

# Relations binaires

## Relations d'équivalence

### Exercice 1 [02643] [Correction]

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble  $E$  à la fois réflexive et transitive. On définit les nouvelles relations  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  par :

$$x\mathcal{S}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \text{ et } x\mathcal{T}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

Les relations  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont-elles des relations d'équivalences ?

### Exercice 2 [02644] [Correction]

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ . On définit une relation  $\mathcal{R}$  sur  $\wp(E)$  par :

$$X\mathcal{R}Y \iff X \cup A = Y \cup A$$

- Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence
- Décrire la classe d'équivalence de  $X \in \wp(E)$

### Exercice 3 [02983] [Correction]

On considère sur  $\mathcal{F}(E, E)$  la relation binaire  $\mathcal{R}$  définie par :

$$f\mathcal{R}g \iff \exists \varphi \in \mathcal{S}(E) \text{ telle que } f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

- Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée  $f \in \mathcal{F}(E, E)$ .

### Exercice 4 [02984] [Correction]

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire réflexive et transitive. On définit une relation  $\mathcal{S}$  par :

$$x\mathcal{S}y \iff x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

Montrer que  $\mathcal{S}$  est une relation d'équivalence et que  $\mathcal{R}$  permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de  $\mathcal{S}$ .

### Exercice 5 [02985] [Correction]

Soit  $(G, \times)$  un groupe et  $H$  un sous groupe de  $(G, \times)$ . On définit une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $G$  par :

$$x\mathcal{R}y \iff xy^{-1} \in H$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et en décrire les classes d'équivalence.

### Exercice 6 [03243] [Correction]

Soit  $G$  un groupe multiplicatif de cardinal  $p^\alpha$  avec  $p$  premier et  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$Z(G) \neq \{1\}$$

### Exercice 7 [02357] [Correction]

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ ,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$  ayant  $k$  classes d'équivalence et  $G = \{(x, y) \in E^2 \mid x\mathcal{R}y\}$  le graphe de  $\mathcal{R}$  supposé de cardinal  $p$ . Prouver qu'on a  $n^2 \leq kp$ .

## Calculs en congruence

### Exercice 8 [01190] [Correction]

Montrer que  $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$ .

### Exercice 9 [01191] [Correction]

Quel est le reste de la division euclidienne de  $1234^{4321} + 4321^{1234}$  par 7 ?

### Exercice 10 [01192] [Correction]

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- |                                 |   |                                |
|---------------------------------|---|--------------------------------|
| (a) $6 \mid 5n^3 + n$           | (c) $5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$                    | (e) $9 \mid 4^n - 1 - 3n$      |
| (b) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ | (d) $11 \mid 3^{8n} \times 5^4 + 5^{6n} \times 7^3$ | (f) $15^2 \mid 16^n - 1 - 15n$ |

### Exercice 11 [01193] [Correction]

Trouver les entiers  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $10 \mid n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$ .

**Exercice 12** [03679] [Correction]

Montrer que si  $n$  est entier impair alors

$$n^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

**Exercice 13** [03680] [Correction]

Soient  $\lambda, a, b \in \mathbb{Z}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $\lambda$  et  $m$  premiers entre eux. Montrer

$$a \equiv b \pmod{m} \iff \lambda a \equiv \lambda b \pmod{m}$$

**Exercice 14** [02359] [Correction]

Soit  $A$  la somme des chiffres de  $4444^{4444}$ ,  $B$  celle de  $A$  et enfin  $C$  celle de  $B$ . Que vaut  $C$ ?

## Relations d'ordre

**Exercice 15** [01518] [Correction]

On définit une relation binaire  $\preccurlyeq$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$$

Montrer que  $\preccurlyeq$  est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total?

**Exercice 16** [01519] [Correction]

Soit  $\preccurlyeq$  la relation définie sur  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$  par

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ ou } y \leq x'$$

Montrer que  $\preccurlyeq$  est une relation d'ordre sur  $E$ .

**Exercice 17** [01520] [Correction]

On définit une relation binaire  $\preccurlyeq$  sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$  par :

$$z \preccurlyeq z' \iff |z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \text{Re}(z) \leq \text{Re}(z'))$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

**Exercice 18** [01521] [Correction]

Soit  $E$  l'ensemble des couples  $(I, f)$  formé d'un intervalle  $I$  et d'une fonction réelle définie sur  $I$ .

On définit une relation  $\preccurlyeq$  sur  $E$  par :  $(I, f) \preccurlyeq (J, g) \iff I \subset J$  et  $g|_I = f$ .

Montrer que  $\preccurlyeq$  est une relation d'ordre sur  $E$ .

**Exercice 19** [01523] [Correction]

Soient  $A, B$  deux parties d'un ensemble  $E$  ordonné par  $\preccurlyeq$ .

On suppose que  $A$  et  $B$  ont chacun un plus grand élément.

Qu'en est-il de  $A \cup B$  lorsque l'ordre est total? lorsqu'il ne l'est pas?

Que dire de  $A \cap B$ ?

**Exercice 20** [01524] [Correction]

Soit  $(E, \preccurlyeq)$  un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément.

Montrer que  $E$  est fini.

**Exercice 21** [01525] [Correction]

Soit  $E$  un ensemble ordonné par une relation  $\leq$ .

Un tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est formé d'éléments  $a_{i,j} \in E$  avec  $i$  indice de ligne ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $j$  indice de colonne ( $1 \leq j \leq p$ ).

On note le plus petit élément de chaque colonne et l'on prend le plus grand de ces plus petits :

$$\max_{1 \leq j \leq p} \left( \min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} \right)$$

On note aussi le plus grand élément de chaque ligne et l'on prend le plus petit de ces plus grands :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left( \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j} \right)$$

(a) Comparer ces deux nombres.

(b) Donner un exemple de non égalité.

**Exercice 22** [02055] [Correction]

Montrer qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.

## Supremum et infimum

**Exercice 23** [ 02107 ] [\[Correction\]](#)

Soit

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Montrer que  $A$  est bornée, déterminer  $\inf A$  et  $\sup A$ .

**Exercice 24** [ 02108 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et bornées de  $\mathbb{R}$  telles que  $A \subset B$ .

Comparer  $\inf A$ ,  $\sup A$ ,  $\inf B$  et  $\sup B$ .

**Exercice 25** [ 02110 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$  non vides et majorées.

Montrer que  $\sup A$ ,  $\sup B$  et  $\sup(A \cup B)$  existent et

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

**Exercice 26** [ 02113 ] [\[Correction\]](#)

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(x) = x^n(1-x)$ . Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0;1]} f_n(x)$$

**Exercice 27** [ 00225 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $A$  une partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$ . On pose

$$m = \inf A \text{ et } B = A \cap ]-\infty; m+1]$$

Déterminer la borne inférieure de  $B$ .

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

Les relations  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont clairement réflexives et symétriques.

Soient  $x, y, z \in E$ .

Supposons  $x\mathcal{S}y$  et  $y\mathcal{S}z$ .

On a alors  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$  donc  $x\mathcal{R}z$  et aussi  $y\mathcal{R}x$  et  $z\mathcal{R}y$  donc  $z\mathcal{R}x$  puis  $x\mathcal{S}z$ .

Le raisonnement n'est plus valable avec  $\mathcal{T}$  et on peut présumer que  $\mathcal{T}$  ne sera pas une relation d'équivalence.

Prenons pour  $\mathcal{R}$  la relation divise définie sur  $\mathbb{N}^*$ . On a  $2 \mid 6$  et  $3 \mid 6$  donc  $2\mathcal{T}6$  et  $6\mathcal{T}3$  or  $2 \not\mathcal{T}3$ .

Ici la relation  $\mathcal{T}$  n'est pas transitive.

### Exercice 2 : [énoncé]

(a) La relation étudiée est évidemment réflexive, symétrique et transitive.

(b)  $Y \in Cl(X) \iff Y \cup A = X \cup A$ .

Soit  $Y \in Cl(X)$ . On a  $Y \cup A = X \cup A$

$\forall x \in Y \setminus A$  on a  $x \in Y \cup A = X \cup A$  et  $x \notin A$  donc  $x \in X \setminus A$ . Ainsi

$Y \setminus A \subset X \setminus A$  et inversement  $X \setminus A \subset Y \setminus A$  donc  $X \setminus A = Y \setminus A$ .

Puisque  $Y = (Y \setminus A) \cup (Y \cap A)$  on a  $Y = (X \setminus A) \cup B$  avec  $B \in \wp(A)$ .

Inversement soit  $Y = (X \setminus A) \cup B$  avec  $B \in \wp(A)$ .

On a  $Y \cup A = (X \setminus A) \cup (B \cup A) = (X \cap \bar{A}) \cup A = X \cup A$ .

Finalement  $Cl(X) = \{(X \setminus A) \cup B \mid B \in \wp(A)\}$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

(a)  $f \circ Id_E = Id_E \circ f$  donc  $f\mathcal{R}f$ .

Si  $f\mathcal{R}g$  alors il existe  $\varphi \in \mathcal{S}(E)$  telle que  $f \circ \varphi = \varphi \circ g$  mais alors

$g \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ f$  donc  $g\mathcal{R}f$ .

Si  $f\mathcal{R}g$  et  $g\mathcal{R}h$  alors il existe  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(E)$  telles que  $f \circ \varphi = \varphi \circ g$  et

$g \circ \psi = \psi \circ h$  donc  $f \circ \theta = \theta \circ h$  avec  $\theta = \varphi \circ \psi \in \mathcal{S}(E)$ . Ainsi  $f\mathcal{R}h$ .

(b)

$$g \in Cl(f) \iff \exists \varphi \in \mathcal{S}(E), g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

Finalement

$$Cl(f) = \{\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S}(E)\}$$

### Exercice 4 : [énoncé]

$\mathcal{S}$  est réflexive, symétrique et transitive sans difficultés.

On définit  $Cl(x) \preccurlyeq Cl(y) \iff x\mathcal{R}y$ . La relation  $\preccurlyeq$  est bien définie, réflexive transitive.

Si  $Cl(x) \preccurlyeq Cl(y)$  et  $Cl(y) \preccurlyeq Cl(x)$  alors  $x\mathcal{S}y$  donc  $Cl(x) = Cl(y)$ .

### Exercice 5 : [énoncé]

Soit  $x \in G$ . On a  $x\mathcal{R}x$  car  $xx^{-1} = 1 \in H$ .

Soient  $x, y \in G$ . Si  $x\mathcal{R}y$  alors  $xy^{-1} \in H$  et donc  $yx^{-1} \in H$  d'où  $y\mathcal{R}x$ .

Soient  $x, y, z \in G$ . Si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$  alors  $xy^{-1} \in H$  et  $yz^{-1} \in H$  donc  $xz^{-1} \in H$  d'où  $x\mathcal{R}z$ .

Finalement  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

Soit  $a \in G$ .

$$x \in Cl(a) \iff x\mathcal{R}a \iff xa^{-1} \in H$$

donc

$$Cl(a) = Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

### Exercice 6 : [énoncé]

Considérons la relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $G$  définie par

$$y_1\mathcal{R}y_2 \iff \exists x \in G, xy_1 = y_2x$$

Il est immédiat de vérifier que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $G$ . Les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  forment donc une partition de  $G$  ce qui permet d'affirmer que le cardinal de  $G$  est la somme des cardinaux des classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$ .

Une classe d'équivalence d'un élément  $y$  est réduite à un singleton si, et seulement si,

$$\forall x \in G, xy = yx$$

i.e.

$$y \in Z(G)$$

En dénombrant  $G$  en fonction des classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  et en isolant parmi celles-ci celles qui sont réduites à un singleton on a

$$\text{Card } G = \text{Card } Z(G) + N$$

avec  $N$  la somme des cardinaux des classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  qui ne sont pas réduites à un singleton.

Pour poursuivre, montrons maintenant que le cardinal d'une classe d'équivalence de la relation  $\mathcal{R}$  divise le cardinal de  $G$ .

Considérons une classe d'équivalence  $\{y_1, \dots, y_n\}$  pour la relation  $\mathcal{R}$  et notons

$$H_i = \{x \in G \mid xy_1 = y_ix\}$$

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , puisque  $y_1 \mathcal{R} y_i$ , il existe  $x_i \in G$  tel que

$$x_i y_1 = y_i x_i$$

Considérons alors l'application  $\varphi: H_1 \rightarrow H_i$  définie par

$$\varphi(x) = x_i x$$

On vérifie que cette application est bien définie et qu'elle est bijective.

On en déduit

$$\text{Card } H_1 = \dots = \text{Card } H_n = m$$

et puisque  $G$  est la réunion disjointes des  $H_1, \dots, H_n$

$$\text{Card } G = mn = p^\alpha$$

Ainsi toutes les classes d'équivalences qui ne sont pas réduites à 1 élément ont un cardinal multiple de  $p$  et donc  $p \mid N$ .

Puisque  $p$  divise  $\text{Card } G = \text{Card } Z(G) + N$ , on a

$$p \mid \text{Card } Z(G)$$

Sachant  $Z(G) \neq \emptyset$  (car  $1 \in Z(G)$ ) on peut affirmer

$$\text{Card } Z(G) \geq p$$

**Exercice 7 : [énoncé]**

Notons  $n_1, \dots, n_k$  les cardinaux respectifs des  $k$  classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$ . D'une part  $n = n_1 + \dots + n_k$ , d'autre part  $p = n_1^2 + \dots + n_k^2$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :  $(n_1 + \dots + n_k)^2 \leq k(n_1^2 + \dots + n_k^2)$ .

**Exercice 8 : [énoncé]**

$2^5 = -1$  [11] donc  $2^{10} = 1$  [11] puis  
 $2^{123} = 2^{120} \times 2^3 = (2^{10})^{12} \times 8 = 1 \times 8 = 8$  [11].  
 $3^5 = 1$  [11] donc  $3^{121} = 3^{120} \times 3 = (3^5)^{24} \times 3 = 1 \times 3 = 3$  [11].  
 Ainsi  $2^{123} + 3^{121} = 8 + 3 = 11$  [11] et donc  $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$ .

**Exercice 9 : [énoncé]**

$1234 = 2$  [7] et  $2^3 = 1$  [7] donc  $1234^{4321} = 2^{4321} = 2^{4320} \times 2 = 1 \times 2 = 2$  [7].  
 $4321 = 2$  [7] donc  $4321^{1234} = 2^{1234} = 2^{1233} \times 2 = 1 \times 2 = 2$  [7].  
 Par suite  $1234^{4321} + 4321^{1234} = 2 + 2 = 4$  [7]. Le reste cherché est 4.

**Exercice 10 : [énoncé]**

- (a) Pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  on a  $n^3 = n$  [6] donc  $5n^3 + n = 6n = 0$  [6].
- (b)  $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3 \cdot (3^2)^n + 4 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n = 0$  [7].
- (c)  $2^{2n+1} + 3^{2n+1} = 2 \cdot (2^2)^n + 3 \cdot (3^2)^n = 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 4^n = 5 \cdot 4^n = 0$  [5].
- (d)  $3^{8n} \times 5^4 + 5^{6n} \times 7^3 = 5^n \times 9 + 5^n \times 2 = 11 \times 5^n = 0$  [11].
- (e)  $4^n - 1 - 3n = (4 - 1)(1 + 4 + \dots + 4^{n-1}) - 3n = 3(1 + 4 + \dots + 4^{n-1} - n)$   
 or  $1 + 4 + \dots + 4^{n-1} - n = 1 + \dots + 1 - n = n - n = 0$  [3] donc  
 $9 \mid 4^n - 1 - 3n$ .
- (f)  $16^n - 1 - 15n = (16 - 1)(1 + 16 + \dots + 16^{n-1}) - 15n = 15(1 + 16 + \dots + 16^{n-1} - n)$   
 or  $1 + 16 + \dots + 16^{n-1} - n = 1 + \dots + 1 - n = n - n = 0$  [15] donc  
 $15^2 \mid 16^n - 1 - 15n$ .

**Exercice 11 : [énoncé]**

On a

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$	0	1	8	1	0	5	6	3	6	5

donc  $10 \mid n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2 \iff n = 0$  ou  $4$  [10].

**Exercice 12 : [énoncé]**

On peut écrire  $n = 2p + 1$  et alors

$$n^2 = (2p + 1)^2 = 4p(p + 1) + 1$$

Puisque l'un des facteurs de  $p(p + 1)$  est pair, le produit  $4p(p + 1)$  est multiple de 8 et donc

$$4p(p + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{8} \quad [8]$$

**Exercice 13 : [énoncé]**

( $\implies$ ) Si  $a \equiv b \pmod{m}$  alors  $m$  divise  $b - a$  et divise *a fortiori*  $\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a)$ .  
 ( $\impliedby$ ) Si  $\lambda a \equiv \lambda b \pmod{m}$  alors  $m$  divise  $\lambda(b - a)$ . Or  $m$  et  $\lambda$  sont supposés premiers entre eux donc, en vertu du théorème de Gauss,  $m$  divise  $b - a$ .

**Exercice 14 :** [énoncé]

Posons  $x = 4444^{4444}$ ,  $4444 = 7$  [9],  $7^3 = 1$  [9] donc  $4444^{4444} = 7$  [9].  
 $x < 10^{5 \times 4444}$  donc  $A \leq 9 \times 5 \times 4444 = 199980$ ,  $B \leq 9 \times 5 + 1 = 46$  puis  
 $C \leq 4 + 9 = 13$ .

Or  $C = B = A = x$  [9] donc  $C = 7$

**Exercice 15 :** [énoncé]

Soit  $x > 0$ , on a  $x = x^n$  pour  $n = 1 \in \mathbb{N}$  donc  $x \preccurlyeq x$ . La relation  $\preccurlyeq$  est réflexive.  
 Soient  $x, y > 0$ , si  $x \preccurlyeq y$  et  $y \preccurlyeq x$  alors il existe  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $y = x^n$  et  
 $x = y^m$ .

On a alors  $x = x^{nm}$  donc  $\ln x = nm \ln x$

Si  $x = 1$  alors  $y = x^n = 1 = x$ .

Si  $x \neq 1$  alors  $\ln x \neq 0$  puis  $1 = nm$ . Or  $n, m \in \mathbb{N}$  donc  $n = m = 1$  puis  $x = y$ .

Finalement la relation  $\preccurlyeq$  est antisymétrique.

Soient  $x, y, z > 0$ . Si  $x \preccurlyeq y$  et  $y \preccurlyeq z$  alors  $\exists n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $y = x^n$  et  $z = y^m$ .

On a  $z = x^{mn}$  avec  $mn \in \mathbb{N}$  donc  $x \preccurlyeq z$ . La relation  $\preccurlyeq$  est transitive.

Finalement  $\preccurlyeq$  est une relation d'ordre.

Cet ordre n'est pas total car, par exemple, 2 et 3 ne sont pas comparables.

**Exercice 16 :** [énoncé]

$\preccurlyeq$  est clairement réflexive et transitive.

Si  $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$  et  $(x', y') \preccurlyeq (x, y)$  alors  $(x, y) = (x', y')$  ou  $x \leq y \leq x' \leq y' \leq x$   
 et donc  $(x, y) = (x, x) = (x', y')$ .

**Exercice 17 :** [énoncé]

$\preccurlyeq$  est clairement réflexive.

Si  $z \preccurlyeq z'$  et  $z' \preccurlyeq z$  alors nécessairement  $|z| = |z'|$  et  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$  donc  $z = z'$   
 car  $\operatorname{Im}(z), \operatorname{Im}(z') \geq 0$ .

Si  $z \preccurlyeq z'$  et  $z' \preccurlyeq z''$  alors si  $|z| < |z''|$  alors  $z \preccurlyeq z''$  et sinon  $|z| = |z'| = |z''|$  et donc  
 $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z') \leq \operatorname{Re}(z'')$  ce qui permet à nouveau d'affirmer  $z \preccurlyeq z''$ .

Pour  $z, z' \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ .

Si  $|z| < |z'|$  alors  $z \preccurlyeq z'$

Si  $|z| > |z'|$  alors  $z' \preccurlyeq z$ .

Si  $|z| = |z'|$  alors dans le cas où  $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z')$  on a  $z \preccurlyeq z'$  et, dans le cas  
 complémentaire, on a  $z' \preccurlyeq z$ .

Dans tout les cas  $z$  et  $z'$  sont comparables, la relation d'ordre est totale.

**Exercice 18 :** [énoncé]

La relation est clairement réflexive.

Si  $(I, f) \preccurlyeq (J, g)$  et  $(J, g) \preccurlyeq (I, f)$  alors  $I \subset J$ ,  $J \subset I$  et  $g_I = f$  donc  $I = J$  et  
 $f = g$ .

Si  $(I, f) \preccurlyeq (J, g)$  et  $(J, g) \preccurlyeq (K, h)$  alors  $I \subset J \subset K$  et  $h|_I = (h_J)_I = g_I = f$  donc  
 $(I, f) \preccurlyeq (K, h)$ .

Finalement  $\preccurlyeq$  est une relation d'ordre.

**Exercice 19 :** [énoncé]

Si l'ordre est total  $A \cup B$  possède un plus grand élément :

$\max(A \cup B) = \max(\max(A), \max(B))$ .

Si l'ordre n'est pas total, les plus grands éléments de  $A$  et de  $B$  peuvent ne pas  
 être comparés aux éléments de  $A$  et de  $B$ . Dans  $(\mathbb{N}^*, |)$ , pour  $A = \{2, 4\}$  et  
 $B = \{3, 9\}$ ,  $A$  et  $B$  ont un plus grand élément alors que  $A \cup B$  n'en a pas.

$A \cap B$  peut ne pas posséder de plus grand élément, cet ensemble peut notamment  
 être vide.

**Exercice 20 :** [énoncé]

Par l'absurde supposons  $E$  infini.

Posons  $x_0 = \min E$ ,  $x_1 = \min E \setminus \{x_0\}$ , ...,  $x_n = \min E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ , ...

L'ensemble  $\{x_0, \dots, x_n, \dots\}$  n'a pas de plus grand élément. Absurde.

**Exercice 21 :** [énoncé]

(a) Pour tout  $1 \leq m \leq p$ ,

$$a_{i,m} \leq \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}$$

donc

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,m} \leq \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}$$

puis

$$\max_{1 \leq m \leq p} \min_{1 \leq i \leq n} a_{i,m} \leq \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}$$

(b) Pour le tableau  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\max_{1 \leq j \leq 2} \min_{1 \leq i \leq 2} a_{i,j} = 2 \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2} \max_{1 \leq j \leq 2} a_{i,j} = 3$$

**Exercice 22 :** [énoncé]

Par l'absurde, supposons que  $(u_n)$  soit une telle suite.  
 $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , elle possède donc un plus petit élément  $m$ .  
 Puisque  $m \in A$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $m = u_n$ . Mais alors  
 $u_{n+1} < u_n \leq m = \min A$ . Absurde.

**Exercice 23 :** [énoncé]

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leq 2$  donc  $A$  est bornée.  
 $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et bornée donc  $\inf A$  et  $\sup A$  existent.

$n$	0	1	2	3	...
$(-1)^n + \frac{1}{n+1}$	2	$-1 + \frac{1}{2}$	$1 + \frac{1}{3}$	$-1 + \frac{1}{4}$	...

2 est plus grand élément de  $A$  et donc  $\sup A = \max A = 2$ .  
 $A$  est clairement minorée par  $-1$  et  $(-1)^{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \rightarrow -1$  donc il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $-1$  donc  $\inf A = -1$ .

**Exercice 24 :** [énoncé]

$A$  et  $B$  sont des parties non vides et bornées de  $\mathbb{R}$  donc les bornes sup et inf considérées existent.  
 Pour tout  $a \in A$ , on a  $a \in B$  donc  $a \leq \sup B$ .  $\sup B$  majore  $A$  donc  $\sup A \leq \sup B$ .  
 Pour tout  $a \in A$ , on a  $a \in B$  donc  $\inf B \leq a$ .  $\inf B$  minore  $A$  donc  $\inf B \leq \inf A$ .  
 Enfin, puisque  $A \neq \emptyset$ ,  $\inf A \leq \sup A$ .

**Exercice 25 :** [énoncé]

$A, B, A \cup B$  sont des parties de  $\mathbb{R}$  non vides et majorées donc  $\sup A, \sup B, \sup(A \cup B)$  existent dans  $\mathbb{R}$ .  
 Pour tout  $x \in A \cup B$  on a  $x \leq \max(\sup A, \sup B)$  donc

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$$

Puisque  $A, B \subset A \cup B$  on a  $\sup A, \sup B \leq \sup(A \cup B)$  donc

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$$

puis l'égalité.

**Exercice 26 :** [énoncé]

La fonction  $f_n$  est dérivable avec

$$f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = nx^{n-1} - (n+1)x^n$$

On en déduit les variations

$x$	0	$x_n$	1
$f_n(x)$	0	$M_n$	0

avec  $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0; 1]$  et

$$M_n = \sup_{x \in [0;1]} f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

**Exercice 27 :** [énoncé]

Puisque  $m+1$  ne minore pas  $A$ , la partie  $B$  est non vide.  
 De plus  $B \subset A$  donc la borne inférieure de  $B$  existe et

$$\inf A \leq \inf B$$

Soit  $x \in A$ , si  $x \leq m+1$  alors  $x \in B$  et donc  $x \geq \inf B$ .

Si  $x > m+1$  alors à nouveau  $x \geq \inf B$ .

Ainsi  $\inf B$  minore  $A$  et donc

$$\inf A \geq \inf B$$

Finalement

$$\inf A = \inf B$$