

Polynômes

L'anneau des polynômes

Exercice 1 [02127] [Correction]

Résoudre les équations suivantes :

(a) $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

(b) $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 [02674] [Correction]

Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 3 [02377] [Correction]

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme

$$(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n}).$$

(b) En déduire que tout entier $p > 0$ s'écrit de façon unique comme somme de puissance de 2 : 1, 2, 4, 8, ...

Exercice 4 [02553] [Correction]

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n .

Polynômes réels

Exercice 5 [00399] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$;

(ii) $\exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2$.

Polynômes complexes

Exercice 6 [00271] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et tel que $P(0) = 1$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathbb{C}, |z| < \varepsilon \text{ et } |P(z)| < 1.$$

Exercice 7 [03342] [Correction]

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$. On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

Montrer

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, |a_k| \leq M.$$

On pourra employer des racines de l'unité.

Exercice 8 [02165] [Correction]

Soit

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X].$$

Montrer que si ξ est racine de P alors

$$|\xi| \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|.$$

Exercice 9 [03683] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant dont les racines complexes sont de parties imaginaires positives ou nulles. Montrer que le polynôme $P + \overline{P}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10 [04978] [Correction]

Soit P un polynôme complexe non constant. Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P - \lambda$ soit scindé à racines simples ?

Polynômes réels scindés

Exercice 11 [03581] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé de degré ≥ 2 ; on veut montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.

- Énoncer le théorème de Rolle.
- Si x_0 est racine de P de multiplicité $m \geq 1$, déterminer sa multiplicité dans P' ?
- Prouver le résultat énoncé.

Exercice 12 [00261] [Correction]

- Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f s'annule au moins n fois. Montrer que f' s'annule au moins $n - 1$ fois.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples avec $n = \deg(P) \geq 2$. Montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.
- Montrer que le résultat perdure même si les racines de P ne sont pas simples.

Exercice 13 [02160] [Correction]

Soit P un polynôme de degré $n + 1 \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels possédant $n + 1$ racines réelles distinctes.

- Montrer que son polynôme dérivé P' possède exactement n racines réelles distinctes.
- En déduire que les racines du polynôme $P^2 + 1$ sont toutes simples dans \mathbb{C} .

Exercice 14 [02163] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré supérieur à 2. Montrer que P' est scindé.

Exercice 15 [02669] [Correction]

- Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur \mathbb{R} , montrer que P' est scindé ou constant sur \mathbb{R} .
- Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer que $X^{10} + aX^9 + bX^8 + cX^7 + X + 1$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 16 [03339] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples dans \mathbb{R} . Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ les racines de $P^2 + \alpha^2$ dans \mathbb{C} sont toutes simples.

Exercice 17 [03696] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout réel α , le polynôme $P' + \alpha P$ est lui aussi scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 18 [00274] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur \mathbb{R} . Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 19 [03340] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer qu'aucun coefficient nul de P ne peut être encadré par deux coefficients non nuls et de même signe.

Exercice 20 [04951] [Correction]

Soit P un polynôme réel unitaire de degré $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P est scindé sur \mathbb{R} si, et seulement si, pour tout z complexe

$$|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|.$$

Dérivation

Exercice 21 [02129] [Correction]

Résoudre les équations suivantes :

- $P'^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$
- $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 22 [02130] [Correction]

Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n - P'_n = X^n.$$

Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 23 [02132] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X).$$

Exercice 24 [03338] [Correction]

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t) dt = k + 1.$$

Exercice 25 [03341] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $a \in \mathbb{R}$ vérifie

$$P(a) > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(a) \geq 0.$$

Montrer que le polynôme P ne possède pas de racines dans $[a; +\infty[$.

Division euclidienne

Exercice 26 [02141] [Correction]

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tels que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 27 [02142] [Correction]

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 28 [02143] [Correction]

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X \cos t + \sin t)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 29 [02144] [Correction]

Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$ et r le reste de la division euclidienne de k par n .

Montrer que le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$ est X^r .

Exercice 30 [02145] [Correction]

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$.

(a) De la division euclidienne de n par m , déduire celle de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.

(b) Établir que

$$\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\text{pgcd}(n, m)} - 1.$$

Divisibilité

Exercice 31 [02133] [Correction]

Montrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondant :

(a) $X - 1 \mid X^3 - 2X^2 + 3X - 2$

(b) $X - 2 \mid X^3 - 3X^2 + 3X - 2$

(c) $X + 1 \mid X^3 + 3X^2 - 2$.

Exercice 32 [02140] [Correction]

En réalisant une division euclidienne, former une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 33 [02134] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(a) Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.

(b) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

(c) On note $P^{[n]} = P \circ \dots \circ P$ (composition à $n \geq 1$ facteurs). Établir que $P(X) - X$ divise $P^{[n]}(X) - X$.

Exercice 34 [03407] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Arithmétique

Exercice 35 [02135] [Correction]

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Exercice 36 [02137] [Correction]

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A et B ne sont pas premiers entre eux.
- (ii) il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}[X] - \{0\})^2$ tel que

$$AU + BV = 0, \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A.$$

Exercice 37 [02138] [Correction]

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls.

Montrer : A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A + B$ et AB le sont.

Exercice 38 [02139] [Correction]

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que A et B soient premiers entre eux.

Montrer

$$\text{pgcd}(A, BC) = \text{pgcd}(A, C).$$

Exercice 39 [02580] [Correction]

On cherche les polynômes

$$P(X) = (X - a)(X - b) \in \mathbb{C}[X]$$

tels que $P(X)$ divise $P(X^3)$.

Montrer que, si $a = b$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 polynômes dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.

Trouver les polynômes P si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ et en déduire que 13 polynômes en tout conviennent, dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

Racines

Exercice 40 [02157] [Correction]

(a) Soit

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

On suppose que P admet une racine rationnelle $r = p/q$ exprimée sous forme irréductible.

Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

(b) Factoriser

$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5.$$

(c) Le polynôme

$$P = X^3 + 3X - 1$$

est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 41 [02158] [Correction]

Soient a, b, c trois éléments, non nuls et distincts, du corps \mathbb{K} .

Démontrer que le polynôme

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

peut s'écrire sous la forme $P = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$ où λ est une constante que l'on déterminera.

Exercice 42 [02371] [Correction]

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sin((2n+1)\alpha)$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

(b) En déduire que les racines du polynôme :

$$P(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$$

sont de la forme $x_k = \cot^2 \beta_k$. Déterminer les β_k .

Exercice 43 [02663] [Correction]

(a) Montrer que $a = \cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans \mathbb{Z} .

(b) Justifier que le nombre a est irrationnel.

Exercice 44 [01352] [Correction]

Soient \mathbb{K} un corps et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

(a) Calculer

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

(b) On pose $A(X) = \prod_{j=1}^n (X - a_j)$. Calculer

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{A'(a_i)}.$$

Racines et arithmétique

Exercice 45 [02166] [Correction]

Soient p et q deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux.

Montrer

$$(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X - 1)(X^{pq} - 1).$$

Exercice 46 [02167] [Correction]

Justifier les divisibilités suivantes :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, X^2 \mid (X + 1)^n - nX - 1$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X - 1)^3 \mid nX^{n+2} - (n + 2) \cdot X^{n+1} + (n + 2)X - n$

Exercice 47 [02169] [Correction]

Justifier

$$\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3, 1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}.$$

Exercice 48 [02170] [Correction]

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1.$$

Exercice 49 [02668] [Correction]

Déterminer les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X + 4)P(X) = XP(X + 1).$$

Exercice 50 [03041] [Correction]

Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(1) = 1, P(2) = 2, P'(1) = 3, P'(2) = 4, P''(1) = 5 \text{ et } P''(2) = 6.$$

Exercice 51 [03406] [Correction]

(a) Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux deux à deux, non constants, et tels que

$$P + Q + R = 0.$$

Soient p, q, r le nombre de racines distinctes des polynômes P, Q, R respectivement.

Prouver que le degré de P est strictement inférieur à $p + q + r$.

On pourra introduire $P'Q - Q'P$.

(b) Trouver tous les triplets de polynômes complexes (P, Q, R) tels que

$$P^n + Q^n = R^n$$

pour $n \geq 3$ donné.

(c) Le résultat s'étend-il à $n = 2$?

Exercice 52 [02361] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et a, b deux entiers relatifs avec $b > 0$ et \sqrt{b} irrationnel.

(a) Exemple : montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.

(b) Quelle est la forme de $(a + \sqrt{b})^n$?

(c) Montrer que si $a + \sqrt{b}$ est racine de P alors $a - \sqrt{b}$ aussi.

(d) On suppose que $a + \sqrt{b}$ est racine double de P . Montrer que $P = RQ^2$ avec R et Q dans $\mathbb{Z}[X]$.

Racines et équations polynomiales

Exercice 53 [02159] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0.$$

- (a) Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi
- (b) En déduire que $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

Exercice 54 [02164] [Correction]

Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifie

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

ses racines sont parmi $0, 1, -j, -j^2$. En déduire tous les polynômes solutions.

Exercice 55 [02375] [Correction]

Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X+1).$$

Exercice 56 [02673] [Correction]

On cherche les polynômes P non nuls tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X).$$

- (a) Montrer que toute racine d'un tel P est de module 1.
- (b) Déterminer les polynômes P .

Exercice 57 [02672] [Correction]

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X-1)P(X).$$

Exercice 58 [01329] [Correction]

Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

Factorisation

Exercice 59 [02171] [Correction]

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- (a) $X^4 - 1$
- (b) $X^5 - 1$
- (c) $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Exercice 60 [02172] [Correction]

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- (a) $X^4 + X^2 + 1$
- (b) $X^4 + X^2 - 6$
- (c) $X^8 + X^4 + 1$

Exercice 61 [02173] [Correction]

Factoriser le polynôme $(X+i)^n - (X-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 62 [02174] [Correction]

Former la décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$ de $P = X^{2n+1} - 1$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 63 [02175] [Correction]

Soient $a \in]0; \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$X^{2n} - 2 \cos(na)X^n + 1.$$

Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

Exercice 64 [02176] [Correction]

Trouver les racines dans \mathbb{C} du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Exercice 65 [02177] [Correction]

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

Exercice 66 [02178] [Correction]

Résoudre $x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 67 [02179] [Correction]

On considère l'équation : $x^3 - (2 + \sqrt{2})x^2 + 2(\sqrt{2} + 1)x - 2\sqrt{2} = 0$ de racines x_1, x_2 et x_3 .

- (a) Former une équation dont x_1^2, x_2^2 et x_3^2 seraient racines.
- (b) En déduire les valeurs de x_1, x_2, x_3 .

Exercice 68 [02180] [Correction]

Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tels que :

- (a)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 1/x + 1/y + 1/z = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} x(y + z) = 1 \\ y(z + x) = 1 \\ z(x + y) = 1 \end{cases}$$
- (c)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

Exercice 69 [02181] [Correction]

Soient $x, y, z \in \mathbb{C}^*$ tels que $x + y + z = 0$. Montrer

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2.$$

Exercice 70 [02182] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$.

- (a) Former la décomposition en facteurs premiers de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
- (b) En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 71 [02184] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et $n = \deg P$.

Montrer que les sommes des zéros de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$ sont en progression arithmétique.

Exercice 72 [02373] [Correction]

Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ . Calculer

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}.$$

Exercice 73 [03336] [Correction]

Résoudre dans \mathbb{C}^3 le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 0 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 0. \end{cases}$$

Exercice 74 [03345] [Correction]

On considère le polynôme

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{C}[X]$$

de racines x_1, \dots, x_n comptées avec multiplicité.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p = x_1^p + \dots + x_n^p.$$

Établir

$$\begin{cases} a_0S_1 + a_1 = 0 \\ a_0S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0 \\ \dots \\ a_0S_p + a_1S_{p-1} + \dots + a_{p-1}S_1 + pa_p = 0 \quad (0 < p \leq n) \\ \dots \\ a_0S_n + a_1S_{n-1} + \dots + a_nS_1 = 0 \\ \dots \\ a_0S_{n+k} + a_1S_{n+k-1} + \dots + a_nS_k = 0 \quad (k > 0). \end{cases}$$

Exercice 75 [03812] [Correction]

- (a) Déterminer trois éléments a, b, c de \mathbb{C} , non tous réels, tels que $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2$ et $a^3 + b^3 + c^3$ soient trois réels.
 - (b) Montrer que, si a, b, c sont trois éléments de \mathbb{C} de modules différents et si $a + b + c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$ et $a^3 + b^3 + c^3 \in \mathbb{R}$, alors a, b et c sont trois réels.
- Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Familles de polynômes classiques

Exercice 76 [02185] [Correction]

(Polynômes de Tchebychev (1821-1894)) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

- Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3 .
- Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
- Établir qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1; 1]$.
- Donner le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
- Observer que T_n possède exactement n racines distinctes, que l'on exprimera, toutes dans $]-1; 1[$.

Exercice 77 [02186] [Correction]

(Polynômes d'interpolation de Lagrange (1736-1813)) Soit (a_0, a_1, \dots, a_n) une famille d'éléments de \mathbb{K} deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ on pose

$$L_i = \frac{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

- Observer que, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (1823-1891) qui est égal à 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon).
- Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P(X) = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i(X).$$

Exercice 78 [02188] [Correction]

Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite de $\mathbb{K}[X]$ définie par

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n.$$

- Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}.$$

- En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont premiers entre eux.}$$

- Établir pour que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m.$$

- Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\text{pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \text{pgcd}(P_n, P_m).$$

En déduire que $\text{pgcd}(P_m, P_n) = \text{pgcd}(P_n, P_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n .

- Conclure

$$\text{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\text{pgcd}(m,n)}.$$

Exercice 79 [02189] [Correction]

(Polynômes de Laguerre (1834-1886)) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

Observer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

Exercice 80 [02670] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\cos \theta) = \cos n\theta$ pour tout θ réel. On le note T_n .

- Lier T_{n-1}, T_n et T_{n+1} .
- Donner une équation différentielle vérifiée par T_n .
- Calculer $T_n^{(k)}(1)$ et $T_n^{(k)}(-1)$.

Exercice 81 [02671] [Correction]

Quels sont les couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$?

Exercice 82 [02128] [Correction]

On définit une suite de polynôme (P_n) par

$$P_0 = 2, P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n.$$

- (a) Calculer P_2 et P_3 .
Déterminer degré et coefficient dominant de P_n .
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a

$$P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n.$$

- (c) En déduire une expression simple de $P_n(2 \cos \theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- (d) Déterminer les racines de P_n .

Exercice 83 [03269] [[Correction](#)]

On pose

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Démontrer l'existence d'un polynôme P_n de degré n et à coefficients positifs ou nul vérifiant

$$\forall n \geq 1, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

Préciser P_1, P_2, P_3 et calculer $P_n(1)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

- (a) Si (P, Q) est un couple solution de polynômes non nuls alors $Q^2 = XP^2$ donne $2 \deg Q = 1 + 2 \deg P$ avec $\deg P, \deg Q \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible. Il reste le cas où l'un des polynômes P ou Q est nul et l'autre, alors, l'est aussi. Inversement, le couple nul est effectivement solution.
- (b) Si $\deg P \geq 2$ alors $\deg P \circ P = (\deg P)^2 > \deg P$ et donc P n'est pas solution. Si $\deg P \leq 1$ alors on peut écrire $P = aX + b$ et alors

$$P \circ P = P \iff a(aX + b) + b = aX + b \iff \begin{cases} a^2 = a \\ ab = 0. \end{cases}$$

Après résolution on obtient

$$(a = 1 \text{ et } b = 0) \text{ ou } (a = 0 \text{ et } b \text{ quelconque}).$$

Finalement les solutions sont le polynôme X et les polynômes constants.

Exercice 2 : [énoncé]

Parmi les polynômes constants, seuls le polynôme nul est solution. Si $\deg P \geq 1$ alors, pour vérifier l'équation, il est nécessaire que $\deg P = 2$. On peut alors écrire P sous la forme $aX^2 + bX + c$. Parmi, les polynômes de cette forme, ceux solutions sont ceux obtenus pour $b = 0$ et $c = -a$. Conclusion, les polynômes solutions sont les $a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : [énoncé]

- (a) Posons

$$P(X) = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n}).$$

En exploitant successivement $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, on obtient

$$(1 - X)P(X) = 1 - X^{2^{n+1}}.$$

On en déduit

$$P(X) = \frac{1 - X^{2^{n+1}}}{1 - X} = 1 + X + X^2 + \dots + X^{2^{n+1}-1}.$$

- (b) Lorsqu'on développe directement le polynôme P , le coefficient de X^k obtenu correspond au nombre de fois qu'il est possible d'écrire k comme la somme des puissances de 2 suivantes : $1, 2, 4, \dots, 2^n$. Ce nombre vaut 1 compte tenu de l'exercice précédent.

Exercice 4 : [énoncé]

Notons a_n, b_n et c_n les coefficients de $1, X$ et X^2 dans P_n .

Puisque $P_1 = X - 2$, on a $a_1 = -2, b_1 = 1$ et $c_1 = 0$.

Puisque $P_{n+1} = P_n^2 - 2$, on a $a_{n+1} = a_n^2 - 2, b_{n+1} = 2a_n b_n$ et $c_{n+1} = b_n^2 + 2a_n c_n$.

On en déduit $a_2 = 2, b_2 = -4$ et $c_2 = 1$ puis pour $n \geq 3$: $a_n = 2, b_n = -4^{n-1}$,

$$c_n = 4^{n-2} + 4^{n-1} + \dots + 4^{2n-4} = 4^{n-2} \frac{4^{n-1} - 1}{3}.$$

Exercice 5 : [énoncé]

L'implication (ii) \implies (i) est immédiate.

Supposons (i).

Puisque P est de signe constant, la décomposition en facteurs irréductibles de P s'écrit avec des facteurs de la forme

$$(X - \lambda)^2 = (X - \lambda)^2 + 0^2$$

et

$$X^2 + 2pX + q = (X + p)^2 + (\sqrt{q - p^2})^2.$$

Ainsi P est, à un facteur multiplicatif positif près, le produit de polynômes s'écrivant comme la somme des carrés de deux polynômes réels.

Or

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$$

donc P peut s'écrire comme la somme des carrés de deux polynômes réels

Exercice 6 : [énoncé]

Puisque le polynôme P est non constant, on peut écrire

$$P(z) = 1 + a_q z^q + z^{q+1} Q(z)$$

avec $a_q \neq 0$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Posons θ un argument du complexe a_q et considérons la suite (z_n) de terme général

$$z_n = \frac{1}{n} e^{i(\pi - \theta)/q}.$$

On a $z_n \rightarrow 0$ et

$$P(z_n) = 1 - \frac{|a_q|}{n^q} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

donc $|P(z_n)| < 1$ pour n assez grand.

Exercice 7 : [énoncé]

Soit $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$ une racine $(n+1)$ -ième de l'unité. On a

$$P(1) + P(\omega) + \dots + P(\omega^n) = (n+1)a_0$$

car

$$\sum_{k=0}^n \omega^{k\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } \ell = 0 \text{ [} n+1 \text{]} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit $(n+1)|a_0| \leq (n+1)M$ puis $|a_0| \leq M$.

De façon plus générale, on a

$$P(1) + \omega^{-k}P(\omega) + \dots + \omega^{-nk}P(\omega^n) = (n+1)a_k$$

et on en déduit $|a_k| \leq M$.

Exercice 8 : [énoncé]

La propriété est immédiate si $|\xi| \leq 1$. On suppose désormais $|\xi| > 1$ et on note

$$m = \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|.$$

L'égalité

$$-\xi^n = a_{n-1}\xi^{n-1} + \dots + a_1\xi + a_0$$

donne

$$|\xi|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\xi|^k \leq m \sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k$$

donc

$$|\xi|^n \leq m \frac{|\xi|^n - 1}{|\xi| - 1} \leq m \frac{|\xi|^n}{|\xi| - 1}$$

puis

$$|\xi| \leq 1 + m.$$

Exercice 9 : [énoncé]

On peut écrire P sous forme factorisée

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$$

avec $n = \deg P \in \mathbb{N}^*$ et $z_k \in \mathbb{C}$ vérifiant $\text{Im } z_k \geq 0$.

Un complexe z est racine du polynôme $P + \bar{P}$ si, et seulement si,

$$\lambda \prod_{k=1}^n (z - z_k) = -\bar{\lambda} \prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_k).$$

Si $\text{Im } z > 0$ alors

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, |z - z_k| < |z - \bar{z}_k|$$

et donc

$$\left| \lambda \prod_{k=1}^n (z - z_k) \right| < \left| \bar{\lambda} \prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_k) \right|.$$

Ainsi z ne peut être racine de $P + \bar{P}$ et \bar{z} non plus par le même raisonnement ou parce que $P + \bar{P}$ est un polynôme réel.

On en déduit que les racines de P sont toutes réelles et donc P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Ainsi le polynôme $\text{Re } P$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et, par une argumentation analogue, il en est de même de $\text{Im } P$.

Exercice 10 : [énoncé]

Quel que soit le complexe λ , le polynôme $P - \lambda$ est non nul donc scindé sur \mathbb{C} . La difficulté est ici de trouver λ pour lequel les racines de $P - \lambda$ soient simples.

Les racines multiples d'un polynôme sont les racines qui sont communes à son polynôme dérivé.

Notons z_1, \dots, z_p les racines de $P' = (P - \lambda)'$. Pour λ différent de chacune des valeurs $P(z_1), \dots, P(z_p)$, le polynôme $P - \lambda$ ne s'annule pas en les z_1, \dots, z_p et ses racines sont donc simples.

Exercice 11 : [énoncé]

- (a) Si $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a < b$) est continue, dérivable sur $]a; b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

- (b) Si x_0 est racine de multiplicité m de P alors x_0 est racine de multiplicité $m - 1$ de P' (en convenant qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine).
- (c) Notons $x_1 < \dots < x_p$ les racines de P et m_1, \dots, m_p leurs multiplicités respectives. Puisque le polynôme P est supposé scindé, on a

$$m_1 + \dots + m_p = \deg P.$$

Les éléments x_1, \dots, x_p sont racines de multiplicités $m_1 - 1, \dots, m_p - 1$ de P' . En appliquant le théorème de Rolle à P entre x_k et x_{k+1} , on détermine $y_k \in]x_k; x_{k+1}[$ racine de P' . Ces y_k sont distincts entre eux et distincts des x_1, \dots, x_p . On a ainsi obtenu au moins

$$(p - 1) + (m_1 - 1) + \dots + (m_p - 1) = \deg P - 1$$

racines de P' . Or $\deg P' = \deg P - 1$ donc P' est scindé.

Exercice 12 : [énoncé]

- (a) Soient $a_1 < \dots < a_n$ les zéros de f . En appliquant le théorème Rolle sur chaque intervalle $[a_i; a_{i+1}]$, on obtient $b_i \in]a_i; a_{i+1}[$ annulant f' . Puisque

$$a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_{n-1} < a_n$$

les b_1, \dots, b_{n-1} sont des annulations distinctes de f' .

- (b) Si P est scindé à racines simples, il possède n racines. Le polynôme P' possède alors au moins $n - 1$ racines. Or $\deg(P') = n - 1$ donc le polynôme P' est scindé.
- (c) Soient $a_1 < \dots < a_p$ les racines de P et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ leurs multiplicités avec

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n.$$

Les $a_1 < \dots < a_p$ sont racines de P' de multiplicités respectives

$$\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1.$$

Comme ci-dessus, par Rolle, on peut aussi assurer l'existence de $p - 1$ autres racines à P' .

La somme des multiplicités des racines est donc au moins égales à

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i - 1 + p - 1 = n - 1 = \deg(P')$$

et donc le polynôme P' est scindé.

Exercice 13 : [énoncé]

- (a) Notons $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ les racines de P . En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $x \mapsto P(x)$ sur l'intervalle $[a_{i-1}; a_i]$, on justifie l'existence d'un réel $b_i \in]a_{i-1}; a_i[$ tels que $P'(b_i) = 0$. Puisque

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < b_n < a_n$$

les réels b_1, \dots, b_n sont deux à deux distincts ce qui fournit n racines réelles au polynôme P' .

Puisque $\deg P' = \deg P - 1 = n$, il ne peut y en avoir d'autres.

- (b) Une racine multiple de $P^2 + 1$ est aussi racine du polynôme dérivé

$$(P^2 + 1)' = 2PP'.$$

Or les racines de P ne sont pas racines de $P^2 + 1$ et les racines de P' sont réelles et ne peuvent donc être racines de $P^2 + 1$. Par suite $P^2 + 1$ et $(P^2 + 1)'$ n'ont aucune racine commune : les racines de $P^2 + 1$ sont simples.

Exercice 14 : [énoncé]

Posons $n = \deg P \geq 2$, $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ les racines réelles distinctes de P et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ leurs ordres respectifs. On a $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$ car P est supposé scindé.

En appliquant le théorème de Rolle à $x \mapsto \tilde{P}(x)$ sur chaque $[a_i; a_{i+1}]$ on justifie l'existence de racines distinctes b_1, b_2, \dots, b_{p-1} disposée de sorte que

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_{p-1} < a_p.$$

Comme les a_1, a_2, \dots, a_p sont des racines d'ordres $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_p - 1$ de P'

et que b_1, b_2, \dots, b_{p-1} sont des racines au moins simples de P' , on vient de déterminer $(n - 1) = \deg P'$ racines de P' comptées avec leur multiplicité.

Finalement P' est scindé.

Exercice 15 : [énoncé]

- (a) Si P est de degré 1 alors P' est constant. Si P est de degré $n \geq 2$, par application du théorème de Rolle, il figure une racine de P' entre deux racines consécutives de P . De surcroît, si a est racine de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de P , a est aussi racine de multiplicité $\alpha - 1$ de P' . Par suite, P' en admet $n - 1$ racines comptées avec multiplicité et est donc scindé.
- (b) 0 est racine multiple du polynôme dérivé à l'ordre 2. Si le polynôme était scindé, l'étude qui précède permet d'observer que 0 est racine du polynôme. Ce n'est pas le cas.

Exercice 16 : [énoncé]

Notons que par application du théorème de Rolle, les racines de P' sont réelles (et simples)

Les racines multiples de $P^2 + \alpha^2$ sont aussi racines de $(P^2 + \alpha^2)' = 2PP'$.

Or les racines de $P^2 + \alpha^2$ ne peuvent être réelles et les racines de PP' sont toutes réelles.

Il n'y a donc pas de racines multiples au polynôme $P^2 + \alpha^2$.

Exercice 17 : [énoncé]

Rappelons qu'un polynôme est scindé sur un corps si, et seulement si, la somme des multiplicités des racines de ce polynôme sur ce corps égale son degré.

Notons $a_0 < a_1 < \dots < a_m$ les racines réelles de P et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives. Le polynôme P étant scindé, on peut écrire

$$\deg(P) = \sum_{k=0}^m \alpha_k.$$

On convient de dire qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine d'un polynôme. Avec ses termes, si a_k est racine de multiplicité $\alpha_k \geq 1$ de P alors a_k est racine de multiplicité $\alpha_k - 1$ du polynôme P' et donc racine de multiplicité au moins (et même exactement) $\alpha_k - 1$ du polynôme $P' + \alpha P$. Ainsi les a_k fournissent

$$\sum_{k=0}^m (\alpha_k - 1) = \deg(P) - (m + 1)$$

racines comptées avec multiplicité au polynôme $P' + \alpha P$.

Considérons ensuite la fonction réelle $f: x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$.

Cette fonction est indéfiniment dérivable et prend la valeur 0 en chaque a_k .

En appliquant le théorème de Rolle à celle-ci sur chaque intervalle $[a_{k-1}; a_k]$, on produit des réels $b_k \in]a_{k-1}; a_k[$ vérifiant $f'(b_k) = 0$. Or

$$f'(x) = (P'(x) + \alpha P(x))e^{\alpha x}$$

et donc b_k est racine du polynôme $P' + \alpha P$.

Ajoutons à cela que les b_k sont deux à deux distincts et différents des précédents a_k car, par construction

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < b_m < a_m.$$

On vient donc de déterminer m nouvelles racines au polynôme $P' + \alpha P$ et ce dernier possède donc au moins

$$\deg(P) - 1$$

racines comptées avec multiplicité.

Cas: $\alpha = 0$. Ce qui précède suffit pour conclure car $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

Cas: $\alpha \neq 0$. Il manque encore une racine car $\deg(P' + \alpha P) = \deg(P)$. Par les racines précédentes, il est possible de factoriser $P' + \alpha P$ par un polynôme scindé Q de degré $\deg(P) - 1$ et le facteur correspondant étant de degré 1, ceci donne une écriture scindé du polynôme $P' + \alpha P$.

Exercice 18 : [énoncé]

Remarquons que puisque P est simplement scindé sur \mathbb{R} , l'application du théorème de Rolle entre deux racines consécutives de P donne une annulation de P' et permet de justifier que P' est simplement scindé sur \mathbb{R} . Il est en de même de P'', P''', \dots

Or, si le polynôme P admet deux coefficients consécutifs nuls alors l'un de ses polynômes dérivées admet 0 pour racine double. C'est impossible en vertu de la remarque qui précède.

Exercice 19 : [énoncé]

Écrivons

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

et, quitte à considérer $-P$, supposons par l'absurde qu'il existe $p \geq 1$ tel que

$$a_p = 0 \text{ avec } a_{p-1}, a_{p+1} > 0.$$

Considérons alors

$$Q(X) = P^{(p-1)}(X) = (p-1)!a_{p-1} + \frac{(p+1)!}{2}a_{p+1}X^2 + \dots$$

Puisque le polynôme P est scindé à racines simples, par application du théorème de Rolle, les racines $P^{(k+1)}$ sont séparées par les racines des $P^{(k)}$. En particulier les racines de Q' sont séparées par les racines de Q .

Or 0 est minimum local de Q avec $Q(0) > 0$.

Si le polynôme Q admet des racines strictement positives et si a est la plus petite de celles-ci alors Q' admet une racine dans $]0; a[$ par application du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de Rolle. Or 0 est aussi racine de Q' et donc les racines de Q' ne sont pas séparées par les racines de Q . C'est absurde.

Il en est de même si la polynôme admet des racines strictement négatives.

Exercice 20 : [énoncé]

(\implies) Supposons P scindé sur \mathbb{R} . Celui-ci possède exactement n racines réelles comptées avec multiplicité a_1, \dots, a_n . Sachant que le polynôme est unitaire, on peut écrire

$$P = (X - a_1) \dots (X - a_n).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^n |z - a_k| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$$

car

$$|z - a_k| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z) - a_k)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \geq |\operatorname{Im}(z)|.$$

(\impliedby) Supposons $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On sait que le polynôme P est assurément scindé sur \mathbb{C} . Or, si z est une racine de P , la propriété précédente donne $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq 0$ et donc $z \in \mathbb{R}$. Ainsi, les racines de P sont toutes réelles et le polynôme P est scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Parmi les polynômes constants, seul le polynôme nul est solution.

Parmi les polynômes non constants, si P est solution alors $2(\deg P - 1) = \deg P$ et donc $\deg P = 2$. On peut alors écrire $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

$$P'^2 = 4P \iff 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \iff \begin{cases} a = 1 \\ c = b^2/4 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont $P = 0$ et $P = X^2 + bX + b^2/4$ avec $b \in \mathbb{K}$.

(b) Parmi les polynôme de degré inférieur à 1, seul le polynôme nul est solution.

Pour P polynôme tel que $\deg P \geq 2$ alors la relation $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$ implique, en raisonnant sur l'annulation des coefficients dominants, $\deg P(\deg P - 1) = 6$ donc $\deg P = 3$.

En cherchant P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \in \mathbb{K}^*$, on obtient que seuls les polynômes $P = a(X^3 + X)$ avec $a \in \mathbb{K}^*$ sont solutions. Finalement les polynômes solutions sont les $a(X^3 + X)$ avec $a \in \mathbb{K}$.

Exercice 22 : [énoncé]

Les polynômes solutions de $P_n - P'_n = X^n$ sont nécessairement de degré n . Cherchons ceux-ci de la forme :

$$P_n = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

$P_n - P'_n = X^n$ équivaut à

$$a_n = 1, a_{n-1} = na_n, a_{n-2} = (n-1)a_{n-1}, \dots, a_0 = 1.a_1.$$

Par suite l'équation $P_n - P'_n = X^n$ possède une et une seule solution qui est :

$$P = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \dots + n! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} X^k.$$

Exercice 23 : [énoncé]

Par la formule de Taylor

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

donc

$$P(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

et plus généralement

$$P^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!}.$$

Par la formule de Taylor

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k$$

puis en permutant les sommes (qui se limitent à un nombre fini de termes non nuls)

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X).$$

Autre méthode : On exploite les ingrédients suivants :

- l'application qui à P associe $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$ est linéaire ;
- par la formule du binôme, cette application envoie chaque X^k sur $(X+1)^k$;
- deux applications linéaires égales sur une base sont égales sur l'espace.

Exercice 24 : [énoncé]

Soit P un polynôme et Q un polynôme primitif de P . P est solution du problème posé si, et seulement si,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, Q(k+1) - Q(k) = k + 1.$$

En raisonnant par coefficients inconnus, on observe que $Q(X) = \frac{1}{2}X(X+1)$ est solution.

Si $\tilde{Q}(X)$ est aussi solution alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (Q - \tilde{Q})(k+1) = (Q - \tilde{Q})(k)$$

et on en déduit que le polynôme $Q - \tilde{Q}$ est constant.

On en déduit que

$$P(X) = X + \frac{1}{2}$$

est l'unique solution du problème posé.

Exercice 25 : [énoncé]

Par la formule de Taylor, on a pour tout $x \geq 0$

$$P(a+x) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k \geq P(a) > 0.$$

Exercice 26 : [énoncé]

Cette division euclidienne s'écrit $P = Q(X-a)(X-b) + R$ avec $\deg R < 2$.

On peut écrire $R = \alpha X + \beta$. En évaluant en a et b , on obtient un système dont la résolution donne

$$\alpha = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} \text{ et } \beta = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}.$$

Exercice 27 : [énoncé]

Cette division euclidienne s'écrit

$$P = Q(X-a)^2 + R \text{ avec } \deg R < 2.$$

On peut écrire $R = \alpha X + \beta$.

En évaluant en a , puis en dérivant avant d'évaluer à nouveau en a , on obtient un système dont la résolution donne

$$\alpha = P'(a) \text{ et } \beta = P(a) - aP'(a).$$

Exercice 28 : [énoncé]

$(X \cos t + \sin t)^n = (X^2 + 1)Q + R$ avec $\deg R < 2$ ce qui permet d'écrire $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Cette relation doit être aussi vraie dans $\mathbb{C}[X]$ et peut donc être évaluée en i : $(i \cos t + \sin t)^n = R(i) = ai + b$ or $(i \cos t + \sin t)^n = e^{i(n\pi/2 - nt)}$ donc $a = \sin n(\pi/2 - t)$ et $b = \cos n(\pi/2 - t)$.

Exercice 29 : [énoncé]

On a $k = nq + r$ avec $0 \leq r < n$.

Or $X^k - X^r = X^r(X^{nq} - 1)$ et $X^n - 1 \mid X^{nq} - 1$. On peut donc écrire

$$X^{nq} - 1 = (X^n - 1)Q(X)$$

puis

$$X^k = (X^n - 1)X^r Q(X) + X^r \text{ avec } \deg X^r < \deg(X^n - 1)$$

ce qui permet de reconnaître le reste de division euclidienne cherchée.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) $n = mq + r$ avec $0 \leq r < m$.

$$X^n - 1 = X^{mq+r} - 1 = X^{mq+r} - X^r + X^r - 1 = X^r(X^{mq} - 1) + X^r - 1$$

or $X^{mq} - 1 = (X^m - 1)(1 + X^m + \dots + X^{m(q-1)})$ donc

$$X^n - 1 = (X^m - 1)Q + R \text{ avec } Q = X^r(1 + X^m + \dots + X^{m(q-1)}) \text{ et}$$

$$R = X^r - 1.$$

Puisque $\deg R < \deg X^m - 1$, R est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.

(b) Suivons l'algorithme d'Euclide calculant le pgcd de n et m .

$a_0 = n$, $a_1 = m$ puis tant que $a_k \neq 0$, on pose a_{k+1} le reste de la division euclidienne de a_{k-1} par a_k .

Cet algorithme donne $\text{pgcd}(m, n) = a_p$ avec a_p le dernier reste non nul.

Par la question ci-dessus on observe que si on pose $A_k = X^{a_k} - 1$ alors $A_0 = X^n - 1$, $A_1 = X^m - 1$ et pour tout k tel que $a_k \neq 0$, $A_k \neq 0$ et A_{k+1} est le reste de la division euclidienne de A_{k-1} par A_k .

Par suite $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = \text{pgcd}(A_0, A_1) = \text{pgcd}(A_1, A_2) = \dots = \text{pgcd}(A_p, A_{p+1}) = A_p = X^{\text{pgcd}(m, n)} - 1$ car $A_{p+1} = 0$ puisque $a_{p+1} = 0$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) $X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = (X-1)(X^2 - X + 2)$.

(b) $X^3 - 3X^2 + 3X - 2 = (X - 2)(X^2 - X + 1)$.

(c) $X^3 + 3X^2 - 2 = (X + 1)(X^2 + 2X - 2)$.

Exercice 32 : [énoncé]

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2 + 2)(X^2 + X + (\lambda - 2)) + (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda.$$

Le polynôme $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ si, et seulement si,

$$\lambda = 3, \mu = 2.$$

Exercice 33 : [énoncé]

On écrit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

(a) On a

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k ([P(X)]^k - X^k)$$

avec $P(X) - X$ divisant $[P(X)]^k - X^k$ car

$$a^k - b^k = (a - b) \sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell b^{k-1-\ell}.$$

(b) $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - P(X)$ et le polynôme $P(X) - X$. Il divise donc leur somme $P(P(X)) - X$.

(c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

La propriété est immédiate pour $n = 1$ et vient d'être établie pour $n = 2$.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$.

$$P^{[n+1]}(X) - P(X) = \sum_{k=0}^p a_k ([P^{[n]}(X)]^k - X^k)$$

$P^{[n]}(X) - X$ divise $[P^{[n]}(X)]^k - X^k$ donc $P^{[n]}(X) - X$ divise $P^{[n+1]}(X) - P(X)$.

Par hypothèse de récurrence, $P(X) - X$ divise alors $P^{[n+1]}(X) - P(X)$ et enfin on en déduit que $P(X) - X$ divise $P^{[n+1]}(X) - X$.

Récurrence établie.

Exercice 34 : [énoncé]

Puisque

$$P(P(X)) - X = (P(P(X)) - P(X)) + (P(X) - X)$$

le problème revient à montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.

On écrit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et on a

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k ((P(X))^k - X^k)$$

avec $P(X) - X$ divisant $(P(X))^k - X^k$ car

$$a^k - b^k = (a - b) \sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell b^{k-1-\ell}.$$

On en déduit que $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - P(X)$ et donc le polynôme $P(P(X)) - X$.

Exercice 35 : [énoncé]

Posons $D = \text{pgcd}(A, B)$. On a $D^2 = \text{pgcd}(A^2, B^2)$ associé à A^2 donc $\deg D^2 = \deg A^2$ puis $\deg D = \deg A$.

Or $D \mid A$ donc D et A sont associés. Puisque $D \mid B$, on obtient $A \mid B$.

Exercice 36 : [énoncé]

(i) \implies (ii) Posons $D = \text{pgcd}(A, B)$ qui est non constant.

Puisque $D \mid A$ et $D \mid B$ on peut écrire $A = DV$ et $-B = DU$ avec $\deg V < \deg A$ et $\deg U < \deg B$.

de sorte que $AU + BV = DUV - DUV = 0$.

(ii) \implies (i) Supposons (ii)

Si par l'absurde $A \wedge B = 1$ alors, puisque $A \mid -BV$ on a $A \mid V$.

Or $V \neq 0$ donc $\deg A \leq \deg V$ ce qui est exclu. Absurde.

Exercice 37 : [énoncé]

Si $A \wedge B = 1$ alors il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

On a alors $A(U - V) + (A + B)V = 1$ donc $A \wedge (A + B) = 1$. De même

$B \wedge (A + B) = 1$.

Par suite $AB \wedge (A + B) = 1$.

Si $AB \wedge (A + B) = 1$ alors puisque $\text{pgcd}(A, B) \mid AB$ et $\text{pgcd}(A, B) \mid A + B$ on a $\text{pgcd}(A, B) = 1$ puis $A \wedge B = 1$.

Exercice 38 : [énoncé]

$\text{pgcd}(A, C) \mid A$ et $\text{pgcd}(A, C) \mid C$ donc $\text{pgcd}(A, C) \mid BC$ puis $\text{pgcd}(A, C) \mid \text{pgcd}(A, BC)$.

Inversement. Posons $D = \text{pgcd}(A, BC)$. On a $D \mid A$ et $A \wedge B = 1$ donc $D \wedge B = 1$. De plus $D \mid BC$ donc par le théorème de Gauss, $D \mid C$ et finalement $D \mid \text{pgcd}(A, C)$.

Exercice 39 : [énoncé]

Si $a = b$ alors $(X - a)^2$ divise $(X^3 - a)^2$ si, et seulement si, a est racine au moins double de $(X^3 - a)^2$. Ceci équivaut à $a^3 = a$ ce qui donne $a \in \{-1, 0, 1\}$.

Les polynômes solutions correspondant sont alors $X^2, (X - 1)^2$ et $(X + 1)^2$, tous réels.

Si $a \neq b$ alors $(X - a)(X - b)$ divise $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si, a et b sont racines de $(X^3 - a)(X^3 - b)$.

Si $a^3 \neq b^3$ alors a et b sont racines $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^3 = a \\ b^3 = b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases}.$$

Dans le premier cas, sachant $a \neq b$, on parvient aux polynômes $X(X - 1), X(X + 1)$ et $(X - 1)(X + 1)$.

Puisque

$$\begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases} \iff \begin{cases} b = a^3 \\ a^9 = a \end{cases},$$

dans le second cas, on parvient à $(X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4}), X^2 + 1$ et $(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})$.

Ainsi quand $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, on parvient à 6 polynômes dont 4 réels.

Enfin, si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ alors $(X - a)(X - b)$ divise $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si, $a^3 = a$ ou $a^3 = b$. Quitte à échanger a et b , on peut supposer $a^3 = a$ et on parvient alors aux polynômes $(X - 1)(X - j), (X - 1)(X - j^2), (X + 1)(X + j)$ et $(X + 1)(X + j^2)$ selon que $a = 1$ ou $a = -1$ (le cas $a = 0$ étant à exclure car entraînant $b = a$).

Au final on obtient $3 + 6 + 4 = 13$ polynômes solutions dont $3 + 4 + 0 = 7$ réels.

Exercice 40 : [énoncé]

(a) $P(p/q) = 0$ donne

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Puisque $p \mid a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1}$, on a $p \mid a_0 q^n$ or $p \wedge q = 1$ donc $p \mid a_0$. De même $q \mid a_n$.

(b) Si P admet un racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ alors $p \in \{-5, -1, 1, 5\}$ et $q \in \{1, 2\}$. $-\frac{5}{2}$ est racine de P .

$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5 = (2X + 5)(X^2 - 3X + 1) = (2X + 5) \left(X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

(c) Si P est composé dans $\mathbb{Q}[X]$ alors P possède une racine rationnelle, or ce n'est pas le cas.

Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 41 : [énoncé]

$P(a) = P(b) = P(c) = 1$ et a, b, c deux à deux distincts donc

$$(X - a)(X - b)(X - c) \mid P - 1.$$

De plus $\deg P \leq 3$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$P = \lambda(X - a)(X - b)(X - c) + 1.$$

Puisque $P(0) = 0$, on a $\lambda = \frac{1}{abc}$.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) L'égalité

$$\sin((2n + 1)\alpha) = \text{Im}(e^{i(2n+1)\alpha}) = \text{Im}((\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2n+1})$$

donne en développant

$$\sin((2n + 1)\alpha) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} \cos^{2(n-p)} \alpha \cdot \sin^{2p+1} \alpha.$$

(b) On observe

$$\sin((2n + 1)\alpha) = \sin^{2n+1} \alpha P(\cot^2 \alpha).$$

Posons $\beta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$. Les $x_k = \cot^2 \beta_k$ sont n racines distinctes de P , or $\deg P = n$, ce sont donc exactement les racines de P .

Exercice 43 : [énoncé]

(a) On a

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

donc

$$4a^3 - 3a = \cos(\pi/3) = 1/2.$$

Ainsi a est racine du polynôme $8X^3 - 6X - 1$.

(b) Soit x une racine rationnelle de ce polynôme. On peut écrire $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. On a alors

$$8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0.$$

On en déduit $p \mid 8p^3 - 6pq^2 = q^3$. Or p et q sont premiers entre eux et donc par le théorème de Gauss $p = \pm 1$. De plus $q^2 \mid 6pq^2 + q^3 = 8p^3$ et, par un argument analogue au précédent, $q^2 \mid 8$. Ainsi $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$.

Or $1, -1, 1/2$ et $-1/2$ ne sont pas les valeurs de $\cos(\pi/9)$. On peut donc conclure que a est irrationnel.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) Posons

$$P(X) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

On a $\deg P \leq n - 1$ et

$$\forall 1 \leq k \leq n, P(a_k) = 1.$$

Le polynôme $P - 1$ possède donc n racines et étant de degré strictement inférieur à n , c'est le polynôme nul. On conclut $P = 1$.

(b) On a

$$A'(X) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (X - a_j)$$

donc

$$A'(a_i) = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j).$$

La quantité

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{A'(a_i)}$$

apparaît alors comme le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme P .

On conclut que pour $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{A'(a_i)} = 0.$$

Exercice 45 : [énoncé]

Les racines de $X^p - 1$ sont simples et toutes racines de $X^{pq} - 1$. Les racines de $X^q - 1$ sont simples et toutes racines de $X^{pq} - 1$. En dehors de 1, les racines de $X^p - 1$ et $X^q - 1$ sont distinctes. Comme 1 racine double de $(X - 1)(X^{pq} - 1)$, on peut conclure $(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X - 1)(X^{pq} - 1)$.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Posons $P = (X + 1)^n - nX - 1$. On a $P(0) = 0$ et $P' = n(X + 1)^{n-1} - n$ donc $P'(0) = 0$.

0 est au moins racine double de P donc $X^2 \mid P$.

(b) Posons $P = nX^{n+2} - (n + 2).X^{n+1} + (n + 2)X - n$. On observe $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$.

1 est au moins racine triple de P donc $(X - 1)^3 \mid P$.

Exercice 47 : [énoncé]

$$1 + X + X^2 = (X - j)(X - j^2).$$

j et j^2 sont racines de $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$ donc

$$1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}.$$

Exercice 48 : [énoncé]

On peut factoriser

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2).$$

On en déduit

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1 \iff j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } X^{2n} + X^n + 1.$$

Puisque $X^{2n} + X^n + 1$ est un polynôme réel j en est racine si, et seulement si, j^2 l'est.

$$(X^{2n} + X^n + 1)(j) = j^{2n} + j^n + 1 = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \text{ [3]} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1 \iff n \neq 0 \text{ [3]}.$$

Exercice 49 : [énoncé]

Soit P solution. $X \mid (X+4)P(X)$ donc $X \mid P$ puis $(X+1) \mid P(X+1)$ donc $(X+1) \mid (X+4)P(X)$ puis $X+1 \mid P$ etc.

Ainsi on obtient que $P(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X)$ avec

$Q(X+1) = Q(X)$ donc Q constant.

La réciproque est immédiate.

Exercice 50 : [énoncé]

Dans un premier temps cherchons P vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P'(0) = 3$, $P'(1) = 4$, $P''(0) = 5$ et $P''(1) = 6$ puis on considèrera $P(X-1)$ au terme des calculs.

Un polynôme vérifiant $P(0) = 1$ et $P(1) = 2$ est de la forme

$$P(X) = X + 1 + X(X-1)Q(X).$$

Pour que le polynôme P vérifie $P'(0) = 3$, $P'(1) = 4$, $P''(0) = 5$ et $P''(1) = 6$ on veut que Q vérifie $Q(0) = -2$, $Q(1) = 3$, $Q'(0) = -9/2$ et $Q'(1) = 0$.

Le polynôme $Q(X) = 5X - 2 + X(X-1)R(X)$ vérifie les deux premières conditions et vérifie les deux suivantes si $R(0) = 19/2$ et $R(1) = -5$.

Le polynôme $R = -\frac{29}{2}X + \frac{19}{2}$ convient.

Finalement

$$P(X) = X + 1 + X(X-1) \left(5X - 2 + X(X-1) \left(-\frac{29}{2}X + \frac{19}{2} \right) \right)$$

est solution du problème transformé et

$$P(X) = -\frac{29}{2}X^5 + 111X^4 - \frac{655}{2}X^3 + 464X^2 - 314X + 82$$

est solution du problème initial.

Les autres solutions s'en déduisent en observant que la différence de deux solutions possède 1 et 2 comme racine triple.

Finalement, la solution générale est

$$-\frac{29}{2}X^5 + 111X^4 - \frac{655}{2}X^3 + 464X^2 - 314X + 82 + (X-1)^3(X-2)^3Q(X)$$

avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 51 : [énoncé]

- (a) Puisque les racines communes à P et P' permettent de dénombrer les multiplicités des racines de P , on a

$$p = \deg P - \deg(\text{pgcd}(P, P'))$$

et des relations analogues pour q et r .

De plus, on a

$$P'Q - Q'P = Q'R - R'Q = R'P - P'R$$

et ce polynôme est non nul car les polynômes P, Q, R sont non constants. En effet, si $P'Q - Q'P = 0$, alors une racine de P est nécessairement racine de Q ce qui est exclu.

Puisque les polynômes $\text{pgcd}(P, P')$, $\text{pgcd}(Q, Q')$ et $\text{pgcd}(R, R')$ divisent chacun le polynôme $Q'R - R'Q$ et puisqu'ils sont deux à deux premiers entre eux (car P, Q, R le sont), on a

$$\text{pgcd}(P, P') \text{pgcd}(Q, Q') \text{pgcd}(R, R') \mid Q'R - R'Q.$$

Par considérations des degrés

$$\deg P - p + \deg Q - q + \deg R - r \leq \deg Q + \deg R - 1$$

et donc

$$\deg P \leq p + q + r - 1.$$

- (b) Soient $n \geq 3$ et P, Q, R vérifiant

$$P^n + Q^n = R^n.$$

Si a est racine commune aux polynômes P et Q alors a est racine de R . En suivant ce raisonnement et en simplifiant les racines communes, on peut se ramener à une situation où les polynômes P, Q, R sont deux à deux premiers entre eux. Il en est alors de même de P^n, Q^n et R^n . L'étude qui précède donne alors

$$n \deg P < p + q + r$$

mais aussi, de façon analogue

$$n \deg Q < p + q + r \text{ et } n \deg R < p + q + r.$$

En sommant ces trois relations, on obtient

$$n(\deg P + \deg Q + \deg R) < 3(p + q + r)$$

ce qui est absurde car $n \geq 3$, $\deg P \geq p$ etc.

On en déduit que les polynômes P, Q, R sont constants.

Les solutions de l'équation

$$P^n + Q^n = R^n$$

apparaissent alors comme des triplets

$$P = \alpha T, Q = \beta T \text{ et } R = \gamma T$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $T \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\alpha^n + \beta^n = \gamma^n.$$

(c) Pour

$$P = \frac{1}{2}(X^2 + 1), Q = \frac{i}{2}(X^2 - 1) \text{ et } R = X$$

on a

$$P^2 + Q^2 = R^2$$

ce qui produit un triplet solution d'une forme différente des précédents obtenus pour $n \geq 3$.

Exercice 52 : [énoncé]

- (a) Supposons $\sqrt{6} = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. On a $6q^2 = p^2$ donc p pair, $p = 2k$. On obtient alors $3q^2 = 2k^2$ et donc q est pair. Absurde car p et q sont premiers entre eux.
- (b) Par développement selon la formule du binôme de Newton

$$(a + \sqrt{b})^n = \alpha_k + \beta_k \sqrt{b} \text{ avec } \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z}.$$

- (c) $a + \sqrt{b}$ racine de $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ donne

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha_k = \left(\sum_{k=0}^n a_k \beta_k \right) \sqrt{b}.$$

L'irrationalité de \sqrt{b} entraîne

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha_k = \sum_{k=0}^n a_k \beta_k = 0$$

ce qui permet de justifier qu'alors $P(a - \sqrt{b}) = 0$.

(d) Posons

$$Q = (X - a + \sqrt{b})(X - a - \sqrt{b}) = X^2 - 2aX + a^2 - b \in \mathbb{Z}[X].$$

Par division euclidienne $P = QS + T$ avec $\deg T < 2$. Or en posant cette division euclidienne, on peut affirmer que $S, T \in \mathbb{Z}[X]$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ et Q unitaire. $a + \sqrt{b}, a - \sqrt{b}$ racine de P entraîne $T = 0$ et donc $P = QS$ avec $Q, S \in \mathbb{Z}[X]$. En dérivant $P' = Q'S + QS'$ et $a + \sqrt{b}$ entraîne racine de P' donne $a + \sqrt{b}$ racine de S . On peut alors comme ci-dessus justifier $S = QR$ avec $R \in \mathbb{Z}[X]$ et conclure.

Exercice 53 : [énoncé]

- (a) Si $P(a) = 0$ alors $P(a^2) = -P(a)P(a+1) = 0$ donc a^2 est racine de P .
- (b) Si $a \neq 0$ et a non racine de l'unité alors la suite des a^{2^n} est une suite de complexe deux à deux distincts, or tous les termes de cette suite sont racines de P or $P \neq 0$ donc ce polynôme ne peut avoir une infinité de racines. Absurde.

Exercice 54 : [énoncé]

Si a est racine de P alors a^2, a^4, \dots le sont aussi. Comme un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines, on peut affirmer que les a, a^2, a^4, \dots sont redondants ce qui implique $a = 0$ ou $|a| = 1$.

Si a est racine de P alors $(a - 1)^2$ l'est aussi donc $a - 1 = 0$ ou $|a - 1| = 1$.

Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a nécessairement $|a| = |a - 1| = 1$. Via parties réelle et imaginaire, on obtient $a = -j$ ou $-j^2$.

Si P est solution, non nulle, alors son coefficient dominant vaut 1 et on peut écrire :

$P = X^\alpha (X - 1)^\beta (X^2 - X + 1)^\gamma$. En injectant une telle expression dans l'équation, on observe que celle-ci est solution si, et seulement si, $\alpha = \beta$ et $\gamma = 0$.

Exercice 55 : [énoncé]

Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.

Si a est racine de P alors a^2 l'est aussi puis a^4, a^8, \dots

Or les racines de P sont en nombre fini donc les éléments a^{2^n} ($n \in \mathbb{N}$) sont redondants. On en déduit que $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.

De plus, si a est racine de P alors $(a - 1)$ est aussi racine de $P(X + 1)$ donc $(a - 1)^2$ est racine de P . On en déduit que $a - 1 = 0$ ou $a - 1$ est racine de l'unité.

Si $a \neq 0, 1$ alors $|a| = |a - 1| = 1$ d'où l'on tire $a = -j$ ou $-j^2$.

Au final, les racines possibles de P sont $0, 1, -j$ et $-j^2$.

Le polynôme P s'écrit donc

$$P(X) = \lambda X^\alpha (X-1)^\beta (X+j)^\gamma (X+j^2)^\delta$$

avec $\lambda \neq 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.

En injectant cette expression dans l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

on obtient

$$\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta \text{ et } \gamma = \delta = 0.$$

On conclut

$$P(X) = (X(X-1))^\alpha.$$

Exercice 56 : [énoncé]

(a) Si a est une racine de P non nulle alors a^2, a^4, \dots sont racines de P . Or $P \neq 0$ donc P n'admet qu'un nombre fini de racines. La série précédente est donc redondante et par suite a est une racine de l'unité et donc $|a| = 1$.

Si $a = 0$ est racine de P alors $1 = (0+1)^2$ aussi puis $4 = (1+1)^2$ l'est encore, ... et finalement P admet une infinité de racines ce qui est exclu.

Finalement les racines de P sont toutes de module 1.

(b) Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P . $a+1$ est racine de $P(X-1)$ donc $(a+1)^2$ est aussi racine de P . Il s'ensuit que $|a| = |a+1| = 1$. En résolvant cette double équation on obtient $a = j$ ou j^2 et donc P est de la forme

$$P(X) = \lambda (X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta.$$

Le nombre j est racine de multiplicité α de P donc j est racine de multiplicité au moins α de

$$P(X^2) = (X^2-j)^\alpha (X^2-j^2)^\beta$$

et par suite $\beta \geq \alpha$. Un raisonnement symétrique permet de conclure $\beta = \alpha$ et le polynôme P est de la forme

$$\lambda (X^2 + X + 1)^\alpha.$$

Un tel P est solution du problème posé si, et seulement si,

$$\lambda^2 (X^4 + X^2 + 1)^\alpha = \lambda ((X-1)^2 + (X-1) + 1)^\alpha (X^2 + X + 1)^\alpha$$

égalité qui est vérifiée si, et seulement si, $\lambda = 1$.

Finalement les solutions du problème posé sont les polynômes

$P = (X^2 + X + 1)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 57 : [énoncé]

Supposons P solution.

Le coefficient dominant λ de P vérifie $\lambda = \lambda^2$ et donc est égal à 1.

Si a est racine de P alors a^2 et $(a+1)^2$ le sont aussi.

Si $a \neq 0$ est une racine de P alors a^2, a^4, \dots sont racines de P . Or $P \neq 0$ et donc P n'admet qu'un nombre fini de racines. La suite précédente est donc redondante et par conséquent a est une racine de l'unité. En particulier $|a| = 1$.

Si $a = 0$ est racine de P alors $1 = (0+1)^2$ aussi puis $4 = (1+1)^2$ l'est encore, ... et finalement P admet une infinité de racines ce qui est exclu.

Finalement les racines de P sont toutes de module 1.

Or si a est racine de P , $(a+1)^2$ l'étant encore et donc

$$|a| = |a+1| = 1.$$

Les seuls complexes vérifiant cette identité sont j et j^2 (ce sont les points intersection du cercle unité et du cercle de centre -1 et de rayon 1 du plan complexe). On en déduit

$$P = (X^2 + X + 1)^n$$

car P est un polynôme réel et que donc ses racines complexes conjuguées sont d'égales multiplicités.

Inversement, on vérifie par le calcul qu'un tel polynôme est bien solution.

Exercice 58 : [énoncé]

Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.

Si a est racine de P alors a^2 l'est aussi puis a^4, a^8, \dots

Or les racines de P sont en nombre fini donc les éléments a^{2^n} ($n \in \mathbb{N}$) sont redondants. On en déduit que $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.

De plus, si a est racine de P alors $(a+1)$ est aussi racine de $P(X-1)$ donc $(a+1)^2$ est racine de P . On en déduit que $a+1 = 0$ ou $a+1$ est racine de l'unité.

Si $a \neq 0, -1$ alors $|a| = |a+1| = 1$ d'où l'on tire $a = j$ ou j^2 .

Au final, les racines possibles de P sont $0, -1, j$ et j^2 .

Le polynôme P s'écrit donc $P(X) = \lambda X^\alpha (X+1)^\beta (X-j)^\gamma (X-j^2)^\delta$ avec $\lambda \neq 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.

En injectant cette expression dans l'équation $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ on obtient $\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta = 0$ et $\gamma = \delta$.

On conclut

$$P(X) = (X^2 + X + 1)^\gamma.$$

Exercice 59 : [énoncé]

(a) Dans $\mathbb{C}[X]$

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$

et dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1).$$

(b) Dans $\mathbb{C}[X]$

$$X^5 - 1 = \prod_{k=0}^4 (X - e^{\frac{2ik\pi}{5}})$$

et dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1)(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1).$$

(c) Dans $\mathbb{C}[X]$

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 - X + 1 + i)(X^2 - X + 1 - i) = (X - i)(X - 1 + i)(X + i)(X - 1 - i)$$

et dans $\mathbb{R}[X]$

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2).$$

Exercice 60 : [énoncé]

(a) $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$

(b) $X^4 + X^2 - 6 = (X^2 + 1/2)^2 - 25/4 = (X^2 - 2)(X^2 + 3) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 3)$

(c) $X^8 + X^4 + 1 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2 = (X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1)$ puis
 $X^8 + X^4 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1).$

Exercice 61 : [énoncé]

Les racines de $(X + i)^n - (X - i)^n$ sont les $z_k = \cot \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$.

Par suite

$$\prod_{k=1}^{n-1} (X - \cot \frac{k\pi}{n}) \mid (X + i)^n - (X - i)^n$$

et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$(X + i)^n - (X - i)^n = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (X - \cot \frac{k\pi}{n}).$$

Le coefficient dominant de $(X + i)^n - (X - i)^n$ étant $2ni$, on obtient

$$(X + i)^n - (X - i)^n = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} (X - \cot \frac{k\pi}{n}).$$

Exercice 62 : [énoncé]

Les racines complexes de P sont les $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ avec $k \in \{0, \dots, 2n\}$.

On observe $\overline{\omega_k} = \omega_{2n-k}$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ donc

$$P = (X - 1) \prod_{k=1}^n (X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) = (X - 1) \prod_{k=1}^n \left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}X + 1 \right).$$

Exercice 63 : [énoncé]

Les racines de $X^2 - 2\cos(na)X + 1$ sont e^{ina} et e^{-ina} donc

$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1 = (X^n - e^{ina})(X^n - e^{-ina}).$$

Les racines de $X^n - e^{ina}$ sont les $e^{ia+2ik\pi/n}$ avec $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ et celles de $X^n - e^{-ina}$ s'en déduisent par conjugaison.

Ainsi

$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{ia+2ik\pi/n}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{-ia-2ik\pi/n})$$

dans $\mathbb{C}[X]$ puis

$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{ia+2ik\pi/n})(X - e^{-ia-2ik\pi/n}) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right)X + 1 \right)$$

dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 64 : [énoncé]

Notons x_1, x_2, x_3, x_4 les racines du polynôme considéré avec $x_1 + x_2 = 2$.

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0 \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -12 \\ \sigma_4 = x_1x_2x_3x_4 = -5 \end{cases}$$

σ_1 donne $x_3 + x_4 = -2$, σ_2 donne $x_1x_2 + x_3x_4 = 4$ et σ_3 donne $x_1x_2 - x_3x_4 = 6$.

On obtient $x_1x_2 = 5$ et $x_3x_4 = -1$.

x_1 et x_2 sont les racines de $X^2 - 2X + 5$ i.e. $1 \pm 2i$.

x_3 et x_4 sont les racines de $X^2 + 2X - 1$ i.e. $-1 \pm \sqrt{2}$.

Exercice 65 : [énoncé]

Notons x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 7X + \lambda$. On peut supposer $x_2 = 2x_1$.
Les relations entre coefficients et racines donnent :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -7 \\ x_1x_2x_3 = -\lambda \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x_3 = -3x_1 \\ 2x_1^2 - 6x_1^2 - 3x_1^2 = -7 \\ -6x_1^3 = -\lambda \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x_3 = -3x_1 \\ x_1^2 = 1 \\ \lambda = 6x_1^3. \end{cases}$$

Pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine double d'une autre il est nécessaire que $\lambda = 6$ ou -6 .

Pour $\lambda = 6$, $X^3 - 7X + 6$ admet 1, 2 et -3 pour racines.

Pour $\lambda = -6$, $X^3 - 7X - 6$ admet $-1, -2$ et 3 pour racines.

Exercice 66 : [énoncé]

Notons x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. On peut supposer $x_1 + x_2 = x_3$.

Les relations entre coefficients et racines donnent :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 23 \\ x_1x_2x_3 = 28 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_1x_2 + 4(x_2 + x_1) = 23. \\ 4x_1x_2 = 28 \end{cases}$$

Pour déterminer x_1 et x_2 il reste à résoudre $x^2 - 4x + 7 = 0$.

Finalement $x_1 = 2 + i\sqrt{3}, x_2 = 2 - i\sqrt{3}$ et $x_3 = 4$.

Exercice 67 : [énoncé]

$$(a) \begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \sqrt{2} \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2\sqrt{2} + 2, \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

On en déduit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2$,

$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1 = 4$ et $x_1^2x_2^2x_3^2 = 8$.

Donc x_1^2, x_2^2 et x_3^2 sont racines de $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

(b) 2 est racine de l'équation ci-dessus :

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2i)(x - 2i).$$

Quitte à réindexer : $x_1^2 = 2, x_2^2 = 2i$ et $x_3^2 = -2i$ d'où $x_1 = \pm\sqrt{2}, x_2 = \pm(1 + i)$ et $x_3 = \pm(1 - i)$.

Puisque $x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \sqrt{2}$, on a $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 1 + i$ et $x_3 = 1 - i$.

Exercice 68 : [énoncé]

(a) Soit (x, y, z) un triplet solution

On a $\sigma_1 = x + y + z = 1, \sigma_3 = xyz = -4$ et

$$\sigma_2 = xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = -4.$$

Par suite x, y, z sont les racines de :

$$X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X - 1)(X - 2)(X + 2).$$

Donc $\{x, y, z\} = \{1, -2, 2\}$.

Inversement de tels triplets sont solutions.

(b) Soit (x, y, z) un triplet solution de

$$\begin{cases} x(y + z) = 1 & (1) \\ y(z + x) = 1 & (2) \\ z(x + y) = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) - (2) donne $xz = yz$, (3) donne $z \neq 0$ donc $x = y$.

De même on obtient $x = z$.

Ainsi $x = y = z = 1/\sqrt{2}$ ou $-1/\sqrt{2}$.

Inversement de tels triplets sont solutions.

(c) Soit (x, y, z) un triplet solution.

Posons $S_1 = x + y + z = 2, S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 14$ et $S_3 = x^3 + y^3 + z^3$.

Déterminons $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx$ et $\sigma_3 = xyz$.

On a $\sigma_1 = 2$.

$S_1^2 - S_2 = 2\sigma_2$. Par suite $\sigma_2 = -5$.

Posons $t = x^2y + yx^2 + y^2z + zy^2 + z^2x + xz^2$.

On a $S_1S_2 = S_3 + t$ d'où $t = S_1S_2 - S_3 = 8$

On a $S_1^3 = S_3 + 3t + 6\sigma_3$ d'où $\sigma_3 = \frac{1}{6}(S_1^3 - S_3 - 3t) = -6$.

Par suite x, y, z sont les racines de

$$X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 = X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X - 1)(X + 2)(X - 3).$$

Donc $\{x, y, z\} = \{1, -2, 3\}$.

Inversement de tels triplets sont solutions.

Exercice 69 : [énoncé]

En développant

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx}$$

avec

$$\frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} = \frac{2(z+x+y)}{2xyz} = 0.$$

Exercice 70 : [énoncé]

(a) On a

$$(X-1)P_n = X^{n+1} - 1 = \prod_{k=0}^n (X - e^{2ik\pi/(n+1)})$$

donc

$$P_n = \prod_{k=1}^n (X - e^{2ik\pi/(n+1)}).$$

(b) $P_n(1) = n + 1$ et

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^n (1 - e^{2ik\pi/(n+1)}) = (-2i)^n \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \prod_{k=1}^n e^{i\frac{k\pi}{n+1}}$$

mais

$$\prod_{k=1}^n e^{i\frac{k\pi}{n+1}} = \exp(in\pi/2) = i^n$$

donc

$$\prod_{k=1}^n \sin\frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^n}.$$

Exercice 71 : [énoncé]

On écrit

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0.$$

Notons α_k la somme des zéros de $P^{(k)}$. Par les relations coefficients racines d'un polynôme scindé

$$\alpha_0 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \alpha_1 = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}, \alpha_2 = -\frac{(n-2)a_{n-1}}{na_n}, \dots$$

$$\alpha_k = -\frac{(n-k)a_{n-1}}{na_n}, \dots, \alpha_{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

Les $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont donc en progression arithmétique de raison a_{n-1}/na_n .

Exercice 72 : [énoncé]

Puisque $\alpha + \beta + \gamma = -a$, on a

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = -\left(\frac{\alpha}{a + \alpha} + \frac{\beta}{a + \beta} + \frac{\gamma}{a + \gamma}\right)$$

et réduisant au même dénominateur

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{a^3 - 2ab + 3c}{ab - c}$$

car $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$ et $\alpha\beta\gamma = -c$.

Exercice 73 : [énoncé]

Soit (x, y, z) un triplet de complexes et

$P(X) = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - pX^2 + qX - r$ avec

$$\begin{cases} p = x + y + z \\ q = xy + yz + zx \\ r = xyz. \end{cases}$$

On a

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx).$$

Posons $t = x^3 + y^3 + z^3$ et $s = xy^2 + yx^2 + yz^2 + zy^2 + zx^2 + xz^2$

On a

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = t + s \text{ et } pq = s + 3r$$

donc $t = 3r - pq$.

Puisque x, y, z sont racines de $XP(X) = X^4 - pX^3 + qX^2 - rX$, on a

$$x^4 + y^4 + z^4 = pt - q \times (x^2 + y^2 + z^2) + rp.$$

Puisque x, y, z sont racine de $X^2P(X) = X^5 - pX^4 + qX^3 - rX^2$, on a

$$x^5 + y^5 + z^5 = p(x^4 + y^4 + z^4) - q(x^3 + y^3 + z^3) + r(x^2 + y^2 + z^2).$$

On en déduit que (x, y, z) est solution du système posé si, et seulement si,

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ pt + rp = 0 \\ -qt = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, sachant $t = 3r - pq$,

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ p(4r - pq) = 0 \\ q(3r - pq) = 0. \end{cases}$$

Ce système équivaut encore à

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ 2pr = q^2 \\ 3qr = pq^2 \end{cases}$$

et aussi à

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ 2pr = q^2 \\ qr = 0. \end{cases}$$

Que r soit nul ou non, le système entraîne $q = 0$ et est donc équivalent au système

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0. \end{cases}$$

Ainsi, un triplet (x, y, z) est solution du système proposé si, et seulement si, x, y et z sont les trois racines du polynôme $P_r(X) = X^3 - r$ (pour $r \in \mathbb{C}$ quelconque). En introduisant $a \in \mathbb{C}$ tel que $a^3 = r$, les racines de $P_r(X)$ sont a, aj et aj^2 . Finalement les solutions du système, sont les triplets (x, y, z) avec

$$x = a, y = aj \text{ et } z = aj^2$$

pour $a \in \mathbb{C}$ quelconque.

Exercice 74 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}$$

donc

$$\frac{xP'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}}$$

Par développement limité à un ordre N , on a quand $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{xP'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}} = \sum_{\ell=0}^N \frac{S_\ell}{x^\ell} + o\left(\frac{1}{x^N}\right)$$

puis

$$xP'(x) = \sum_{\ell=0}^N \frac{S_\ell}{x^\ell} P(x) + o\left(\frac{1}{x^{N-n}}\right).$$

Or

$$xP'(x) = na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$$

et

$$\sum_{\ell=0}^N \frac{S_\ell}{x^\ell} P(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{N+2n}x^{N-n}$$

avec

$$b_0 = a_0S_0, b_1 = a_0S_1 + a_1S_0, \dots$$

$$b_k = \sum_{\ell=0}^{\min(k,n)} a_\ell S_{k-\ell}.$$

Par unicité des coefficients de $x^n, x^{n-1}, \dots, 1$ de notre développement limité généralisé, on obtient

$$\forall 0 \leq k \leq n, \sum_{\ell=0}^k a_\ell S_{k-\ell} = (n-k)a_k.$$

Pour $k = 0$, on obtient $S_0 = n$ (ce qui était immédiat) et on en déduit

$$\forall 0 < k \leq n, \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell S_{k-\ell} + ka_k = 0.$$

Par unicité des coefficients de $1/x, 1/x^2, \dots$ de notre développement limité généralisé, on obtient

$$\forall k > n, \sum_{\ell=0}^n a_\ell S_{k-\ell} = 0.$$

Exercice 75 : [\[énoncé\]](#)

(a) $1, j, j^2$ conviennent.

(b) Introduisons le polynôme $P(X) = (X - a)(X - b)(X - c)$. Les coefficients de ce polynôme s'expriment à partir de $S_1 = a + b + c, S_2 = a^2 + b^2 + c^2$ et $S_3 = a^3 + b^3 + c^3$, le polynôme P est donc à coefficients réels. S'il n'admet pas trois racines, il possède deux racines complexes conjuguées. Celles-ci sont alors de même module ce qui est exclu.

Exercice 76 : [énoncé]

- (a) $f_0 : x \mapsto 1, f_1 : x \mapsto x, f_2 : x \mapsto 2x^2 - 1$ et $f_3 : x \mapsto 4x^3 - 3x$
- (b) $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta = 2x f_n(x)$
en posant $\theta = \arccos x$.
- (c) Existence : Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ et $n = 1 : T_0 = 1$ et $T_1 = X$ conviennent.
Supposons le résultat établi aux rangs $n - 1$ et $n \geq 1$.
Soit T_{n+1} le polynôme défini par $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.
On a $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) = f_{n+1}(x)$.
Le polynôme T_{n+1} convient. Récurrence établie.
Unicité : Si T_n et R_n conviennent, alors ceux-ci prennent mêmes valeurs en un infinité de points, ils sont donc égaux.
- (d) Comme $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, on montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg T_n = n$.
Il est alors aisé de montrer, par récurrence simple, que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que le coefficient dominant de T_0 est 1.
- (e) Résolvons l'équation $T_n(x) = 0$ sur $[-1; 1]$:
 $\cos(n \arccos x) = 0 \iff n \arccos x = \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \arccos x = \frac{\pi}{2n} [\frac{\pi}{n}]$
Posons x_0, x_1, \dots, x_{n-1} définis par $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.
 x_0, x_1, \dots, x_{n-1} forment n racines distinctes appartenant à $] -1; 1[$ du polynôme T_n .
Or $\deg T_n = n$ donc il ne peut y avoir d'autres racines et celles-ci sont nécessairement simples.

Exercice 77 : [énoncé]

- (a) $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ sont racines de L_i donc $\forall j \neq i, L_i(a_j) = 0$.

De plus

$$L_i(a_i) = \frac{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (a_i - a_j)}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (a_i - a_j)} = 1.$$

Donc

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, L_i(a_j) = \delta_{i,j}.$$

- (b) Posons $Q = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i(X)$, on a

$$Q(a_j) = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i(a_j) = \sum_{i=0}^n P(a_i)\delta_{i,j} = P(a_j)$$

P et Q sont deux polynômes de degré inférieur à n et prenant mêmes valeurs aux $n + 1$ points a_0, a_1, \dots, a_n ils sont donc égaux.

Exercice 78 : [énoncé]

- (a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$
Pour $n = 0$: ok avec $P_2 = X$.
Supposons la propriété établie au rang $n - 1 \in \mathbb{N}$.

$$1 + P_{n+2}P_n = 1 + XP_{n+1}P_n - P_n^2 = 1 + X(XP_n - P_{n-1})P_n - P_n^2.$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$1 + P_{n+2}P_n = X^2P_n^2 - XP_{n-1}P_n - P_{n-1}P_{n+1}$$

donc

$$1 + P_{n+2}P_n = X^2P_n^2 - XP_{n-1}P_n - P_{n-1}(XP_n - P_{n-1}) = X^2P_n^2 - 2XP_{n-1}P_n + P_{n-1}^2 = P_n^2 - P_{n-1}^2$$

Récurrence établie.

- (b) La relation ci-dessus peut se relire : $UP_n + VP_{n+1} = 1$. Donc P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
- (c) Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$, établissons la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m.$$

Pour $m = 0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $m \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P_{m+n+1} = P_{n+1}P_{m+1} - P_nP_m = (XP_n - P_{n-1})P_{m+1} - P_nP_m = (XP_{m+1} - P_m)P_n - P_{n-1}P_m.$$

donc

$$P_{m+n+1} = P_{m+2}P_n - P_{n-1}P_{m+1}.$$

Récurrence établie.

- (d) Posons $D = \text{pgcd}(P_n, P_{n+m})$ et $E = \text{pgcd}(P_n, P_m)$.
Comme $P_{n+m} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m$ on a $E \mid D$.
Comme $P_{n-1} P_m = P_n P_{m+1} - P_{m+n}$ et $P_n \wedge P_{n-1} = 1$ on a $D \mid E$.
Finalement $D = E$.

En notant r le reste de la division euclidienne de m par n on a $m = nq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et

$$\text{pgcd}(P_n, P_m) = \text{pgcd}(P_n, P_{n-m}) = \text{pgcd}(P_n, P_{n-2m}) = \dots = \text{pgcd}(P_n, P_r).$$

- (e) En suivant l'algorithme d'Euclide menant le calcul de $\text{pgcd}(m, n)$ simultanément avec celui menant le calcul de $\text{pgcd}(P_m, P_n)$, on observe que

$$\text{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\text{pgcd}(m,n)}.$$

Exercice 79 : [énoncé]

Par la formule de dérivation de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(n-k)} (e^{-x})^{(k)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{k!} x^k e^{-x}$$

donc

$$L_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n!)^2}{(k!)^2(n-k)!} X^k$$

est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

Exercice 80 : [énoncé]

On a

$$\cos n\theta = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta\right)$$

donc

$$\cos n\theta = \sum_{\ell=0}^{E(n/2)} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \cos^{n-2\ell}\theta (1 - \cos^2\theta)^\ell$$

est un polynôme en $\cos\theta$. Cela assure l'existence de T_n , l'unicité provenant de ce que deux polynômes coïncidant en un nombre infini de points sont nécessairement égaux.

(a)

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta \cos n\theta$$

donne

$$T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1} = 0.$$

(b) On a

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

donc en dérivant

$$-\sin\theta T'_n(\cos\theta) = -n \sin n\theta$$

et

$$\sin^2\theta T''_n(\cos\theta) - \cos\theta T'_n(\cos\theta) = -n^2 \cos n\theta.$$

On en déduit par coïncidence de polynômes sur $[-1; 1]$ que

$$(1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n = 0.$$

(c) En dérivant cette relation à l'ordre k :

$$(1 - X^2)T_n^{(k+2)} - 2kXT_n^{(k+1)} - k(k-1)T_n^{(k)} - XT_n^{(k+1)} - kT_n^{(k)} + n^2T_n^{(k)} = 0 \quad (1)$$

En évaluant (1) en 1 :

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(1) = (n^2 - k^2)T_n^{(k)}(1).$$

Comme $T_n^{(0)}(1) = 1$, on obtient

$$T_n^{(k)}(1) = \begin{cases} \frac{(n!)^2 2^k k!}{(n-k)!(n+k)!(2k+1)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En évaluant (1) en -1 :

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(-1) = -(n^2 - k^2)T_n^{(k)}(-1).$$

Comme $T_n^{(0)}(-1) = (-1)^n$, on obtient

$$T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n-k} T_n^{(k)}(1).$$

Exercice 81 : [énoncé]

Soit (P, Q) un couple solution.

Si le polynôme P est constant alors nécessairement $Q = 0$ et $P = \pm 1$. Vérification immédiate.

Sinon, posons $n = \deg P \in \mathbb{N}^*$. La relation $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$ impose que P et Q sont premiers entre eux et en dérivant on obtient

$$PP' - XQ^2 + (1 - X^2)QQ' = 0.$$

Par suite $Q \mid PP'$ puis $Q \mid P'$. Par des considérations de degré et de coefficient dominant on peut affirmer $P' = \pm nQ$.

Quitte à considérer $-Q$, supposons $P' = nQ$ et la relation

$$PP' - XQ^2 + (1 - X^2)QQ' = 0 \text{ donne } (1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0.$$

Résolvons l'équation différentielle $(1 - t^2)y'' - ty' + n^2y = 0$ sur $[-1; 1]$.

Par le changement de variable $t = \cos\theta$, on obtient pour solution générale

$$y(t) = \lambda \cos(n \arccos t) + \mu \sin(n \arccos t).$$

La fonction $t \mapsto \cos(n \arccos t)$ est polynomiale (cf. polynôme de Tchebychev), cela définit le polynôme T_n .

La fonction $t \mapsto \sin(n \arccos t)$ ne l'est pas car de dérivée $\frac{-n}{\sqrt{1-t^2}} \cos(n \arccos t)$ non polynomiale.

Par suite $P = \lambda T_n$ et $Q = \pm \frac{1}{n} T'_n$.

La relation $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$ évaluée en 1 impose $\lambda^2 = 1$ et finalement

$$(P, Q) = (\pm T_n, \pm \frac{1}{n} T'_n).$$

Vérification : pour le couple $(P, Q) = (\pm T_n, \pm \frac{1}{n} T'_n)$, le polynôme $P^2 + (1 - X^2)Q^2$ est constant car de polynôme dérivé nul et puisqu'il prend la valeur 1 en 1, on peut affirmer $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$.

Exercice 82 : [énoncé]

(a) $P_2 = X^2 - 2, P_3 = X^3 - 3X.$

Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, on montre $\deg P_n = n$ et $\text{coeff}(P_n) = 1.$

(b) Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N} :$

Pour $n = 0$ et $n = 1 :$ ok

Supposons la propriété établie aux rangs n et $n + 1$ (avec $n \geq 0$)

$$P_{n+2}(z) = (z+1/z)P_{n+1}(z) - P_n(z) \underset{HR}{=} \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}.$$

Récurrence établie.

(c) $P_n(2 \cos \theta) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos n\theta.$

(d) Soit $x \in [-2; 2].$ Il existe $\theta \in [0; \pi]$ unique tel que $x = 2 \cos \theta.$

$$P_n(x) = 0 \iff \cos n\theta = 0 \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}.$$

Par suite les $x_k = 2 \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right)$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ constituent n racines distinctes de $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0.$ Puisque le polynôme P_n est de degré $n,$ il n'y en a pas d'autres.

Exercice 83 : [énoncé]

Montrons la propriété par récurrence sur $n \geq 1.$

Pour $n = 1, P_1(X) = X$ convient.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1.$

En dérivant la relation

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1) \sin x P_n(\sin x) + \cos^2 x P_n'(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}.$$

Posons alors

$$P_{n+1}(X) = (n+1)XP_n(X) + (1-X^2)P_n'(X)$$

de sorte que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}.$$

On peut écrire

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_k \geq 0, a_n \neq 0$$

et alors

$$P_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^n (n+1-k)a_k X^{k+1} + \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

est un polynôme de degré $n + 1$ à coefficients positif ou nul.

Récurrence établie.

Par la relation de récurrence obtenue ci-dessus

$$P_1(X) = X, P_2(X) = 1 + X^2 \text{ et } P_3(X) = 5X + X^3$$

et

$$P_{n+1}(1) = (n+1)P_n(1)$$

donc

$$P_n(1) = n!$$