$$

Après calculs

$$f(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut affirmer $x \sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$ et par multiplication par la quantité conjuguée

$$\frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{|1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}.$$

On en déduit

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{\sin^2\theta}{1 - 2x\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta}.$$

(b) La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, après calculs

$$f'(x) = \frac{\sin^2\theta}{1 - 2x\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta}.$$

Pour $|x\sin\theta| < 1$, on a

$$\frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}(x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sin\theta)^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}x^n.$$

On en déduit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sin\theta)^{n+1}\sin\big((n+1)\theta\big)x^n$$

puis, par intégration de développement en série entière,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sin\theta)^n\sin(n\theta)}{n}x^n$$

avec

$$f(0) = -\arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \arctan\big(\tan(\theta - \pi/2)\big) = \theta - \pi/2$$

car $\theta - \pi/2 \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$.

Exercice 77 : [énoncé]

La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

est une fraction rationnelle dont 0 n'est pas pôle. La fonction f' puis f sont développables en série entière et les rayons de convergence des séries entières correspondantes sont égaux.

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1/2\mathrm{i}}{x+1-\mathrm{i}} - \frac{1/2\mathrm{i}}{x+1+\mathrm{i}} = \mathrm{Re}\left(\frac{-\mathrm{i}}{x+1-\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+1-\mathrm{i}}\right)$$

avec

$$\frac{1}{x+1-\mathrm{i}} = \frac{1}{1-\mathrm{i}}\frac{1}{1+\frac{x}{1-\mathrm{i}}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-\mathrm{i})^{n+1}}x^n$$

avec un rayon de convergence $R = \sqrt{2}$.
Comme $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$ on a

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos\frac{(3n+1)\pi}{4}}{2^{(n+1)/2}}x^n$$

puis

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos\frac{(3n+1)\pi}{4}}{(n+1)2^{(n+1)/2}}x^{n+1}$$

avec $R = \sqrt{2}$.

Exercice 78 : [énoncé]
Pour $|x|<1$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\right)=\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}-x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-x}\right).$$

On reconnaît une écriture en $\left(Z-\overline{Z}\right)/2\mathrm{i}$, c'est donc une partie imaginaire

$$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}-x}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right).$$

Par sommation géométrique

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1)\alpha)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\alpha)x^{n-1}.$$

Par intégration de série entière, on obtient alors la relation proposée.

Exercice 79 : [énoncé]

(a) On a

$$\binom{n+p}{p}=\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}\sim\frac{1}{p!}n^p$$

donc le rayon de convergence de f vaut 1.

(b) Sur $]-1\,;1[$ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n+p}{p}nx^{n-1}.$$

Donc

$$(1-x)f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\binom{n+p+1}{p}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}n\binom{n+p}{p}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_nx^n$$

avec

$$\alpha_n=(n+1)\binom{n+p+1}{p}-n\binom{n+p}{p}$$

qui donne

$$\alpha_n=(n+p+1)\binom{n+p}{p}-n\binom{n+p}{p}=(p+1)\binom{n+p}{p}.$$

Par suite

$$(1-x)f'(x)=(p+1)f(x).$$

Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(1-x)y'=(p+1)y$$

sur $]-1\,;1[$ sont

$$y(x)=\frac{C}{(1-x)^{p+1}}$$

avec $C\in\mathbb{R}$.
Sachant $f(0)=1$, on obtient

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^{p+1}}.$$

Exercice 80 : [énoncé]

(a) On a

$$\sin(tx)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2k+1}.$$

À l'aide d'intégration par parties

$$\int_0^{+\infty}t^{2k+1}\mathrm{e}^{-t^2}=\frac{k!}{2}.$$

Or

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2k+1}\right|\mathrm{d}t\le\frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}$$

qui est terme général d'une série convergente.
On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et affirmer

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kk!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(b) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\sin(tx)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\left|\frac{d}{dx}\left(e^{-t^2}\sin(tx)\right)\right| \leq te^{-t^2}$$

avec $t \mapsto te^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)\,dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\cos(tx)\,dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xf(x)$$

et ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$2y' + xy = 1.$$

De plus f vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.
Si une somme de série entière est solution de l'équation différentielle $2y' + xy = 1$ et vérifiant $y(0) = 0$, c'est, après calculs, la fonction

$$g : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.
Puisque f et g sont solutions sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle linéaire $2y' + xy = 1$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$ et puisque le théorème de Cauchy assure l'unicité d'une solution à un tel problème, on peut identifier f et g.
Finalement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 81 : [énoncé]
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 avec

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}f(x)$$

et

$$f''(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)^{3/2}}f(x) + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}f'(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$.
Analyse :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S est solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

La relation $(1+x^2)S''(x) + xS'(x) - S(x)/4 = 0$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - 1/4)a_n\right)x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

En adjoignant les conditions initiales $S(0) = 1$ et $S'(0) = 1/2$, on parvient à

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{4p-1}}\frac{(4p-2)!}{((2p)!)((2p-1)!)} \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{4p}}\frac{(4p-1)!}{(2p+1)!(2p-1)!}.$$

Synthèse :
Considérons la série entière déterminée au terme de l'analyse. Celle-ci se comprend comme la somme de deux séries entières $\sum a_{2p}x^{2p}$ et $\sum a_{2p+1}x^{2p+1}$ chacune de rayon de convergence 1 car

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right| = \frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)} \to 1.$$

Cette série entière est donc de rayon de convergence $R \geq 1$ et, compte tenu des calculs de l'analyse, sa somme est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0.$$

Elle vérifie de plus les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$. Puisque la fonction f est aussi solution de ce problème de Cauchy et que ce dernier possède une solution unique, on peut identifier f et la somme de la série entière.

Exercice 82 : [énoncé]

(a) La fonction f est définie sur $]-1\,;1[$.

(b) On vérifie $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ et $f(0) = 0$.

(c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ et par suite la primitive $x \mapsto \arcsin x$ l'est aussi.
Par produit de fonctions développable en série entière sur $]-1\,;1[$, f l'est aussi.
Puisque f est impaire, le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

On a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}$ puis

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

donc

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}((2n+3)a_{n+1} - (2n+2)a_n)x^{2n+2} = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}a_n$$

d'où

$$a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Puisque pour $x \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}}\right| = \frac{4(n+1)^2 x^2}{(2n+3)(2n+2)} \to x^2$$

on obtient $R = 1$.

Exercice 83 : [énoncé]
f admet un développement en série entière en 0 par produit fonctions développables en série entière. De plus, son rayon de convergence vérifie $R \geq 1$.
On peut alors écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ sur }]-1\,;1[$$

La fonction f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et est solution de l'équation différentielle

$$(x^2-1)y' + xy - 1 = 0.$$

Or

$$(x^2-1)f'(x) + xf(x) - 1 = -(a_1+1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\bigl(na_{n-1} - (n+1)a_{n+1}\bigr)x^n.$$

Par identification des coefficients d'une série entière

$$a_1 = -1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

De plus, $a_0 = f(0) = \pi/2$ et donc

$$a_{2p} = \frac{(2p-1)}{2p} \times \cdots \times \frac{1}{2}a_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\cdots\frac{2}{3}a_1 = -\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 84 : [énoncé]
Posons $f\colon x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$
f vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
Analyse :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.

La fonction S vérifie sur $]-R\,;R[$ l'équation différentielle proposée et les conditions initiales imposées si, et seulement si,

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n^2+1}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

Ceci donne

$$a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^{p}\left((2p-1)^2+1\right)}{(2p+1)!}.$$

Synthèse :
Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.
Pour $x \neq 0$ et $u_p = a_{2p+1}x^{2p+1}$; on a

$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| \to |x|^2$$

donc le rayon de convergence de la série entière étudiée vaut 1. Par les calculs qui précèdent on peut alors affirmer que sa somme S est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Par unicité des solutions à un tel problème différentiel, on peut conclure que f est la somme des la série entière introduite sur $]-1\,;1[$.

Exercice 85 : [énoncé]

(a) La fonction f est impaire car produit d'une fonction paire par la primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire.

(b) f est solution de l'équation différentielle

$$y' = xy + 1.$$

(c) La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ces primitives le sont donc aussi et, par produit de fonctions développable en série entière, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par imparité, on peut écrire ce développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

et l'équation différentielle donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)a_n = a_{n-1} \text{ et } a_0 = 1.$$

On en déduit

$$a_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}.$$

Exercice 86 : [énoncé]

(a) Posons $u(x,t) = e^{-t}/(x+t)$ définie sur $]-1\,;+\infty[\times[1\,;+\infty[$.
Pour chaque $x > -1$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$ et $t^2u(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
La fonction f est donc bien définie sur $]-1\,;+\infty[$.
Pour chaque $t \geq 1$, $x \mapsto u(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}.$$

La fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux en t, continue en x et pour tout $a > -1$

$$\forall (x,t) \in [a\,;+\infty[\times[1\,;+\infty[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{e^{-t}}{(a+t)^2} = \varphi_a(t)$$

avec $\varphi_a\colon [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable par des arguments analogues aux précédents.
On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt.$$

Par intégration par parties, on obtient

$$f'(x) - f(x) = -\frac{e^{-1}}{x+1}.$$

(b) Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x \in\,]-R\,;R[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} - a_n\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-1}x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-1}.$$

Après résolution de la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_n = \frac{a_0}{n!} + \mathrm{e}^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{(n-1-k)}k!}{n!}.$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédents. On a

$$|a_n| \le |a_0| + \mathrm{e}^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!} = |a_0| + \mathrm{e}^{-1}.$$

La suite (a_n) est bornée donc le rayon de convergence R de la série entière est au moins égal à 1 et, par les calculs qui précédent, on peut affirmer que la somme S de la série entière est solution de l'équation différentielle sur $]-1\,;1[$. En ajoutant la condition initiale $a_0 = f(0)$, on peut affirmer que $f(x) = S(x)$ sur $]-1\,;1[$ par unicité d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 87 : [énoncé]

On a

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})x}\right)$$

donc pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n + (-1+\mathrm{i})^n + (-1-\mathrm{i})^n}{4n!}x^n.$$

On a $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ etc, donc

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n + (-1+\mathrm{i})^n + (-1-\mathrm{i})^n &= 2\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{3n\pi}{4}\right)\\ &= 4\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Finalement

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^p\cos(\frac{p\pi}{2})}{(2p)!}x^{2p} = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q 2^{2q}}{(4q)!}x^{4q}.$$

Retrouvons ce résultat, en exploitant l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.
La fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ par produit de telles fonctions. De plus, la fonction f est paire donc le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.$$

Par l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$, on obtient

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4} + 4a_n = 0.$$

Puisque $a_0 = 1$, $a_1 = a_3 = 0$ (par imparité) et $a_2 = 0$ (par calculs), on obtient

$$a_{4q} = \frac{(-1)^q 4^q}{(4q)!} \text{ et } a_{4q+1} = a_{4q+2} = a_{4q+3} = 0$$

ce qui conduit au développement précédent.

Exercice 88 : [énoncé]

(a) $(x,t)\mapsto t^k\sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0\,;1]$ donc, par intégration sur un segment, f est continue.

(b) $(x,t)\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(t^k\sin(xt))$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0\,;1]$ donc par intégration sur un segment, f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 xt^k\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$xf'(x) + (k+1)f(x) = \int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^k\sin(xt)\right)\mathrm{d}t = \sin x.$$

(c) Par analyse synthèse, on obtient une seule fonction solution :

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+2+k)}x^{2n+2}$$

de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 89 : [énoncé]

(a) Soit v la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
La fonction v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ et

$$tv'(t) + v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n t^n.$$

Parallèlement, sur $\mathbb{R}$

$$3t^2\cos(t^3/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 3t^{3n+2}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, v est solution de (E) sur $]-R\,;R[$ si, et seulement si,

$$a_{3n} = a_{3n+1} = 0 \text{ et } a_{3n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi la fonction v est déterminée de manière unique et de plus celle-ci existe puisque le rayon de convergence de la série entière définie par les a_n ci-dessus est $R = +\infty$.

(b) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0\,;+\infty[$.
La solution générale homogène est $y(t) = \lambda/t$.
Par la méthode de la variation de la constante, on peut proposer la solution particulière

$$y(t) = \frac{2\cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2}\sin(t^{3/2})}{t}$$

et finalement la solution générale

$$y(t) = \frac{2\cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2}\sin(t^{3/2})}{t} + \frac{\lambda}{t}.$$

Parmi les solutions, la seule pouvant être prolongée par continuité en 0 , et donc correspondre à v, est celle obtenue pour $\lambda = -2$.

Exercice 90 : [énoncé]

(a) Notons $\mathcal{D}$ l'intervalle de convergence de cette série entière.
Le rayon de convergence étant 1 on en déduit : $]-1\,;1[\subset \mathcal{D} \subset [-1\,;1]$.
De plus $\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \sim \frac{1}{n^2}$ donc $f(1)$ et $f(-1)$ existe. Ainsi $\mathcal{D} = [-1\,;1]$.

(b) Sur $]-1\,;1[$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x).$$

Donc

$$\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = (1+x)\ln(1+x) - x + C.$$

Puisque $f(0) = 0$, on conclut

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$

sur $]-1\,;1[$.

(c)

$$\forall x \in [-1\,;1], \left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\right| \le \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

donc la série de fonctions définissant f converge normalement sur $[-1\,;1]$ et par suite f est continue.

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \bigl((1+x)\ln(1+x) - x\bigr) = 2\ln 2 - 1$$

et

$$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \bigl((1+x)\ln(1+x) - x\bigr) = 1.$$

Exercice 91 : [énoncé]
Introduisons le coefficient

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour $x \ne 0$ et $n \ge 2$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_n x^{2n}}\right| = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}|x|^2 = \frac{n}{n^2-1}|x|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La série entière $\sum a_n x^{2n}$ converge donc pour tout x réel et son rayon de convergence vaut $+\infty$. Reste à calculer sa somme.

On décompose la somme afin de faire apparaître des séries exponentielles.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}x^{2n}$$

avec convergence des séries introduites. En effet, la seconde somme converge car correspond à la série exponentielle évaluée en $-x^2$ et la première converge car se déduit par opérations des deux autres. De plus, en simplifiant le terme nul correspondant à l'indice 0 puis en opérant un glissement d'indice,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n!}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!}x^{2n+2}=x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^{2n}=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\quad\text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Exercice 92 : [énoncé]
Clairement $R=+\infty$.

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n=\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-n-2}{n!}x^n=\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)-2}{n!}x^n$$

donc

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n=\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{(n-2)!}-2\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}=(x^2-2)\mathrm{e}^x.$$

Exercice 93 : [énoncé]
Pour $x\neq 0$,

$$\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n}\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right|\to\left|x^2\right|$$

donc $R=1$.
Pour $x\in\left]-1\,;1\right[$

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

donc

$$xf'(x)=-\frac{x}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n x^n$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}=x\times\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 94 : [énoncé]
Pour $x\neq 0$, posons $u_n=\frac{x^{2n+1}}{3n+2}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to x^2$ donc $R=1$.
La fonction somme S est impaire, on se limite alors à $x>0$.

$$\sqrt{x}S(x^{3/2})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

or

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{3n+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$$

donc $S(x)=\frac{1}{x^{4/3}}\int_0^{x^{2/3}}\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ et il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples etc.

$$S(x)=\frac{1}{6x^{4/3}}\ln\frac{x^{4/3}+x^{2/3}+1}{x^{4/3}-2x^{2/3}+1}-\frac{1}{x^{4/3}\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x^{2/3}+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 95 : [énoncé]
Pour $x\neq 0$, posons

$$u_n=\frac{x^{2n}}{2n+1}\neq 0.$$

Puisque

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to|x|^2$$

on obtient $R=1$.
Sachant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

on obtient par intégration de développement en série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

puis, pour $x\neq 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Pour $x=0$, la somme vaut 1.

Exercice 96 : [énoncé]
Par la règle de d'Alembert, on obtient $R=1$.
Posons
$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$$
On a
$$xS(x^2)=\arctan x.$$
On en déduit
$$S(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\text{ pour }x>0.$$
Sachant
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$
on obtient par intégration de développement en série entière
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$
On en déduit
$$xS(-x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
donc
$$S(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\text{ si }x<0.$$
Enfin, pour $x=0$, $S(0)=1$.

Exercice 97 : [énoncé]
Clairement $R=1$.
Posons
$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{4n^2-1}.$$
Par décomposition en éléments simples
$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$
Sachant
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$
on obtient par intégration de développement en série entière
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$
On en déduit
$$S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{x^2-1}{4x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Exercice 98 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi\colon t\mapsto 1$, on obtient $a_n\to 0$.

(b) On a
$$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\pi/4}(\tan t)'(\tan t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}.$$

(c) Par monotonie $a_n+a_{n+2}\leq 2a_n\leq a_n+a_{n-2}$. On en déduit $a_n\sim\frac{1}{2n}$ puis $u_n(x)\sim\frac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ est donc égale à 1.
Pour $x=1$, $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si,$\alpha>0$.
Pour $x=-1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement si $\alpha\leq -1$.
Pour $\alpha>-1$, $2\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k^\alpha}a_k=\alpha+\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k^\alpha}(a_k+a_{k+2})+o(1)$
Or $\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha(n+1)}$ converge par application de critère spécial des séries alternées (car $n\mapsto\frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ décroît vers 0 pour n assez grand) donc $\sum u_n(x)$ converge.

(d) Puisque $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+2}x^n+a_nx^n=-\frac{\ln(1-x)}{x}.$$
On en déduit
$$f(x)+\frac{f(x)-\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}x}{x^2}=-\frac{\ln(1-x)}{x}$$
puis
$$f(x)=\frac{-x\ln(1-x)+\frac{\pi}{4}+x\frac{\ln 2}{2}}{x^2+1}.$$

Exercice 99 : [énoncé]

(a) On a
$$|a_n| = \frac{1}{n!}\int_0^1 t\prod_{k=1}^{n-1}(k-t)\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n}$$
donc $R \ge 1$.
$$|a_n| \ge \frac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t)\times\prod_{k=2}^{n-1}(k-1)\,\mathrm{d}t \ge \frac{1}{4n(n-1)}$$
donc $R \le 1$. Finalement $R = 1$.

(b) Soit $x \in]-1\,;1[$.
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\,\mathrm{d}t$$
or par convergence uniforme de la suite de fonctions de la variable t sur $[0\,;1]$ (convergence uniforme obtenue par convergence normale grâce à $|x| < 1$) on peut permuter somme et intégrale.
$$S(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+x)^t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 100 : [énoncé]

(a) Posons $a_n = \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} \ne 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2}$. $R = 2$.

(b) On sait que
$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2^n n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}$$
donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Par convergence uniforme,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\frac{2\sin t}{2-x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{(2-x)+x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(2-x)+xu^2}$$
puis
si $x > 0$ alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}\arctan\sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$
Si $x < 0$ alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\operatorname{argth}\sqrt{\frac{-x}{2-x}}.$$

Exercice 101 : [énoncé]
Posons
$$u_n(x) = n^{(-1)^n}x^n.$$
Pour $x \in [0\,;1[$, on a $u_n(x) \to 0$ et pour $x = \pm 1$, $(u_n(x))$ ne tend pas vers 0.
Le rayon de convergence de cette série entière vaut donc $R = 1$ et l'intervalle de convergence est $]-1\,;1[$.
Pour $x \in]-1\,;1[$, on peut décomposer la somme en deux
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}(2p)x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}.$$
D'une part
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}x^{2p+1} = \operatorname{argth}(x)$$
et d'autre part
$$\sum_{p=0}^{+\infty}(2p)x^{2p} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Exercice 102 : [énoncé]
Les séries entières définissant S_0, S_1 et S_2 sont de rayons de convergence $R = +\infty$.
Pour $x \in \mathbb{C}$, on a
$$S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

On a aussi

$$S_0(x) + jS_1(x) + j^2S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = \exp(jx)$$

et

$$S_0(x) + j^2S_1(x) + jS_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j^2x)^n}{n!} = \exp(j^2x).$$

En sommant ces trois relations, on obtient

$$S_0(x) = \frac{1}{3}\big(\exp(x) + \exp(jx) + \exp(j^2x)\big).$$

Exercice 103 : [énoncé]

(a) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, pour $|x| < \min(R, R')$, $\sum c_n x^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right).$$

Ainsi le rayon de convergence R'' de $\sum c_n x^n$ vérifie $R'' \geq \min(R, R')$.
En revanche, on ne peut facilement rien dire de plus de façon générale. Par exemple $1 - x$ et $\frac{1}{1-x}$ se développent en série entière de rayons de convergence $+\infty$ et 1 et leur produit de Cauchy est de rayon de convergence $+\infty$ ...

(b) Puisque $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$, on obtient facilement $R = 1$.
Si l'on pose $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$ et $b_k = 1$ pour $k \geq 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Par suite, pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 104 : [énoncé]

Par la règle de d'Alembert, $R = 1/\mathrm{e}$.
Sur $[-1/\mathrm{e}\,;1/\mathrm{e}]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)} x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}x)^n}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x/\mathrm{e})^n}{n(n+1)}\right).$$

Or sur $]-1\,;1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n+1} = -\ln(1-y) + \frac{1}{y}(\ln(1-y) + y).$$

Cette identité pouvant être prolongée en -1 et en 1 par continuité.
Cela permet alors d'expliciter la somme cherchée.

Exercice 105 : [énoncé]

Par intégration par parties successives

$$a_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Puisque $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \frac{1}{4}$ on a $R = 4$.
Pour $|x| < 4$, par convergence normale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 - t(1-t)x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{xt^2 - xt + 1}.$$

Si $x \in\,]0\,;4[$,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}}.$$

Si $x \in\,]-2\,;0[$,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(x-4)}} \operatorname{argth}\sqrt{\frac{x}{x-4}}.$$

Si $x = 0$, $f(x) = 1$.

Exercice 106 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi\colon t \mapsto 1$, on obtient $a_n \to 0$.

(b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)'(\tan t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

(c) Par monotonie $a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2}$. On en déduit

$$a_n \sim \frac{1}{2n}.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1.
Pour $x=1$, $\sum a_n$ diverge en vertu de l'équivalent précédent et par comparaison de séries à termes positifs.
Pour $x=-1$, $\sum(-1)^n a_n$ en vertu du critère spécial des séries alternées, la suite (a_n) étant notamment décroissante.
Ainsi la fonction f est définie sur $[-1\,;1[$.

(d) Puisque $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_{n+2}x^{n+1}+a_nx^{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$

pour $x\in[-1\,;1[$. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_{n+2}x^{n+1}+a_nx^{n+1}\right)=\frac{1}{x}\bigl(f(x)-a_0-a_1x\bigr)+xf(x)$$

donc

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}x-x\ln(1-x)\right)$$

pour $x\neq 0$ et aussi pour $x=0$ par continuité.
On peut aussi procéder à une permutation somme intégrale pour parvenir à

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}t}{1-x\tan t}.$$

Exercice 107 : [énoncé]

(a) Comme la suite (a_n) est bornée, on peut écrire $a_nx^n=\mathrm{O}(x^n)$. Or la série $\sum x^n$ converge absolument pour $|x|<1$ et donc, par comparaison, la série $\sum a_nx^n$ est absolument convergente.
Puisque $\cos(n\theta)=\mathrm{Re}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\bigr)$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n\right).$$

Par sommation géométrique (possible puisque $\left|x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|<1$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)=\frac{1-x\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}.$$

(b) La convergence de la série étudiée n'est pas immédiate. Exprimons ses sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos(n\theta)}{n+1}=\int_0^1\sum_{n=0}^{N}\cos(n\theta)x^n\,\mathrm{d}x.$$

Par le calcul au dessus, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos(n\theta)}{n+1}=\int_0^1\frac{1-x\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\,\mathrm{d}x.$$

Puisque $\left|\mathrm{Re}(z)\right|\leq|z|$, on peut écrire

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\right|\leq\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}x^n\right|$$

ce qui donne par un calcul analogue au précédent

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\right|\leq\frac{x^{N+1}}{|1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}\leq\frac{x^{N+1}}{|\mathrm{Im}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}=\frac{x^N}{|\sin\theta|}.$$

Par conséquent

$$\left|\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1\frac{x^N}{|\sin\theta|}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{(N+1)|\sin\theta|}\to 0.$$

On en déduit que la série $\sum\frac{\cos(n\theta)}{n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n+1}=\int_0^1\frac{1-x\cos\theta}{x-2x\cos\theta+1}\,\mathrm{d}x.$$

(c) On décompose l'intégrale étudiée en deux intégrales directement calculables

$$\int_0^1\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}x=\sin^2\theta\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}-\frac{\cos\theta}{2}\int_0^1\frac{2x-2\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}$$

et l'on obtient

$$\int_0^1\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}x=\sin\theta\left[\arctan\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right]_0^1-\frac{\cos\theta}{2}\left[\ln\left(x^2-2x\cos\theta+1\right)\right]_0^1.$$

On simplifie en exploitant

$$\arctan\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\arctan\bigl(\tan(\theta-\pi/2)\bigr)=\theta-\pi/2.$$

$$\arctan\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\arctan\frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2}=\frac{\theta}{2}$$

et

$$\ln(2-2\cos\theta)=\ln\bigl(4\sin^2\theta/2\bigr).$$

On obtient au final

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n+1}=\frac{\pi-\theta}{2}\sin\theta-\cos\theta\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Exercice 108 : [énoncé]

Les séries entières $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\alpha)}{n}x^n$ et $\sum_{n\geq 1}\cos(n\alpha)x^n$ ont le même rayon de convergence et, puisque $\bigl(\cos(n\alpha)\bigr)$ est une suite bornée qui n'est pas de limite nulle, ce rayon de convergence commun est égal à 1. On peut alors introduire la somme

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\alpha)}{n}x^n\quad\text{pour tout } x\in\left]-1\,;1\right[.$$

On exprime $S'(x)$ et on en déduit $S(x)$ par intégration.

Par dérivation d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence,

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n\alpha)x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\bigl((n+1)\alpha\bigr)x^n\quad\text{pour tout } x\in\left]-1\,;1\right[.$$

Cette somme est la partie réelle de la somme géométrique de raison $x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n\underset{|x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|<1}{=}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}=\frac{1}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}.$$

En multipliant par la quantité conjuguée,

$$S'(x)=-\operatorname{Re}\left(\frac{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\bigl(x-\cos(\alpha)\bigr)^2+\sin^2(\alpha)}\right)=-\frac{x-\cos(\alpha)}{x^2-2\cos(\alpha)x+1}.$$

On reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2-2\cos(\alpha)x+1$ et, puisque $S(0)=0$, on conclut

$$S(x)=-\frac{1}{2}\ln\bigl(x^2-2\cos(\alpha)x+1\bigr).$$

Exercice 109 : [énoncé]

Toute matrice complexe est trigonalisable.

La matrice complexe A est semblable à une matrice triangulaire supérieure

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p\end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la matrice A^n est alors semblable à T^n et donc

$$\operatorname{tr}\bigl(A^n\bigr)=\operatorname{tr}\bigl(T^n\bigr)=\lambda_1^n+\dots+\lambda_p^n$$

car T^n est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1^n,\dots,\lambda_p^n$. La série entière étudiée s'exprime donc

$$\sum\bigl(\lambda_1^n+\dots+\lambda_p^n\bigr)z^n$$

Celle-ci est la somme des séries entières $\sum\lambda_j^nz^n$ pour $j=1,\dots,p$. Ces dernières sont géométriques, de rayons de convergences $1/|\lambda_j|$ (en convenant $1/0=+\infty$) et de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_j^nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_jz)^n=\frac{1}{1-\lambda_jz}\quad\text{pour tout } z\in\mathbb{C}\text{ tel que }|\lambda_jz|<1$$

On en déduit que la série entière étudiée est de rayon de convergence au moins égal à

$$R=\min\left(\frac{1}{|\lambda_1|},\dots,\frac{1}{|\lambda_p|}\right)=\Bigl(\max\bigl(|\lambda_1|,\dots,|\lambda_p|\bigr)\Bigr)^{-1}$$

et de somme

$$S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{tr}\bigl(A^n\bigr)z^n=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_jz}\quad\text{pour tout } z\in\mathbb{C}\text{ tel que }|z|<R\qquad(2)$$

De plus, le rayon de convergence de cette série entière vaut exactement R car, si la matrice A possède des valeurs propres non nulles et que λ_{j_0} désigne l'une d'elles de module maximal, le second membre de l'identité (**??**) ne peut pas être prolongée par continuité en $z=1/\lambda_{j_0}$ et le rayon de convergence de la série entière ne peut être strictement supérieur à R.

Enfin, il reste à exprimer la somme de la série entière en fonction du polynôme caractéristique

$$\chi_A=\prod_{j=1}^{p}(X-\lambda_j)$$

On introduit le polynôme dérivé χ_A' et l'on étudie le quotient $\frac{\chi_A'}{\chi_A}$.

La dérivée d'un produit est la somme des produits où seul un facteur est dérivé

$$\chi_A'(X)=\sum_{j=1}^{p}\prod_{k\neq j}(X-\lambda_k)$$

et donc, pour tout complexe ζ différent des $\lambda_1,\dots,\lambda_p$,

$$\frac{\chi_A'(\zeta)}{\chi_A(\zeta)}=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\zeta-\lambda_j}$$

On peut alors exprimer la somme S de la série entière étudiée.
Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$. Si $z=0$, on a simplement $S(z)=p$. Si $z\neq 0$, en introduisant l'inverse $\zeta=1/z$, on obtient

$$S(z)=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_j z}=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\zeta-\lambda_j}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\chi_A'(1/z)}{\chi_A(1/z)}$$

Exercice 110 : [énoncé]
Posons $b_n=\frac{a_n}{n!}$, on a $b_0=1$ et

$$(n+1)b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}b_{n-k}b_k.$$

Notons S la somme de la série entière $\sum b_nx^n$ et posons R son rayon de convergence.
Par récurrence, on peut affirmer $|b_n|\leq 1$ et donc $R>0$.
Sur $]-R\,;R[$, la relation précédente donne a

$$S'(x)=S^2(x).$$

Après résolution, sachant que $S(0)=1$, on obtient

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

d'où l'on tire $a_n=n!$.

Exercice 111 : [énoncé]

(a) Pour $|x|<1$,

$$\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

avec

$$a_n=\operatorname{Card}\bigl\{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2\bigm| k+2\ell=n\bigr\}=\lfloor n/2\rfloor+1.$$

(b) Analyse :
Introduisons la série entière $\sum u_nx^n$ de somme S et de rayon de convergence R.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+3}x^{n+3}=u_{n+2}x^{n+3}+u_{n+1}x^{n+3}-u_nx^{n+3}.$$

En sommant, on obtient pour $|x|<R$,

$$S(x)-\bigl(u_0+u_1x+u_2x^2\bigr)=x\bigl(S(x)-u_0-u_1x\bigr)+x^2\bigl(S(x)-u_0\bigr)-x^3S(x).$$

On en déduit

$$S(x)=u_0\frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)}+u_1\frac{x}{1-x^2}+u_2\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}.$$

Synthèse : Considérons la fonction

$$f\colon x\mapsto u_0\frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)}+u_1\frac{x}{1-x^2}+u_2\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

f est une fonction rationnelle donc 0 n'est pas pôle, elle est développable en série entière sur $]-1\,;1[$.
Puisque cette fonction vérifie la relation

$$f(x)-\bigl(u_0+u_1x+u_2x^2\bigr)=x\bigl(f(x)-u_0-u_1x\bigr)+x^2\bigl(f(x)-u_0\bigr)-x^3f(x)$$

les coefficients u_n de son développement en séries entières vérifient

$$\forall x\in\,]-1\,;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+3}x^{n+3}=\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+2}+u_{n+1}-u_n)x^{n+3}.$$

Par identification des coefficients de séries entières de sommes égales sur $]-1\,;1[$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n.$$

Ceci détermine alors entièrement la suite (u_n) moyennant la connaissance des coefficients u_0, u_1, u_2.
Pour exprimer u_n, il ne reste plus qu'à former le développement en série entière de f.

$$\frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} = 1 - \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3}.$$

$$\frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} \text{ et } \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}.$$

On en déduit que pour $n \geq 3$,

$$u_n = -u_0 a_{n-3} + u_1 \varepsilon_n + u_2 a_{n-1}$$

avec $\varepsilon_n = 1$ si n est impair et 0 sinon.

Exercice 112 : [énoncé]

(a) Si la série entière S est de rayon de convergence $R > 0$, alors pour tout $x \in]-R\,;R[$ on a

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$S(x) = 1 + xS^2(x).$$

(b) Pour $x \neq 0$, on obtient, après résolution

$$S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ pour } x < 1/4.$$

Posons $\varepsilon(x)$ tel que

$$S(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

On a

$$\varepsilon(x) = \frac{2xS(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}.$$

La fonction ε est continue sur $]-R\,;0[\,\cup\,]0, \min(R, 1/4)[$ et ne prend que les valeurs -1 ou 1. On en déduit que cette fonction ε est constante et puisque S converge quand $x \to 0^{+/-}$, on peut affirmer que ε est constante égale à -1 car négative au voisinage de 0.
Finalement

$$S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ et } S(0) = 1.$$

(c) Après développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$, on obtient

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

et $R = 1/4$.
Puisque la fonction

$$T \colon x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

vérifie l'équation $xT^2(x) = T(x) - 1$, la reprise des calculs précédents (sachant $R > 0$) assure que les coefficients b_n vérifient

$$b_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} b_k.$$

On en déduit $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car les conditions qui précèdent déterminent une suite de façon unique.

(d) Par la formule de Stirling

$$a_n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

Exercice 113 : [énoncé]

(a)

$$N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p).$$

(b) $D(n)\leq n!$ donc $\left|\frac{D(n)}{n!}\right|\leq 1$ qui implique $R\geq 1$.

On a $\sum_{p=0}^{n}N(n,p)=n!$ donc $\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!(n-p)!}D(n-p)=1$ d'où par produit de Cauchy $\mathrm{e}^{x}f(x)=\frac{1}{1-x}$ puis

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}.$$

(c)

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}x^{n}$$

donc

$$D_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}$$

puis

$$N(n,p)=\frac{n!}{p!}\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^{k}}{k!}.$$

(d) Finalement

$$\frac{1}{n!}N(n,p)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{p!\mathrm{e}}.$$

Exercice 114 : [énoncé]

Analyse: La suite (a_n) des coefficients d'une série entière de somme S et de rayon de convergence de convergence $R>0$ est donnée par

$$a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exprimons alors la série entière $\sum a_nx^n$ avec $a_n=\frac{u_n}{n!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Notons S sa somme et R son rayon de convergence.

À partir de la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+2(n+1)u_n$, on forme une équation différentielle vérifiée par la somme de la série entière $\sum a_nx^n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on obtient en divisant par $1/(n+1)!$

$$(n+2)\frac{u_{n+2}}{(n+2)!}=\frac{u_{n+1}}{(n+1)!}+2\frac{u_n}{n!}.$$

c'est-à-dire

$$(n+2)a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n.\tag{3}$$

Soit $x\in\left]-R\,;R\right[$. En multipliant par x^{n+1} et en sommant, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}$$

avec convergence des trois séries introduites puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}=S(x)-\underbrace{a_0}_{=\alpha},\quad\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=xS(x)$$

et, par dérivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence $\left]-R\,;R\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}=S'(x)-\underbrace{a_1}_{=\beta}.$$

La fonction S est donc solution sur $\left]-R\,;R\right[$ de l'équation différentielle

$$(E)\colon y'(x)=(1+2x)y(x)+\beta-\alpha.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée a pour solution générale

$$y_h(x)=\lambda\mathrm{e}^{x+x^2}\quad\text{avec}\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$

Par la méthode de variation de la constante, on détermine une solution particulière de la forme

$$y_p(x)=\lambda(x)\mathrm{e}^{x+x^2}\quad\text{avec }\lambda\text{ une fonction dérivable.}$$

Cette fonction est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\lambda'(x)\mathrm{e}^{x+x^2}=\beta-\alpha\quad\text{c'est-à-dire}\quad\lambda'(x)=(\alpha-\beta)\mathrm{e}^{-(x+x^2)}.$$

On exprime une primitive à l'aide d'un symbole intégrale afin de proposer une solution particulière

$$y_p(x)=(\beta-\alpha)\mathrm{e}^{x+x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{-(t+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

La solution générale de l'équation (E) s'exprime

$$y(x)=\left(\lambda+(\beta-\alpha)\int_0^x\mathrm{e}^{-(t+t^2)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{x+x^2}\quad\text{avec}\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$

La fonction S est donc de cette forme et l'on détermine la valeur de λ par la condition $S(0)=\alpha$. On obtient

$$S(x)=\left(\alpha+(\beta-\alpha)\int_0^x \mathrm{e}^{-(t+t^2)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{x+x^2}.$$

Synthèse: La fonction S définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessus est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par le calcul, on vérifie $S(0)=\alpha$ et $S'(0)=\beta$. La fonction S est développable en série entière par opérations de produit et d'intégration de fonctions qui le sont. Puisque la fonction S est solution de l'équation différentielle (E), on peut affirmer que les coefficients (a_n) de son développement vérifient la condition (**??**) par unicité des coefficients d'un développement en série entière et un calcul à rebours de celui précédemment mené. On en déduit
$S^{(n+2)}(0)=S^{(n+1)}(0)+2(n+1)S^{(n)}(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et l'on vérifie alors par récurrence double que la fonction S satisfait $S^{(n)}(0)=u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Finalement, la fonction S est solution [5] du problème posé.

Exercice 115 : [énoncé]

(a) *On établit que la suite $\left(\frac{B_n}{n!}\right)$ est bornée.*

Montrons par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$ que B_n est compris entre 0 et $n!$.

Pour $n=0$, c'est immédiat.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n\in\mathbb{N}$. Le coefficient B_{n+1} est évidemment positif et, par hypothèse de récurrence forte,

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}B_k\le\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}k!=\sum_{k=0}^n\underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\le n!}\le(n+1)\cdot n!=(n+1)!\,.$$

La récurrence est établie.

On peut donc écrire

$$\frac{B_n}{n!}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}(1)$$

et, puisque la série entière $\sum 1\cdot z^n$ est de rayon de convergence égal à 1, on obtient $R\ge1$.

(b) *On forme une équation différentielle linéaire vérifiée par la fonction somme de la série entière.*

Notons S la somme de la série entière étudiée. Celle-ci est dérivable sur $]-R\,;R[$ avec

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}x^n.$$

Par la relation de récurrence exprimant B_{n+1}, on poursuit

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{B_k}{k!}\right)x^n.$$

On reconnaît en second membre le produit des séries entières $\sum\frac{1}{n!}x^n$ et $\sum\frac{B_n}{n!}x^n$. La première est de rayon de convergence $+\infty$ et sa somme est la fonction exponentielle, la seconde correspond à celle définissant S. Ainsi,

$$S'(x)=\mathrm{e}^xS(x)\quad\text{pour tout } x\in\,]-R\,;R[.$$

La fonction S est alors solution sur $]-R\,;R[$ de l'équation différentielle linéaire

$$y'=\mathrm{e}^xy.$$

La solution générale de cette équation s'exprime

$$y(x)=\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\quad\text{avec}\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$

La fonction S est donc de cette forme et, sachant $S(0)=B_0=1$, on obtient $\lambda=\mathrm{e}^{-1}$ puis

$$S(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}\quad\text{pour tout } x\in\,]-R\,;R[.$$

(c) *Les coefficients d'une série entière $\sum a_nx^n$ de rayon de convergence $R>0$ et de somme S sont données par*

$$a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}\quad\textit{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Ici $B_n=S^{(n)}(0)$ et il s'agit donc d'exprimer ce nombre dérivé sous la forme attendue. Par le développement en série entière de la fonction exponentielle, on écrit

$$S(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\mathrm{e}^x\right)^k=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{kx}.$$

5. Cette solution n'est pas unique, il suffit d'ajouter à S une fonction non nulle dont toutes les dérivées en 0 sont nulles pour former une autre solution (voir sujet ? ? ?).

Montrons [6] qu'il est possible de dériver terme à terme cette dernière somme.
On introduit les fonctions u_k définies sur $]-R\,;R[$ par

$$u_k(x)=\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{kx}.$$

Les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$u_k^{(n)}(x)=\frac{k^n}{k!}\mathrm{e}^{kx}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in\,]-R\,;R[$,

$$\left|u_k^{(n)}(x)\right|\leq\frac{k^n}{k!}\mathrm{e}^{kR}=\alpha_k.$$

Le terme α_k ne dépend pas de x et est le terme général d'une série convergente car satisfait le critère de d'Alembert :

$$\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|=\frac{k!}{(k+1)!}\left(\frac{k+1}{k}\right)^n\mathrm{e}^R=\underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{k+1}{k}\right)^n}_{\to 1}\mathrm{e}^R\xrightarrow[k\to+\infty]{}0<1.$$

Par majoration uniforme, la série de fonctions $\sum_k u_k^{(n)}$ converge normalement sur $]-R\,;R[$. Ceci valant pour tout $n\in\mathbb{N}$, on retrouve que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec, de plus, la possibilité de dériver terme à terme à tout ordre n

$$S^{(n)}(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}u_k^{(n)}(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}\mathrm{e}^{kx}\quad\text{pour tout } x\in\,]-R\,;R[.$$

En particulier,

$$B_n=S^{(n)}(0)=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 116 : [énoncé]

(a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donc

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n+1)!}$$

pour $x\neq 0$. Or

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n+1)!}$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, cela permet de conclure.

(b) Un raisonnement semblable, permet d'établir que $x\mapsto\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas. Par opération, le prolongement continue de $x\mapsto\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\sin x}{x}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 117 : [énoncé]

(a) Pour $t\neq 0$, on peut écrire

$$\frac{\cos t}{t}=\frac{\cos t-1}{t}+\frac{1}{t}.$$

Posons alors

$$g(t)=\frac{\cos t-1}{t}.$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0)=0$.
On a alors pour tout $x\neq 0$

$$f(x)=\int_x^{2x}g(t)\,\mathrm{d}t+\ln 2=G(2x)-G(x)+\ln 2$$

avec G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
On en déduit

$$f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\ln 2$$

et on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=\ln 2$.

(b) Pour $t\neq 0$ et aussi pour $t=0$ on a

$$g(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n-1}.$$

On peut alors poser

$$G(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{2n}$$

6. On peut aussi décomposer le terme e^{kx} en somme et chercher à échanger les deux signes de sommes. Cependant, il ne figure pas au cours d'outil simple permettant cet échange et celui-ci nécessite un retour aux sommes partielles pour être correctement justifié.

primitive de g et on obtient

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{4^n - 1}{2n}x^{2n}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 118 : [énoncé]
Pour tout $t \in [0\,;1[$ on sait

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$$

donc aussi

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{na}.$$

Soit F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ sur $[0\,;1]$.
Sur

$$[0\,;1[, F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{na+1}}{na+1} + F(0).$$

Or F est continue sur $[0\,;1]$ et la série de fonctions convergence uniformément sur $[0\,;1]$.
Par passage à la limite en 1,

$$F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} + F(0).$$

Par suite

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = F(1) - F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 119 : [énoncé]

(a) Par télescopage

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln(N+1).$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \to \gamma.$$

(b) Puisque

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}$$

on obtient

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} + \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}$$

or

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}\right| \le \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^k} \le \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)} < +\infty$$

donc on peut appliquer le théorème d'échange de Fubini et affirmer

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}(\zeta(k)-1)$$

et enfin

$$\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\big(\zeta(k)-1\big) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k).$$

Exercice 120 : [énoncé]
Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

somme de série entière définie sur $]-1\,;1[$.

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1}=\frac{x}{1-x^3}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)\times 3^n}=\sqrt[3]{9}S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\sqrt[3]{9}\int_0^{1/\sqrt[3]{3}}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1-t^3}$$

ce qui donne un résultat assez monstrueux :

$$9^{(1/3)}(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan((\frac{2}{9}3^{(2/3)}+\frac{1}{3})\sqrt{3})+\frac{1}{6}ln(3)+\frac{1}{6}ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)})-\frac{1}{3}ln(-3^{(2/3)}+3)+\frac{1}{18}\sqrt{3}\pi)$$

fourni par Maple.

Exercice 121 : [énoncé]

On a

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}$$

avec une convergence uniforme sur $[0\,;1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial.

On a alors

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

On peut montrer que cette vaut $\pi^2/12$ si l'on sait

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 122 : [énoncé]

On a

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}$$

avec convergence uniforme sur $[0\,;1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial. On peut donc intégrer terme à terme

$$\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 123 : [énoncé]

On a

$$\ln(1+u)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}u^k}{k}$$

avec convergence normale sur $[-|x|\,;|x|]$ donc

$$\ln(1+x\sin^2 t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k\sin^{2k}t}{k}$$

avec convergence normale sur $[0\,;\pi/2]$.

Par suite

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k}I_{k-1}$$

avec

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t=\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}\frac{\pi}{2}$$

puis

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k}\frac{(2k-2)!}{(2^{k-1}(k-1)!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Or

$$\sqrt{1+u}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k}x^k$$

avec

$$\binom{1/2}{k}=\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k((k-1)!)^2}$$

d'où

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\pi(\sqrt{1+x}-1).$$

Exercice 124 : [énoncé]

(a) Par le changement de variable $s = t^{n+1}$, on obtient

$$u_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 f(s^{1/(n+1)})\,\mathrm{d}s.$$

Posons alors $f_n(s) = f(s^{1/(n+1)})$.
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et convergent simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction constante égale à $f(1)$ elle-même continue par morceaux. On a de plus la domination

$$\left|f_n(s)\right| \le \max_{t\in[0;1]}\left|f(t)\right|.$$

Par convergence dominée, on a donc

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(1)\,\mathrm{d}s = f(1).$$

(b) On réalise le changement de variable $s = t^n$ et on obtient

$$v_n = \int_0^1 \ln(1+s) f(s^{1/n}) s^{-\frac{n-1}{n}}\,\mathrm{d}s.$$

Posons alors g_n la fonction définie par l'intégrande, on peut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée sachant

$$g_n(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(1+s)}{s} f(1) \text{ et } \left|g_n(s)\right| \le \frac{\ln(1+s)}{s} f(1)$$

et l'on obtient

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}\,\mathrm{d}s.$$

Pour calculer l'intégrale, il suffit ensuite d'écrire

$$\frac{\ln(1+s)}{s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} s^{n-1}$$

et de procéder à une intégration terme à terme sachant la sommabilité de

$$\int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} s^{n-1}\right|\mathrm{d}s = \frac{1}{n^2}.$$

On obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 125 : [énoncé]
Par développement en série entière

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \int_{[0;1[} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $n \ge 1$, il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues donc on peut donc intégrer terme à terme par le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}.$$

On a alors

$$n\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$

donc

$$n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 126 : [énoncé]
g est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$, c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et h l'est aussi par produit.
$h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ avec

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n t^n \mathrm{e}^{-t}}{2^{2n}(n!)!}$$

pour tout $t \in [0\,;+\infty[$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Puisque

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{1}{2^{2n} n!}$$

et donc la série $\sum \int_{[0;+\infty[} |f_n|$ converge.
Puisque $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers h continue par morceaux, on peut par théorème affirmer que h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} = \mathrm{e}^{-1/4}.$$

Exercice 127 : [énoncé]

(a) R est la borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble

$$\left\{ r \in [0\,;+\infty[\;\middle|\; \left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Soit $0 < r < R$. On peut introduire ρ tel que $r < \rho$ et $\left(a_n \rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite bornée. Pour tout $z \in D(0,r)$, on a

$$\left|a_n z^n\right| \le \left|a_n r^n\right| = |a_n|\rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \mathrm{O}\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right).$$

Ce majorant uniforme étant sommable (car $|r/\rho| < 1$), on obtient la convergence normale voulue.

(b) Pour $|z| < r$, on peut décomposer en série géométrique

$$\frac{1}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{r^{n+1}} z^n.$$

Sachant la fonction f bornée sur le compact $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = r \right\}$, il y a convergence de la série

$$\sum \int_0^{2\pi} \left| \frac{\mathrm{Im}\big(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{r^{n+1}} z^n \right| \mathrm{d}\theta$$

ce qui permet une intégration terme à terme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Im}\big(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\big(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta \right) \frac{z^n}{r^{n+1}}.$$

On obtient ainsi un développement en série entière sur $D(0,r)$.
Pour l'expliciter, on calcule le terme intégral en procédant à une intégration terme à terme justifiée par l'absolue convergence de $\sum a_n r^n$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\big(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k r^k$$

avec

$$I_k = \mathrm{Re}(a_k) \int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{Im}(a_k) \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Pour $n \ne k$, les deux intégrales sonts nulles.
Pour $n = k = 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{d}\theta = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

Pour $n = k \ne 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i} \int_0^{2\pi} \sin^2(k\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi \text{ et}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = \pi.$$

On peut alors conclure

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Im}\big(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi\,\mathrm{Im}(a_0)}{r} + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\mathrm{Im}(a_n) - \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(a_n)\big)z^n}{r}$$
$$= \frac{\mathrm{i}\pi}{r}\Big(\overline{f(0)} - f(z)\Big).$$

(c) Si f est une telle fonction, l'intégrale au-dessus est nulle et donc

$$f(z) = \overline{f(0)} \text{ pour tout } |z| < r.$$

On en déduit $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n = 0$ pour $n \ge 1$. La fonction f est alors constante réelle.

Exercice 128 : [énoncé]

(a) La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur $]0\,;a]$ et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur $-1/2$.

(b) Par développement en série entière, on a pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

et donc, pour tout $x]0\,;1[$,

$$\frac{x+\ln(1-x)}{x^2} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n}.$$

Après prolongement par continuité en 0, la fonction intégrée se confond avec la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. Celle-ci converge normalement sur $[0\,;a]$ ce qui permet d'intégrer terme à terme

$$\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^a \frac{x^{n-2}}{n}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{n(n-1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}.$$

(c) Posons $u_n(a) = \frac{a^n}{n(n+1)}$ pour $a \in [0\,;1]$.
Les fonctions u_n sont continues et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement car

$$\left|u_n(a)\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{avec} \quad \sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ convergente.}$$

Par convergence uniforme, la somme de la série de fonctions est définie et continue en 1 et donc

$$\lim_{a\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

On en déduit

$$\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -1$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 129 : [énoncé]
Par le développement en série entière de $\ln(1+x)$, on sait

$$\ln\left(1-t^2\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}t^{2n} \quad \text{pour tout } t \in [0\,;1[.$$

Considérons alors les fonctions $u_n :]0\,;1[\to \mathbb{R}$ définies par

$$u_n(t) = -\frac{1}{n}\ln(t)t^{2n-2} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1[$, les fonctions u_n sont continues par morceaux et la fonction somme est aussi continue par morceaux. Les fonctions u_n sont intégrables et, par intégration par parties,

$$\int_0^1 \left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{n(2n-1)^2}.$$

La série de ces intégrales est convergente et, par théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)^2}$$

avec convergence de l'intégrale et de la série introduite.
Par décomposition en élément simples,

$$\frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

D'une part,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'autre part,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{2n} - \frac{2}{2n-1}\right) = 2\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} -2\ln(2).$$

On conclut

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} - 2\ln(2).$$

Exercice 130 : [énoncé]

(a) En posant $Y = X - 1$,

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{1}{Y^n(Y+2)^m}.$$

Pour $Y \in \left]-1/2\,;1/2\right[$,

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \frac{1}{2^m}\frac{1}{\left(1+\frac{Y}{2}\right)^m} = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-m(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!}\frac{Y^k}{2^k}.$$

Après simplifications

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}Y^k.$$

On en déduit que la partie polaire relative au pôle 1 est

$$\frac{a_0}{(X-1)^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{X-1} = \frac{a_0}{Y^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y}$$

avec

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}.$$

De même, en posant $Z = X + 1$, la partie polaire relative au pôle -1 est

$$\frac{b_0}{(X+1)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{X+1} = \frac{b_0}{Z^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{Z}.$$

avec

$$b_k = \frac{(-1)^n}{2^{n+k}}\binom{n+k-1}{k}.$$

Enfin, puisque de partie entière nulle, la fraction rationnelle étudiée est la somme des deux parties polaires proposées.

(b) En réduisant chaque partie polaire au même dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k(X-1)^k}{(X-1)^n} + \frac{\sum_{k=0}^{m-1}b_k(X+1)^k}{(X+1)^m}.$$

Par conséquent, on posant

$$U(X) = \sum_{k=0}^{n-1}a_k(X-1)^k \text{ et } V(X) = \sum_{k=0}^{m-1}b_k(X+1)^k$$

la poursuite de la réduction au même dénominateur du calcul précédent donne

$$(X+1)^mU(X) + (X-1)^nV(X) = 1.$$

Exercice 131 : [énoncé]

(a) Soit $r \in \left]0\,;R\right[$. La série numérique $\sum a_nr^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!}z^n = a_nr^n\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n = \mathrm{o}\left(a_nr^n\right)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum a_nz^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

(b) On a

$$f(t)\mathrm{e}^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}t^n\mathrm{e}^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t) \text{ avec } f_n(t) = \frac{a_n}{n!}t^n\mathrm{e}^{-xt}.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions f_n et la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0\,;+\infty[$ car $t^2f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et

$$\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties généralisées successives

$$\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}.$$

Si $x > 1/R$ alors la série $\sum |a_n|/x^{n+1}$ est convergente et, par le théorème de Fubini, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable et

$$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{x^{n+1}}.$$

Exercice 132 : [énoncé]

(a) On a

$$S_N(x)^2 - 1 - x = S_N(x)^2 - S(x)^2 = R_N(x)(S(x) + S_N(x)).$$

C'est donc une série entière dont le premier terme non nul est au moins un x^{N+1}.
D'autre part $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme.

(b) Pour N tel que $A^N = 0$, $(S_N(A))^2 - I - A = O_n$ donc $B = S_N(A)$ convient.

Exercice 133 : [énoncé]

Pour $|x| < 1$, on a le développement en série entière

$$\binom{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha}{nx^n.}$$

On peut écrire

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b.$$

Par produit de Cauchy de développements en série entière

$$(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient en étudiant le coefficient d'indice n

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Exercice 134 : [énoncé]

(a) *Cas:* $n = 0$. Un polynôme P de A_0 est à coefficients positifs et prend la valeur 0 en 2, c'est n'est nécessairement le polynôme nul.
Cas: $n \geq 1$. Soit $P \in A_n$. Celui-ci n'est pas nul, notons N son dégré et écrivons

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N \quad \text{avec} \quad a_0, \dots, a_N \in \mathbb{N} \text{ et } a_N \neq 0.$$

La condition $P(2) = n$ entraîne

$$n \geq a_N 2^N \geq 2^N.$$

On en déduit que le degré de P est majoré par $\log_2 N$. De plus, en étant large, on peut affirmer que les coefficients de P sont au plus compris entre 0 et n. Il n'y a donc qu'un nombre fini de polynômes solutions.
$A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{1\}$ et $A_2 = \{2, 1+X\}$ donc $u_0 = u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $P \mapsto 1 + P$ transforme un polynôme de A_{2n} en un polynôme de A_{2n+1}. Inversement, un polynôme Q de A_{2n+1} a nécessairement un coefficient constant impair ce qui permet d'introduire $P = Q - 1$ qui est élément de A_{2n}. On en déduit $u_{2n} = u_{2n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $P \mapsto XP$ transforme un polynôme de A_n en un polynôme de A_{2n} dont le coefficient constant est nul et inversement, tout polynôme de A_{2n} de coefficient constant nul est de cette forme. De plus, comme au-dessus, on peut mettre en correspondance les polynômes de A_{2n} de coefficient constant non nul avec les polynômes de A_{2n-1}. On en déduit $u_{2n} = u_n + u_{2n-1}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui précède donne

$$u_{2n} = u_{2n-2} + u_n \quad \text{donc} \quad u_{2n} - u_{2(n-1)} = u_n.$$

En sommant cette relation, on obtient par télescopage la relation demandée.

(d)
```
def liste(n):
    if n == 0:
        L = [1]
    elif n % 2 == 1:
        L = liste(n-1)
        last = L[-1]
        L.append(last)
    else:
        L = liste(n-1)
        S = 0
        for k in range(n//2 + 1):
            S = S + L[k]
        L.append(S)
    return L
```

(e) On peut conjecturer un rayon de convergence R égal à 1.
La suite (u_n) étant croissante, elle n'est pas de limite nulle et donc $R \leq 1$
Soit $\rho > 1$. Montrons $u_n \leq M\rho^n$ pour M bien choisi.
On raisonne par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ après une initialisation sur les rangs 0 à n_0 avec n_0 qui sera précisé par la suite.
La propriété est vraie aux rangs $0, \dots, n_0$ en choisissant M suffisamment grand :

$$M = \max\left\{\frac{u_k}{\rho^k} \;\middle|\; k \in [\![0\,;n_0]\!]\right\}.$$

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq n_0$.
Cas: $n+1$ impair. La propriété est immédiate car $u_n = u_{n-1}$ et $\rho > 1$.
Cas: $n+1$ pair. On écrit $n = 2p$. L'hypothèse de récurrence donne

$$u_{2p} \leq \sum_{k=0}^{p} M\rho^k = M\frac{\rho^{p+1}-1}{\rho-1} \leq M\frac{\rho^{p+1}}{\rho-1} \leq M\rho^{2p}$$

sous réserve que $\rho^{p-1}(\rho-1) \geq 1$ ce qu'il est possible d'obtenir pour p assez grand ce qui determine la valeur de $n_0 \in \mathbb{N}$: on choisit celle-ci de sorte que

$$\rho^{n_0/2-1}(\rho-1) \geq 1.$$

La récurrence est établie.

Cette comparaison assure que le rayon de convergence R est supérieur à $1/\rho$ et, puisque ceci vaut pour tout $\rho > 1$, on conclut $R = 1$.

Exercice 135 : [énoncé]

(a) Considérons un ensemble E à $n+1$ éléments. Parmi ceux-ci, choisissons un élément particulier que nous nommons x. Dans une partition de E, il existe une seule partie A contenant l'élément x et celle-ci est de cardinal $k+1$ pour une certaine valeur de $k \in [\![0\,;n]\!]$.

Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on construit une partition de E dont la partie contenant x est à $k+1$ éléments en commençant par choisir k éléments dans $E \setminus \{x\}$ pour constituer A : cela offre $\binom{n}{k}$ possibilités. On complète ensuite la partie A à l'aide d'une partition de $E \setminus A$ afin de constituer une partition de E : cela offre B_{n-k} possibilités. Ainsi, il y a exactement $\binom{n}{k}B_{n-k}$ partitions de E dont la partie contenant x est de cardinal $k+1$ et, finalement,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}.$$

En renversant l'indexation puis en exploitant la symétrie des coefficients binomiaux on obtient

$$B_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}B_j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j.$$

(b)
```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * fact(n-1)

def binom(n,k): # Certes on peut faire mieux
    return fact(n)//fact(k)//fact(n-k)

def Bell(n):
    B = [1]
    for i in range(n):
        S = 0
        for k in range(i+1):
            S = S + binom(i,k)*B[k]
        B.append(S)
    return B
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

(c) Par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, vérifions $B_n \leq n!$

La propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq 2$. On a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k \leq n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \mathrm{e}\cdot n! \leq (n+1)!$$

car $n+1 \geq \mathrm{e}$.

La récurrence est établie.

La suite $(B_n/n!)$ est bornée et le rayon de convergence de $\sum \frac{B_n}{n!}x^n$ est au moins égal à 1.

(d) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \,]-R\,;R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}x^n.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$f'(x) = \mathrm{e}^x f(x).$$

La résolution de cette équation différentielle linéaire sachant $f(0) = 1$ donne

$$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}.$$

On peut alors exprimer B_n en déterminant le coefficient de x^n dans cette série entière. On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \mathrm{e}^{kx} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^n détermine $B_n/n!$ et donc

$$B_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{k^n}{p!}.$$

En réorganisant le calcul de cette somme (la famille est sommable)

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=k}^{+\infty} (-1)^{p-k} \frac{k^n}{k!\,(p-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

C'est la formule de Dobinski.
On peut aussi écrire

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \right)^p$$

auquel cas, on obtient

$$B_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \sum_{k_1+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!}.$$

Dans cette formule, le terme

$$\sum_{k_1+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!}$$

(où les k_j sont strictement positifs) se comprend comme le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments : ceci permet de comprendre le dénombrement réalisé ici. Au surplus, lorsque l'on connaît le nombre de ces surjections, on obtient

$$B_n = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{k^n}{p!}.$$

Ce n'est pas exactement la même formule qu'au-dessus mais on peut établir

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{k^n}{p!} = 0$$

pour tout $p > n$.

Exercice 136 : [énoncé]

On exprime $f(x)$ en fonction de $f(qx)$, $f\left(q^2x\right)$, $f\left(q^3x\right)$, etc.

Unicité:
Soit f une fonction solution du problème posé s'il en existe. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (1+x)f(qx) \quad \text{et} \quad f(qx) = \left(1+qx\right)f\left(q^2x\right)$$

donc

$$f(x) = (1+x)(1+qx)f\left(q^2x\right).$$

On peut ensuite exprimer $f\left(q^2x\right)$ puis $f(x)$ en fonction de $f\left(q^3x\right)$, etc. Par récurrence, on établit

$$f(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1+q^kx\right) \right) f\left(q^nx\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

De plus, par continuité de f, le facteur $f\left(q^nx\right)$ tend vers $f(0) = 1$ quand n tend vers l'infini et donc

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1+q^kx\right) \right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ceci assure qu'il existe au plus une fonction solution.
Existence:

On pourrait établir que la limite du produit introduite ci-dessus est bien définie[7] puis que la fonction associée est continue. Il est cependant plus immédiat d'étudier les séries entières solutions du problème posé afin de répondre directement à l'intégralité de la question.

7. Pour cela, on passe les facteurs au logarithme dès que k est assez grand pour qu'ils soient strictement positifs. On remarque ensuite que la série associée converge absolument en vertu de la comparaison $\ln\left(1+q^kx\right) = \mathrm{O}\left(q^k\right)$ quand k tend vers l'infini.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$. La somme S de cette série entière vérifie la relation $S(x) = (1+x)S(qx)$ si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1+x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (qx)^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^{n+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par glissement d'indice dans la dernière somme, on écrit encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} q^{n-1} x^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, en regroupant les deux sommes du second membre sur la plage d'indexation commune, on parvient à la condition

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1}\right) x^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ceci équivaut à

$$a_n = \frac{q^{n-1}}{1-q^n} a_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

De plus, la condition $S(0) = 1$ détermine $a_0 = 1$ et l'on obtient donc

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{q^{k-1}}{1-q^k}\right) \quad \text{pour tout}^{8}\ n \in \mathbb{N}.$$

Ceci établit de nouveau une unicité : celle de la série entière solution du problème posé. Cependant, en constatant que la série entière ainsi introduite est de rayon de convergence $+\infty$, on peut affirmer à rebours que sa fonction somme est solution.

Considérons la série entière dont les coefficients sont les a_n exprimés ci-dessus. Cette série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car, pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{q^n}{1-q^{n+1}}\right| |x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1.$$

En reprenant les calculs qui précèdent, la fonction somme donnée par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

vérifie $S(x) = (1+x)S(qx)$. C'est de plus une fonction continue qui prend la valeur 1 en 0, le problème posé possède donc une solution et celle-ci est développable en série entière.