

Probabilités sur un univers fini

Événements et langage ensembliste

Exercice 1 [04003] [Correction]

Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisable. Exprimer les événements suivants :

- Aucun des événements A, B ou C n'est réalisé.
- Un seul des trois événements A, B ou C est réalisé.
- Au moins deux des trois événements A, B ou C sont réalisés.
- Pas plus de deux des trois événements A, B ou C sont réalisés.

Exercice 2 [04004] [Correction]

Soient A, B, C trois événements.

- Vérifier que $(A \cup B) \cap C$ entraîne $A \cup (B \cap C)$.
- À quelle condition sur A et C les deux événements précédents sont-ils égaux ?

Construction d'une probabilité

Exercice 3 [03821] [Correction]

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k .

Exercice 4 [03822] [Correction]

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2 .

Exercice 5 [03824] [Correction]

Soient A, B deux parties d'un ensemble Ω fini vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap \bar{B} \neq \emptyset, \bar{A} \cap B \neq \emptyset \text{ et } \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset.$$

À quelle condition sur $(a, b, c, d) \in]0; 1[^4$ existe-t-il une probabilité P sur Ω vérifiant

$$P(A|B) = a, P(A|\bar{B}) = b, P(B|A) = c \text{ et } P(B|\bar{A}) = d?$$

Exercice 6 [03829] [Correction]

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.

Montrer

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}.$$

Probabilité par dénombrement

Exercice 7 [03957] [Correction]

On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leq n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.

Les répartitions possibles sont équiprobables.

- Déterminer la probabilité de l'événement :

$$A = \text{« chaque urne contient au plus une boule ».}$$

- Déterminer la probabilité de l'événement :

$$B = \text{« il existe une urne contenant au moins deux boules ».}$$

Exercice 8 [03958] [Correction]

- Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?
- Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

Exercice 9 [04116] [Correction]

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p + q = 1$). On opère à des tirages successifs avec remise.

- Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n -ième tirage ?
- Quelle est la probabilité que la k -ième boule blanche tirée apparaisse lors du n -ième tirage ?

Exercice 10 [04120] [Correction]

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

- (a) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
- (b) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.
- (c) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

Probabilités conditionnelles

Exercice 11 [03361] [Correction]

Soient A et B deux évènements avec $P(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$P(A \cap B | A \cup B) \text{ et } P(A \cap B | A).$$

Exercice 12 [03826] [Correction]

On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 13 [03831] [Correction]

Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé. On suppose $0 < P(B) < 1$. Établir

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}).$$

Exercice 14 [03841] [Correction]

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

- (a) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
- (b) Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 15 [03955] [Correction]

Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.

- (a) Quelle est la probabilité que celle-ci comporte exactement une paire d'As ?
- (b) Même question sachant que le jeu distribué comporte au moins un As ?

Exercice 16 [04012] [Correction]

Soient A, B, C trois évènements avec $P(B \cap C) > 0$. Vérifier

$$P(A|B \cap C)P(B|C) = P(A \cap B|C).$$

Exercice 17 [04956] [Correction]

Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n . On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note T la variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 2; n+1 \rrbracket$ précisant le nombre de tirages alors effectués.

- (a) Proposer un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience.
- (b) Calculer $P(T = 2)$.
- (c) Soit $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Exprimer $P(T > k | T > k - 1)$.
- (d) Donner un expression de $P(T = k)$ pour tout $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$

Formule des probabilités totales

Exercice 18 [03842] [Correction]

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 19 [03827] [Correction]

Une succession d'individus A_1, \dots, A_n se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ».

Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 .

On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Événements indépendants

Exercice 20 [03948] [Correction]

On lance à dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des événements

$A = \ll \text{on obtient le tirage } 2, 4 \text{ ou } 6 \gg$ et $B = \ll \text{on obtient le tirage } 3 \text{ ou } 6 \gg$.

Exercice 21 [03951] [Correction]

Soient A et B deux événements indépendants. Les événements A et \bar{B} sont-ils aussi indépendants ?

Exercice 22 [03953] [Correction]

Montrer qu'un événement A est indépendant de tout autre événement si, et seulement si, $P(A) = 0$ ou 1 .

Exercice 23 [03949] [Correction]

Soient A, B, C trois événements tels que A et B d'une part, A et C d'autre part, soient indépendants. Les événements A et $B \cup C$ sont-ils indépendants ? Même question avec A et $B \cap C$.

Exercice 24 [03950] [Correction]

Soient A, B, C trois événements tels que A et $B \cup C$ d'une part, A et $B \cap C$ d'autre part, soient indépendants. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 25 [04033] [Correction]

Soient A_1, \dots, A_n des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right).$$

Exercice 26 [04946] [Correction]

On donne la décomposition en facteurs irréductibles d'un entier $n \geq 2$

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

et note P la probabilité uniforme sur $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket$.

- Que définit la fonction d'Euler $\varphi(n)$? Rappeler sa valeur.
- Soit d un diviseur de n et $D(d)$ l'ensemble de ses multiples dans Ω . Calculer $P(D(d))$.
- On note A l'ensemble des entiers de Ω premiers avec n ; montrer

$$A = \bigcap_{k=1}^r \overline{D(p_k)}.$$

- Retrouver la valeur de $\varphi(n)$.

Formule de Bayes

Exercice 27 [03820] [Correction]

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.

Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 28 [03962] [Correction]

Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six » une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées). On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

- On obtient un « six ». Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
- Au contraire, on a obtenu un « cinq ». Même question.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

- (a) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
 (b) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
 (c) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.
 (d) $\overline{A \cap B \cap C}$.

Exercice 2 : [énoncé]

- (a) En développant

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

- (b) $A \cap C = A$ i.e. $A \subset C$ est une condition évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire car si

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

alors

$$A \subset A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C \subset C.$$

Exercice 3 : [énoncé]

Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\{k\}) = \alpha k$. Or par additivité

$$\sum_{k=1}^n P(\{k\}) = P(\Omega) = 1$$

donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Exercice 4 : [énoncé]

Si P est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(\{1, 2, \dots, k\}) = \alpha k^2.$$

En particulier, $P(\Omega) = 1$ donne $\alpha = 1/n^2$.

Aussi,

$$P(\{k\}) = P(\{1, \dots, k\}) - P(\{1, \dots, k-1\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Inversement, on définit bien une probabilité en posant

$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

car ces valeurs sont positives de somme égale à 1.

On vérifie aussi par additivité

$$P(\{1, 2, \dots, k\}) = \sum_{i=1}^k \frac{2i-1}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}$$

et la probabilité déterminée est bien solution.

Exercice 5 : [énoncé]

Soit P une probabilité solution. Posons

$$x = P(A \cap B), y = P(A \cap \overline{B}), z = P(\overline{A} \cap B) \text{ et } t = P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

On a $x, y, z, t \geq 0$ et par additivité

$$x + y + z + t = P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Inversement, si x, y, z, t sont quatre réels positifs de somme égale à 1, on peut déterminer une probabilité P sur Ω vérifiant les conditions ci-dessus : il suffit d'introduire un élément de chacun des ensembles disjoints $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, de poser la probabilité de l'événement élémentaire associé égale à x, y, z et t respectivement, puis les probabilités des autres événements élémentaires égaux à 0.

Le problème revient alors à déterminer sous quelle condition, il existe $x, y, z, t \geq 0$ de somme égale à 1 tels que

$$P(A|B) = a, P(A|\overline{B}) = b, P(B|A) = c \text{ et } P(B|\overline{A}) = d.$$

Par additivité

$$P(A) = x + y \text{ et } P(B) = x + z.$$

On a alors $P(A|B) = a$ si, et seulement si, $x = a(x+z)$.

De même, les autres conditions fournissent les équations

$$y = b(1 - (x+z)), x = c(x+y) \text{ et } z = d(1 - (x+y))$$

ce qui nous conduit à un système linéaire de quatre équations et trois inconnues

$$\begin{cases} (1-a)x - az = 0 \\ bx + y + bz = b \\ (1-c)x - cy = 0 \\ dx + dy + z = d. \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à la solution

$$x = \frac{abc}{a(1-c) + bc}, y = \frac{ab(1-c)}{a(1-c) + bc} \text{ et } z = \frac{(1-a)bc}{a(1-c) + bc}$$

avec le dénominateur commun non nul car somme de quantités strictement positives.

La quatrième équation du système est alors vérifiée si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d).$$

La solution (x, y, z) alors obtenue vérifie $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z \leq 1$ de sorte qu'on peut encore déterminer $t \geq 0$ tel que $x + y + z + t = 1$.

Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

ce qui, en divisant par $abcd$, peut encore s'énoncer

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right).$$

Exercice 6 : [énoncé]

On a $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leq P(A)$ et de même $P(A \cap B) \leq P(B)$ donc

$$P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}.$$

Bien évidemment $P(A \cap B) \geq 0$. De plus $P(A \cup B) \leq 1$ or

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

donc

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

puis

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B).$$

Exercice 7 : [énoncé]

En discernant les boules et les urnes, chaque tirage se comprend comme une application φ de $\{1, \dots, r\}$ vers $\{1, \dots, n\}$ associant à la boule d'indice i l'urne de numéro $\varphi(i)$ qui la contient.

Il y a n^r répartitions possible.

- (a) La probabilité cherchée correspond à celle de choisir une fonction φ injective soit

$$P(A) = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)}{n^r}.$$

- (b) La probabilité cherchée est complémentaire de la précédente

$$P(B) = 1 - P(A).$$

Exercice 8 : [énoncé]

- (a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.
- (b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

Exercice 9 : [énoncé]

Notons A_i l'événement « une boule blanche est obtenue lors du i -ème tirage ». Les événements A_i sont mutuellement indépendants et $P(A_i) = p$ pour tout i .

- (a) Notons B_n l'événement « la première boule blanche apparaît lors du n -ième tirage ».

On peut écrire

$$B_n = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n.$$

Par indépendance, on obtient

$$P(B_n) = (1-p)^{n-1}p.$$

- (b) Notons C_{n-1} l'événement « $k-1$ boules sont apparues lors des $n-1$ premiers tirages » et D_n l'événement « la k -ième boule blanche tirée apparaît lors du n -ième tirage ».

On a $D_n = C_{n-1} \cap A_n$ et

$$P(C_{n-1}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

car il s'agit de la probabilité d'obtenir $k-1$ succès dans la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Par indépendance, on conclut

$$P(D_n) = P(C_{n-1} \cap A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exercice 10 : [énoncé]

- (a) Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres a, b, c dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à $1/6$.
- (b) Un tirage s'apparente à une fonction de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. Il y a 10^3 fonctions toutes équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs distinctes qu'elles prennent qu'il suffit ensuite d'ordonner. Déterminer ces trois valeurs revient à choisir 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a $\binom{10}{3}$ possibilités. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{12}{100}.$$

- (c) Il s'agit maintenant de dénombrer les fonctions croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. À une telle fonction f , on peut associer la fonction $g: \llbracket 1; 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; 12 \rrbracket$ déterminée par

$$g(1) = f(1), g(2) = f(2) + 1 \text{ et } g(3) = f(3) + 2.$$

La fonction f étant croissante, la fonction g est strictement croissante. Inversement, à une fonction g strictement croissante de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 12 \rrbracket$ correspond une unique fonction f croissante de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. Il y a donc autant de fonctions croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$ que de fonctions strictement croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 12 \rrbracket$ à savoir $\binom{12}{3}$. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{12}{3}}{10^3} = \frac{22}{100}.$$

Exercice 11 : [énoncé]

Puisque $A \subset A \cup B$, on a $P(A \cup B) \geq P(A)$ puis

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

i.e.

$$P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A).$$

Exercice 12 : [énoncé]

Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$P(A) = p.$$

Considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i . Par hypothèse $P(A_i) = P(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$P(A_i) = p/N.$$

La question posée consiste à déterminer

$$P(A_N | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}).$$

On a

$$P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{N-1}{N}p$$

et

$$P(A_N \cap \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = P(A_N) = \frac{p}{N}$$

donc

$$P(A_N | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = \frac{p}{N - (N-1)p}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

On a

$$P(A) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})).$$

Les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ étant disjoints

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}).$$

Or $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ et $P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B})P(\bar{B})$.

Exercice 14 : [énoncé]

- (a) L'événement contraire est que le tirage ne comporte que des boules blanches. Par dénombrement, sa probabilité est

$$\binom{8}{3} / \binom{10}{3} = \frac{7}{15}$$

et la probabilité cherchée est

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

- (b) Notons A l'événement, la première boule tirée est noire. En raisonnant comme au dessus

$$P(A) = \frac{9 \times 8 + 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}.$$

L'événement B , au moins une boule tirée est noire a été mesurée ci-dessus et donc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{8}.$$

Exercice 15 : [énoncé]

- (a) Il y a $\binom{52}{5}$ distributions possibles équiprobables.
 Il y a exactement $\binom{4}{2}$ paires d'As, $\binom{48}{3}$ façons de compléter ce jeu avec d'autres cartes que des As.
 Au final, ce la donne la probabilité

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{2162}{54145} \simeq 0,04.$$

- (b) La probabilité que le jeu distribué ne comporte pas d'As est

$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

et par complément, celle que le jeu distribué comporte au moins un As est

$$1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

La probabilité conditionnelle cherchée est donc

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5} - \binom{48}{5}} = \frac{1081}{9236} \simeq 0,12.$$

Exercice 16 : [énoncé]

On a

$$P(A|B \cap C)P(B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B|C).$$

Exercice 17 : [énoncé]

- (a) Quitte à poursuivre les tirages dans l'urne, on peut supposer que l'on tire exactement $n + 1$ boules dans celle-ci et on s'intéresse alors au rang d'apparition d'un premier tirage identique à l'un des précédents. Les tirages étant équiprobables, on considère $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket^{n+1}$ muni de la probabilité uniforme.
 (b) Pour $k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, introduisons X_k la variable aléatoire déterminant le numéro de la boule obtenue lors du k -ième tirage : celles-ci sont mutuellement indépendantes car le tirage est supposé avoir lieu avec remise. L'événement $T = 2$ se confond avec $X_1 = X_2$ qui est lui-même la réunion des $(X_1 = i, X_2 = i)$ pour i allant de 1 à n . Ces derniers événements étant deux à deux incompatibles

$$P(T = 2) = \sum_{i=1}^n P(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^n P(X_1 = i)P(X_2 = i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

- (c) L'événement $(T > k - 1)$ est de probabilité non nulle et correspond à l'obtention de valeurs deux à deux distinctes de X_1, \dots, X_{k-1} . Par conséquent,

$$P(T > k | T > k - 1) = P(X_k \neq X_1, \dots, X_{k-1} | T > k - 1) = \frac{n - (k - 1)}{n}.$$

- (d) Pour $k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, on a par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P(T > k | T > k - 1) = \frac{P(T > k, T > k - 1)}{P(T > k - 1)} = \frac{P(T > k)}{P(T > k - 1)}$$

et donc

$$P(T > k) = \frac{n - (k - 1)}{n} P(T > k - 1) = \dots = \underbrace{\frac{n - (k - 1)}{n} \cdot \frac{n - (k - 2)}{n} \dots \frac{n - 1}{n}}_{k-1 \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n - k)! n^k}.$$

Pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on obtient

$$P(T = k) = P(T > k - 1) - P(T > k) = \frac{n!}{(n - k + 1)! n^{k-1}} - \frac{n!}{(n - k)! n^k} = \frac{(k - 1)n!}{(n - k + 1)! n^k}.$$

Exercice 18 : [énoncé]

Notons A_i l'événement la boule obtenue lors du i -ème tirage est noire.

On introduit un système complet d'événements en considérant B_1, \dots, B_4 égaux à

$$A_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cap A_2 \text{ et } \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2.$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(A_3) = \sum_{k=1}^4 P(A_3 | B_k) P(B_k).$$

Il ne reste plus qu'à évaluer...

$$P(A_3 | B_1) = 0.$$

$$P(A_3 | B_2) = P(A_3 | B_3) = 1/8 \text{ avec } P(B_2) = P(B_3) = 8/10 \times 2/9$$

et

$$P(A_3 | B_4) = 2/8 \text{ avec } P(B_4) = 8/10 \times 7/9.$$

Au final

$$P(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

C'est aussi la probabilité que la première boule tirée soit noire et par un argument de symétrie ce n'est pas si étonnant...

Exercice 19 : [énoncé]

On a $p_1 = 1$ et $p_2 = p$.

Supposons connu p_n . Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n).$$

La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1-p.$$

Sachant la condition initiale $p_1 = 1$, cette suite arithmético-géométrique a pour terme général

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^{n-1}}{2}.$$

Si $p \in]0; 1[$ alors $|2p-1| < 1$ et donc $p_n \rightarrow 1/2$.

Exercice 20 : [énoncé]

$P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = P(\{6\}) = 1/6$ donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Les événements A et B sont bien indépendants.

Exercice 21 : [énoncé]

Puisque A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$, on a

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

et donc

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

puis

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}).$$

Les événements A et \bar{B} sont indépendants.

Exercice 22 : [énoncé]

Si A est indépendant de tout événement alors A est indépendant de lui-même et donc

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2.$$

On en déduit $P(A) = 0$ ou 1 .

Inversement, supposons $P(A) = 0$. Pour tout événement B , on a $A \cap B \subset A$ et donc $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. Ainsi

$$P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B).$$

Supposons maintenant $P(A) = 1$. On a $P(\bar{A}) = 0$ et donc \bar{A} est indépendant de tout événement B . Par suite, A est aussi indépendant de tout événement B .

Exercice 23 : [énoncé]

Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2\} \text{ et } C = \{2, 3\}.$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ et } P(A \cap C) = P(A)P(C).$$

Cependant

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cup C) = 1/4$$

et

$$P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cap C) = 1/12.$$

Ainsi, A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants. Non plus, A et $B \cap C$.

Exercice 24 : [énoncé]

Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3\} \text{ et } C = \{1, 2, 4\}.$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/3 = P(A)P(B \cup C) \text{ et } P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 = P(A)P(B \cap C).$$

Cependant

$$P(A \cap B) = 1/6 \neq P(A)P(B) = 1/4.$$

Exercice 25 : [énoncé]

On étudie

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right).$$

Par indépendances des $\overline{A_i}$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)).$$

Or $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \leq \prod_{i=1}^n e^{-P(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right).$$

Exercice 26 : [énoncé]

(a) $\varphi(n)$ détermine le nombre d'entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$ premiers avec n . C'est aussi le nombre d'inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On sait

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

(b) Il y a exactement n/d multiples de d dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, ce sont $d, 2d, \dots, n$. On en déduit $P(D(d)) = 1/d$.

(c) Les entiers ℓ de Ω premiers avec n sont tels que $\ell \wedge n = 1$, ils correspondent aux entiers qui ne sont divisibles par aucun des facteurs premiers de n .

(d) Les événements $D(p_1), \dots, D(p_r)$ sont mutuellement indépendants car, si $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq r$, on a

$$D(p_{i_1} \dots p_{i_s}) = D(p_{i_1}) \cap \dots \cap D(p_{i_s})$$

et donc

$$P(D(p_{i_1}) \cap \dots \cap D(p_{i_s})) = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_s}} = P(D(p_{i_1})) \times \dots \times P(D(p_{i_s})).$$

L'indépendance des $D(p_1), \dots, D(p_r)$ entraîne celle des événements contraires $\overline{D(p_1)}, \dots, \overline{D(p_r)}$ et donc

$$P(A) = \prod_{k=1}^r P(\overline{D(p_k)}) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Aussi,

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

et on retrouve la formule précédente.

Exercice 27 : [énoncé]

Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a

$$P(M) = 10^{-4}, P(T|M) = 0,99 \text{ et } P(T|\overline{M}) = 10^{-3}.$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M})$$

puis par la formule de Bayes

$$P(M|T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)}$$

ce qui numériquement donne 9 %.

La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif! Cela s'explique aisément car la population de malade est de 1/10000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1000.

Exercice 28 : [énoncé]

- (a) Notons D l'évènement le dé tiré est équilibré et A l'évènement : on a obtenu un « six »

$$P(D) = P(\bar{D}) = 1/2, P(A|D) = 1/6 \text{ et } P(A|\bar{D}) = 1/2.$$

Par la formule de Bayes

$$P(D|A) = \frac{P(A|D)P(D)}{P(A)}$$

avec par la formule des probabilités totales

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|\bar{D})P(\bar{D}).$$

On obtient

$$P(D|A) = \frac{1}{4}.$$

- (b) Notons B l'évènement : on a obtenu un « cinq » Par des calculs analogues aux précédents

$$P(D|B) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10}} = \frac{5}{8}.$$