

# Nombres réels et complexes

## Rationnels et irrationnels

### Exercice 1 [02093] [Correction]

Montrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel

### Exercice 2 [02095] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

- On suppose  $f$  constante égale  $C$  quelle est la valeur de  $C$ ?  
On revient au cas général.
- Calculer  $f(0)$ .
- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$ .
- Établir que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$  et généraliser cette propriété à  $n \in \mathbb{Z}$ .
- On pose  $a = f(1)$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$ .

### Exercice 3 [02472] [Correction]

Montrer que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

### Exercice 4 [03668] [Correction]

(Irrationalité de  $e^r$  pour  $r \in \mathbb{Q}^*$ )

- Pour  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx - a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en  $x = 0$  des valeurs entières.

- Établir la même propriété en  $x = a/b$

- On pose  $r = a/b$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^r P_n(t)e^t dt$$

Montrer que  $I_n \rightarrow 0$ .

- En supposant  $e^r = p/q$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $qI_n \in \mathbb{Z}$ . Conclure.

## Les nombres réels

### Exercice 5 [02099] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y);$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y);$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$$

- Calculer  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $f(-1)$ .
- Déterminer  $f(x)$  pour  $x \in \mathbb{Z}$  puis pour  $x \in \mathbb{Q}$ .
- Démontrer que  $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$ . En déduire que  $f$  est croissante.
- Conclure que  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

### Exercice 6 [03404] [Correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . On suppose

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$$

Montrer que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_k = 1$ .

## Inégalités

### Exercice 7 [03643] [Correction]

Soient  $x, y \in [0; 1]$ . Montrer

$$x^2 + y^2 - xy \leq 1$$

**Exercice 8** [03224] [Correction]

Montrer

$$\forall u, v \geq 0, 1 + \sqrt{uv} \leq \sqrt{1+u}\sqrt{1+v}$$

**Exercice 9** [01733] [Correction]Déterminer tous les couples  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  pour lesquels il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x, y > 0, x^\alpha y^\beta \leq M(x+y)$$

**Exercice 10** [03640] [Correction]Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  deux suites réelles monotones. Comparer

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

**Exercice 11** [04017] [Correction]

Montrer que

$$\forall x, y \in [0; 1], \min\{xy, (1-x)(1-y)\} \leq \frac{1}{4}$$

## Partie entière

**Exercice 12** [02102] [Correction]

Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, [x] + [x+y] + [y] \leq [2x] + [2y]$$

**Exercice 13** [02104] [Correction]

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \left[ x + \frac{k}{n} \right] = [nx]$$

**Exercice 14** [02105] [Correction]Soit  $a \leq b \in \mathbb{R}$ . Établir

$$\text{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = [b] + [1-a]$$

**Exercice 15** [02106] [Correction]Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .(a) Montrer qu'il existe  $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^{*2}$  tel que

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3} \text{ et } 3b_n^2 = a_n^2 - 1$$

(b) Montrer que la partie entière de  $(2 + \sqrt{3})^n$  est un entier impair.

## Les nombres complexes

**Exercice 16** [02029] [Correction]Calculer pour  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

**Exercice 17** [03107] [Correction]Soit  $B$  une partie bornée non vide de  $\mathbb{C}$ .On suppose que si  $z \in B$  alors  $1 - z + z^2 \in B$  et  $1 + z + z^2 \in B$ .Déterminer  $B$ .**Exercice 18** [03651] [Correction]Soient  $a, b, z$  trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer

$$\frac{b}{a} \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^2 \in \mathbb{R}_+^*$$

## Le plan complexe

**Exercice 19** [02027] [Correction](a) Déterminer le lieu des points  $M$  d'affixe  $z$  qui sont alignés avec  $I$  d'affixe  $i$  et  $M'$  d'affixe  $iz$ .(b) Déterminer de plus le lieu des points  $M'$  correspondant.**Exercice 20** [03040] [Correction]Quelle est l'image du cercle unité par l'application  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  ?

**Exercice 21** [ 02050 ] [Correction]

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que

$$z + \bar{z} = |z|$$

**Exercice 22** [ 03880 ] [Correction]

Soient  $a, b, c$  des réels strictement positifs.

À quelle condition existe-t-il des complexes  $t, u, v$  de somme nulle vérifiant

$$t\bar{t} = a^2, u\bar{u} = b^2 \text{ et } v\bar{v} = c^2$$

## Module et argument

**Exercice 23** [ 02030 ] [Correction]

Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

**Exercice 24** [ 02031 ] [Correction]

Soient  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $z' \in \mathbb{C}$ . Montrer

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z$$

**Exercice 25** [ 02032 ] [Correction]

Établir :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$$

Interprétation géométrique et précision du cas d'égalité?

**Exercice 26** [ 00055 ] [Correction]

Soit  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $|a| < 1$ .

Déterminer l'ensemble des complexes  $z$  tels que

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1$$

**Exercice 27** [ 03642 ] [Correction]

(a) Vérifier

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

(b) On suppose  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tels que  $|z_1| \leq 1$  et  $|z_2| \leq 1$ . Montrer qu'il existe  $\varepsilon = 1$  ou  $-1$  tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \leq \sqrt{2}$$

**Exercice 28** [ 03249 ] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$f(z) = \frac{z + |z|}{2}$$

Déterminer les valeurs prises par  $f$ .

**Exercice 29** [ 02052 ] [Correction]

Résoudre l'équation  $|z + 1| = |z| + 1$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

## Racines de l'unité

**Exercice 30** [ 02037 ] [Correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $U_n$  l'ensemble des racines  $n$ -ème de l'unité.

Calculer

$$\sum_{z \in U_n} |z - 1|$$

**Exercice 31** [ 03353 ] [Correction]

Soient  $n \geq 3$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_n$  les racines  $n$ -ième de l'unité avec  $\omega_n = 1$ .

(a) Calculer pour  $p \in \mathbb{Z}$ ,

$$S_p = \sum_{i=1}^n \omega_i^p$$

(b) Calculer

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_i}$$

**Exercice 32** [ 02038 ] [Correction]

Soit  $\omega$  une racine  $n$ ème de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \omega^k$$

En calculant  $(1-\omega)S$ , déterminer la valeur de  $S$ .

**Exercice 33** [ 02039 ] [Correction]

Simplifier :

$$(a) \ j(j+1) \qquad (b) \ \frac{j}{j^2+1} \qquad (c) \ \frac{j+1}{j-1}$$

**Exercice 34** [ 02040 ] [Correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Combien y a-t-il de solutions ?

**Exercice 35** [ 02043 ] [Correction]

Soit  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ . Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

**Exercice 36** [ 02044 ] [Correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $\omega = \exp(2i\pi/n)$ .

(a) Établir que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 1$ ,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$$

(b) Justifier que l'égalité reste valable pour  $z = 1$ .

(c) En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

**Exercice 37** [ 02531 ] [Correction]

Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

## Équations algébriques

**Exercice 38** [ 02045 ] [Correction]

Pour quels  $a \in \mathbb{R}$  l'équation  $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$  possède  $x = 1$  pour solution ? Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

**Exercice 39** [ 02046 ] [Correction]

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , les équations :

$$(a) \ z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0 \\ (b) \ z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0.$$

**Exercice 40** [ 02047 ] [Correction]

- (a) Déterminer les racines carrées complexes de  $5 - 12i$ .  
 (b) Résoudre l'équation  $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$  en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.  
 (c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

**Exercice 41** [ 02048 ] [Correction]

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$$

## Exponentielle complexe

**Exercice 42** [ 02051 ] [Correction]

Soit  $Z \in \mathbb{C}^*$ . Résoudre l'équation  $e^z = Z$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

## Exponentielles imaginaires

**Exercice 43** [ 02034 ] [Correction]

Simplifier  $\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$  pour  $\theta \in ]-\pi; \pi[$ .

**Exercice 44** [ 02035 ] [Correction]

Déterminer module et argument de  $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$  pour  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ .

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

Par l'absurde supposons  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ .

On peut alors écrire  $\sqrt{2} = p/q$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$  et, quitte à simplifier,  $p$  et  $q$  non tous les deux pairs.

On a alors  $2q^2 = p^2$ .

$p$  est alors nécessairement pair car  $p^2$  est pair. Cela permet d'écrire  $p = 2k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  puis  $q^2 = 2k^2$ .

Mais alors  $q$  est pair. Par suite  $p$  et  $q$  sont tous les deux pairs.

Absurde.

### Exercice 2 : [énoncé]

- (a) La relation  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  avec  $f$  constante égale à  $C$  donne  $C = C + C$  d'où  $C = 0$ .
- (b) Pour  $x = y = 0$ , la relation  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  implique  $f(0) = 0$ .
- (c) Pour  $y = -x$ , la relation  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  donne  $0 = f(-x) + f(x)$  d'où  $f(-x) = -f(x)$ .
- (d) Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$$

Pour  $n \in \mathbb{Z}^-$ ,  $n = -p$  avec  $p \in \mathbb{N}$  et

$$f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$$

- (e) On peut écrire  $x = p/q$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ .

$$f(x) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right)$$

or

$$a = f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$$

donc

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}$$

puis

$$f(x) = \frac{ap}{q} = ax$$

### Exercice 3 : [énoncé]

On définit le nombre  $x$  étudié

$$x := (2/3 + 41/81 \cdot \sqrt{5/3})^{1/3} + (2/3 - 41/81 \cdot \sqrt{5/3})^{1/3};$$

Attention à définir les racines cubiques par des exposants  $1/3$  avec parenthèses.

On peut commencer par estimer la valeur cherchée

`evalf(x)`;

Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule  $x^3$

`expand(x^3)`;

Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître  $x$  par factorisation du terme

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Simplifions ce terme

`simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*`  
`(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3), assume=positive);`

On obtient

$$\frac{1}{81} (486 + 123\sqrt{15})^{1/3} (486 - 123\sqrt{15})^{1/3}$$

Développons selon  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$(486^2 - 123^2 \cdot 15)^{1/3};$$

donne 9261. Enfin

`ifactor(9261)`;

permet de conclure que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} = \frac{7}{27}$$

Ainsi  $x$  est solution de l'équation

$$x^3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{9}x$$

En factorisant le polynôme sous-jacent

`factor(x^3-7/9*x-4/3)`;

on obtient

$$(3x-4)(3x^2+4x+3) = 0$$

Puisque  $3x^2 + 4x + 3 > 0$ , on peut conclure

$$x = 4/3$$

### Exercice 4 : [énoncé]

(a) 0 est racine de multiplicité  $n$  de  $P_n$  donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme  $P_n$  est de degré  $2n$  donc  $P_n^{(m)} = 0$  pour tout  $m > 2n$  et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas  $n \leq m \leq 2n$ . En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} b^k x^{n+k}$$

Puisque  $P_n^{(m)}(0)$  est donné par la dérivation du terme  $x^m$ , on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{m-n} (-a)^{2n-m} b^{m-n} (n+m)! \in \mathbb{Z}$$

(b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

(c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^r t^n (bt - a)^n e^t dt \right| \leq \frac{1}{n!} r^{n+1} (br + a)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(d) Par intégration par parties

$$I_n = [P_n(t)e^t]_0^r - \int_0^r P_n'(t)e^t dt$$

et en répétant l'opération

$$I_n = \left[ \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m P_n^{(m)}(t)e^t \right]_0^r$$

On en déduit

$$qI_n = \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m (P_n^{(m)}(r)p - P_n^{(m)}(0)q) \in \mathbb{Z}$$

Or sur  $[0; r]$  la fonction  $t \mapsto P_n(t)e^t$  est continue, positive sans être nulle et  $0 < r$  donc  $I_n > 0$ .

Ainsi  $qI_n \rightarrow 0$ ,  $qI_n > 0$  et  $qI_n \in \mathbb{Z}$  : c'est absurde.

Notons qu'on en déduit immédiatement l'irrationalité de  $\ln r$  pour  $r \in \mathbb{Q}^{+*} \setminus \{1\}$ .

**Exercice 5 : [énoncé]**

(a)  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$  donc  $f(0) = 0$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1.x) = f(1)f(x)$$

Comme  $f$  est non nulle, on a  $f(1) = 1$ .

$f(1) + f(-1) = f(0) = 0$  donc  $f(-1) = -1$ .

(b) Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  :  $f(n) = n$ .

De plus

$$f(-n) = f((-1) \times n) = f(-1) \times f(n) = -f(n) = -n$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = x$$

Pour  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $x = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f(x) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = f(p) \times f\left(\frac{1}{q}\right)$$

Or  $f(p) = p$  et

$$1 = f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = f(q) \times f\left(\frac{1}{q}\right) = q \times f\left(\frac{1}{q}\right)$$

donc  $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}$ . Par suite  $f(x) = x$ .

(c)

$$\forall x \geq 0, f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$$

Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , si  $x \leq y$  alors

$$f(y) = f(x + y - x) = f(x) + f(y - x) \geq f(x)$$

Ainsi  $f$  est croissante.

(d) Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$$

Comme  $f$  est croissante :

$$f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) \leq f(x) < f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right)$$

puis

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq f(x) < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$$

À la limite, quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $x \leq f(x) \leq x$  i.e.  $f(x) = x$ .

Finalement,  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 6 :** [énoncé]

On a

$$\sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n 1 = 0$$

et puisqu'une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité est nulle, on obtient

$$\forall 1 \leq k \leq n, x_k = 1$$

**Exercice 7 :** [énoncé]

Sachant  $x^2 \leq x$  et  $y^2 \leq y$ , on a

$$x^2 + y^2 - xy - 1 \leq x + y - xy - 1 = (x-1)(1-y) \leq 0$$

**Exercice 8 :** [énoncé]

Compte tenu de la positivité des membres, le problème revient à établir

$$(1 + \sqrt{uv})^2 \leq (1+u)(1+v)$$

soit encore

$$2\sqrt{uv} \leq u+v$$

ce qui découle de la propriété

$$(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geq 0$$

**Exercice 9 :** [énoncé]

Soit  $(\alpha, \beta)$  solution. Considérons

$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x+y}$$

sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

On a

$$f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2x}$$

$f$  bornée implique  $\alpha + \beta = 1$ .

Inversement, supposons  $\alpha + \beta = 1$ .

Si  $y \geq x$  alors

$$0 \leq f(x, y) = \frac{x^\alpha y^{1-\alpha}}{x+y} \leq \frac{y}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \leq 1$$

Si  $x \geq y$  alors idem.

**Exercice 10 :** [énoncé]

Étudions la différence

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n n x_k y_k - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n x_k y_\ell\right)$$

ce qui donne encore

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell)$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n x_k (y_k - y_\ell) = \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} x_k (y_k - y_\ell) + \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} x_k (y_k - y_\ell)$$

car lorsque  $k = \ell$  le terme  $x_k (y_k - y_\ell)$  est nul.

Par changement d'indice, on peut réécrire la dernière somme

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} x_k (y_k - y_\ell) = \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} x_\ell (y_\ell - y_k)$$

et alors

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} (x_k - x_\ell) (y_k - y_\ell)$$

Les termes sommés sont alors tous de même signe, à savoir positif si les suites  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$  ont même monotonie et négatifs si ces deux suites sont de monotonies contraires.

Au final, si les deux suites ont même monotonie alors

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

et si les deux suites sont de monotonies contraires alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right)$$

**Exercice 11 :** [énoncé]

Commençons par résoudre le min. On a

$$xy \leq (1-x)(1-y) \iff x+y \leq 1$$

Cas  $x + y \leq 1$  :

$$\min \{xy, (1-x)(1-y)\} = xy \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

Cas  $x + y > 1$  :

$$\min \{xy, (1-x)(1-y)\} = (1-x)(1-y) < (1-x)x \leq 1/4$$

### Exercice 12 : [énoncé]

Si  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1/2$  et  $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1/2$  alors

$$\begin{aligned} \lfloor x + y \rfloor &= \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor, \\ \lfloor 2x \rfloor &= 2 \lfloor x \rfloor \text{ et} \\ \lfloor 2y \rfloor &= 2 \lfloor y \rfloor \end{aligned}$$

puis relation voulue.

Si  $\lfloor x \rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$  et  $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1/2$  alors

$$\begin{aligned} \lfloor x + y \rfloor &\leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1, \\ \lfloor 2x \rfloor &= 2 \lfloor x \rfloor + 1 \text{ et} \\ \lfloor 2y \rfloor &= 2 \lfloor y \rfloor \end{aligned}$$

puis la relation voulue.

Si  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1/2$  et  $\lfloor y \rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$  : c'est analogue.

Si  $\lfloor x \rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$  et  $\lfloor y \rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$  alors

$$\begin{aligned} \lfloor x + y \rfloor &\leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2, \\ \lfloor 2x \rfloor &= 2 \lfloor x \rfloor + 1 \text{ et} \\ \lfloor 2y \rfloor &= 2 \lfloor y \rfloor + 1 \end{aligned}$$

puis la relation voulue.

Dans tous les cas la relation proposée est vérifiée.

### Exercice 13 : [énoncé]

Posons  $m = \lfloor nx \rfloor$  et réalisons la division euclidienne de  $m$  par  $n$  :  $m = nq + r$  avec  $0 \leq r \leq n - 1$ .

On a  $nq + r \leq nx < nq + r + 1$  donc pour tout  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$  :

$$q + \frac{k+r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n}$$

Si  $k + r < n$  alors  $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$  et si  $k + r \geq n$  alors  $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q + 1$ .

Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \sum_{k=n-r}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = nq + r = m = \lfloor nx \rfloor$$

### Exercice 14 : [énoncé]

Si  $a \notin \mathbb{Z}$  alors  $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{[a] + 1, [a] + 2, \dots, [b]\}$  donc

$$\text{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = [b] - [a]$$

Or

$$\lfloor 1 - a \rfloor = 1 + \lfloor -a \rfloor = -[a]$$

car  $a \notin \mathbb{Z}$  donc

$$\text{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = [b] + \lfloor 1 - a \rfloor$$

Si  $a \in \mathbb{Z}$  alors  $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{a, a + 1, \dots, [b]\}$  donc

$$\text{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = [b] - a + 1 = [b] + \lfloor 1 - a \rfloor$$

car  $1 - a \in \mathbb{Z}$ .

### Exercice 15 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $n = 1$ ,  $a_1 = 2$  et  $b_1 = 1$  conviennent.

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 1$ .

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$$

avec  $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$  et  $b_{n+1} = a_n + 2b_n$  de sorte que

$$3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 3b_n^2 = -1$$

Récurrence établie.

(b)  $a_n - 1 \leq b_n\sqrt{3} < a_n$  donc  $2a_n - 1 \leq (2 + \sqrt{3})^n < 2a_n$  donc

$$\left\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \right\rfloor = 2a_n - 1$$

C'est un entier impair.



**Exercice 16 :** [énoncé]

$C_n$  et  $S_n$  sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = (1 + e^{i\theta})^n = 2^n e^{i\frac{n\theta}{2}} \cos^n \frac{\theta}{2}$$

Ainsi

$$C_n = 2^n \cos \frac{n\theta}{2} \cos^n \frac{\theta}{2} \text{ et } S_n = 2^n \sin \frac{n\theta}{2} \cos^n \frac{\theta}{2}$$

**Exercice 17 :** [énoncé]

On observe que  $B = \{i, -i\}$  est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...

Posons  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définies par

$$f(z) = 1 - z + z^2 \text{ et } g(z) = 1 + z + z^2$$

On remarque

$$|f(z) - i| = |z + i| |z - (1 + i)|, |f(z) + i| = |z - i| |z - (1 - i)|$$

$$|g(z) - i| = |z - i| |z + 1 + i| \text{ et } |g(z) + i| = |z + i| |z + 1 - i|$$

Soient  $a \in B$  et  $(z_n)_{n \geq 0}$  la suite d'éléments de  $B$  définie par  $z_0 = a$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \begin{cases} f(z_n) & \text{si } \operatorname{Re}(z_n) \leq 0 \\ g(z_n) & \text{si } \operatorname{Re}(z_n) > 0 \end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n = |z_n^2 + 1| = |z_n - i| |z_n + i|$$

Si  $\operatorname{Re}(z_n) \leq 0$  alors

$$u_{n+1} = |f(z_n) - i| |f(z_n) + i| = u_n |z_n - (1 + i)| |z_n - (1 - i)|$$

Selon le signe de la partie imaginaire de  $z_n$ , l'un au moins des deux modules  $|z_n - (1 + i)|$  et  $|z_n - (1 - i)|$  est supérieur à  $\sqrt{2}$  alors que l'autre est supérieur à 1.

Ainsi

$$u_{n+1} \geq \sqrt{2} u_n$$

Si  $\operatorname{Re}(z_n) > 0$ , on obtient le même résultat.

On en déduit que si  $u_0 \neq 0$  alors la suite  $(u_n)$  n'est pas bornée. Or la partie  $B$  est bornée donc  $u_0 = 0$  puis  $a = \pm i$ . Ainsi  $B \subset \{i, -i\}$ .

Sachant  $B \neq \emptyset$  et sachant que l'appartenance de  $i$  entraîne celle de  $-i$  et inversement, on peut conclure

$$B = \{i, -i\}$$

**Exercice 18 :** [énoncé]

Rappelons que si  $u$  est un complexe de module alors  $1/u = \bar{u}$ .

On a alors

$$(z - a)^2 = (z - a) \left( \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{a}} \right) = \frac{(z - a)(\bar{a} - \bar{z})}{\bar{a}\bar{z}} = -a \frac{|z - a|^2}{\bar{z}}$$

donc

$$\frac{b}{a} \left( \frac{z - a}{z - b} \right)^2 = \frac{|z - a|^2}{|z - b|^2} \in \mathbb{R}_+^*$$

**Exercice 19 :** [énoncé]

(a)  $M = I$  est solution.

Pour  $M \neq I$ ,  $I, M, M'$  sont alignés si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\overrightarrow{IM'} = \lambda \overrightarrow{IM} \text{ i.e. } \frac{iz - i}{z - i} \in \mathbb{R}.$$

Posons  $x = \operatorname{Re}(z)$  et  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

$$\operatorname{Im} \left( \frac{iz - i}{z - i} \right) = 0 \iff x(x - 1) + y(y - 1) = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Finalement le lieu des points  $M$  solutions est le cercle de centre  $\Omega \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  et de rayon  $1/\sqrt{2}$ .

(b) Le point  $M'$  est l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi/2$ .

Le lieu des points  $M'$  est donc le cercle de centre  $\Omega' \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  et de rayon  $1/\sqrt{2}$

**Exercice 20 :** [énoncé]

Soit  $z$  un complexe du cercle unité avec  $z \neq 1$ . Il existe  $\theta \in ]0; 2\pi[$  tel que  $z = e^{i\theta}$ .

On a alors

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - e^{i\theta}} = e^{-i\theta/2} \frac{i}{2 \sin \theta/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \cot \frac{\theta}{2}$$

Quand  $\theta$  parcourt  $]0; 2\pi[$  (ce qui revient à faire parcourir à  $z$  le cercle unité), l'expression  $\cot(\theta/2)$  prend toutes les valeurs de  $\mathbb{R}$ . L'image du cercle unité est la droite d'équation  $x = 1/2$ .

**Exercice 21 :** [énoncé]

Soit  $M(z)$  solution avec  $z = a + ib$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

On a  $2a = \sqrt{a^2 + b^2}$  donc  $a \geq 0$  et  $b = \pm\sqrt{3}a$ .

Ainsi  $M$  se situe sur les demi-droites d'origine  $O$  dirigée par les vecteurs  $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{vmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{vmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{vmatrix}$ .  
 Inversement : ok.

**Exercice 22 : [énoncé]**

En multipliant les trois complexes  $t, u, v$  par  $e^{i\theta}$ , on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer  $t \in \mathbb{R}_+$  auquel cas  $t = a$ .

En écrivant  $u = x + iy$  et  $v = x' + iy'$  avec  $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ , la condition  $t + u + v = 0$  donne

$$\begin{cases} x' = -(a + x) \\ y' = -y \end{cases}$$

et les deux conditions  $u\bar{u} = b^2$  et  $v\bar{v} = c^2$  équivalent alors au système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x + a)^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre  $O$  et de rayon  $b$  coupe le cercle de centre  $\Omega(-a, 0)$  et de rayon  $c$ . Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,

$$|b - c| \leq a \leq b + c$$

On peut alors conclure que le triplet  $(t, u, v)$  existe si, et seulement si, chacun des paramètres  $a, b, c$  est inférieur à la somme des deux autres.

**Exercice 23 : [énoncé]**

$|z|^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$  donc  $|z| = 2$ .

Posons  $\theta$  un argument de  $z$  qu'on peut choisir dans  $[0; \pi/2]$  car  $\text{Re}(z), \text{Im}(z) \geq 0$ .

On a  $\cos \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  donc

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{2}) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

avec  $2\theta \in [0; \pi]$  donc  $2\theta = \pi/4$  puis  $\theta = \pi/8$ .

**Exercice 24 : [énoncé]**

( $\Leftarrow$ ) ok

( $\Rightarrow$ ) Si  $|z + z'| = |z| + |z'|$  alors, en divisant par  $|z|$  :  $|1 + x| = 1 + |x|$  avec  $x = z'/z \in \mathbb{C}$ .

Écrivons  $x = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$|1 + x|^2 = (a + 1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a$$

et

$$(1 + |x|)^2 = (1 + \sqrt{a^2 + b^2})^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$|1 + x| = 1 + |x|$  donne alors  $a = \sqrt{a^2 + b^2}$  d'où  $b = 0$  et  $a \geq 0$ .

Par suite  $x \in \mathbb{R}_+$  et on conclut.

**Exercice 25 : [énoncé]**

On a

$$|z| + |z'| = \frac{1}{2} |(z - z') + (z + z')| + \frac{1}{2} |(z' - z) + (z' + z)| \leq |z + z'| + |z - z'|$$

Interprétation : Dans un parallélogramme la somme des longueurs de deux côtés est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.

Il y a égalité si, et seulement si,  $z - z' = 0$  (i.e.  $z = z'$ ) ou  $\frac{z+z'}{z-z'} \in \mathbb{R}_+$  et  $\frac{z+z'}{z'-z} \in \mathbb{R}_+$  ce qui se résume à  $z' = -z$ .

**Exercice 26 : [énoncé]**

Pour que la quantité soit définie il est nécessaire que  $z \neq 1/\bar{a}$ .

Si tel est le cas

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1 \iff |z - a|^2 \leq |1 - \bar{a}z|^2$$

Sachant  $|x + y|^2 = |x|^2 + 2\text{Re}(\bar{x}y) + |y|^2$ , on obtient

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1 \iff (|a|^2 - 1) (|z|^2 - 1) \geq 0$$

L'ensemble recherché est l'ensemble des complexes de module inférieur à 1.

**Exercice 27 : [énoncé]**

(a) En développant

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2$$

et la relation écrite est alors immédiate.

(b) On a

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \leq 4$$

donc parmi les quantités  $|z_1 + z_2|$  et  $|z_1 - z_2|$ , l'une au moins est de carré inférieur à 2.

**Exercice 28 : [énoncé]**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

Si  $z \in \mathbb{R}_-$  alors  $f(z) = 0$ .

Sinon, on peut écrire  $z = re^{i\theta}$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]-\pi; \pi[$  et alors

$$f(z) = r \frac{1 + e^{i\theta}}{2} = r \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$$

Puisque  $\cos(\theta/2) \geq 0$

$$|f(z)| = r \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg f(z) = \frac{\theta}{2}$$

donc

$$f(z) \in \{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} Z > 0\}$$

Inversement, soit  $Z \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re} Z > 0$ .

On peut écrire  $Z = Re^{i\alpha}$  avec  $R > 0$  et  $\alpha \in ]-\pi/2; \pi/2[$ . Pour

$$z = \frac{R}{\cos \alpha} e^{2i\alpha}$$

les calculs qui précèdent donnent

$$f(z) = \operatorname{Re}^{i\alpha} = Z$$

Finalement, les valeurs prises par  $f$  sont les complexes de parties réelles strictement positives ainsi que le complexe nul.

**Exercice 29 : [énoncé]**

$|z + 1|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1$  et  $(|z| + 1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$  donc

$$|z + 1| = |z| + 1 \iff \operatorname{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$$

**Exercice 30 : [énoncé]**

Notons  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Par factorisation d'exponentielle équilibrée

$$|\omega_k - 1| = 2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{z \in U_n} |z - 1| &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = 2 \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{k\pi}{n}} \right) \\ &= 4 \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - e^{i\pi/n}} \right) = 2 \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 2 \cot \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

**Exercice 31 : [énoncé]**

Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \omega_k = e^{2ik\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}$$

(a) Si  $n$  ne divise pas  $p$  alors, puisque  $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^n \omega^{kp} = \omega^p \frac{1 - \omega^{np}}{1 - \omega^p} = 0$$

Si  $n$  divise  $p$  alors

$$S_p = \sum_{k=1}^n \omega^{kp} = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

(b) Pour  $1 \leq k \leq n - 1$ , on a

$$\frac{1}{1 - \omega_k} = -e^{-ik\pi/n} \frac{1}{2i \sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{i}{2} \cot \frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot \frac{k\pi}{n} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=1}^{n-1} \cot \left( \pi - \frac{\ell\pi}{n} \right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} -\cot \left( \frac{\ell\pi}{n} \right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot \frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}$$

On peut aussi lier le calcul au précédent en écrivant

$$\frac{1}{1-\omega_i} = \sum_{p=0}^{n-1} \omega_i^p + \frac{\omega_i^n}{1-\omega_i}$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que  $T$  est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots$$

### Exercice 32 : [énoncé]

On a

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^n k\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k - n\omega^n = -n$$

donc

$$S = \frac{n}{\omega-1}$$

### Exercice 33 : [énoncé]

(a)

$$j(j+1) = j^2 + j = -1$$

(b)

$$\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j} = -1$$

(c)

$$\frac{j+1}{j-1} = \frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}} = \frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1} = \frac{-1-2j}{3}$$

### Exercice 34 : [énoncé]

Notons  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  les racines  $n$ ème de l'unité.

Si  $z$  est solution alors nécessairement  $z \neq 1$  et  $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$  donc il existe  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$$

ce qui donne

$$(\omega_k - 1)z = \omega_k + 1$$

Si  $k=0$  alors ce la donne  $0=2$  donc nécessairement  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $\omega_k \neq 1$ .

Par suite

$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n}}{2i \sin \frac{k\pi}{n}} = -i \cot \frac{k\pi}{n}$$

Inversement, en remontant le calcul : ok

Finalement

$$S = \left\{ -i \cot \frac{k\pi}{n} \mid k \in \{1, \dots, n-1\} \right\}$$

Puisque la fonction cot est injective sur  $]0; \pi[$ , il y a exactement  $n-1$  solutions.

### Exercice 35 : [énoncé]

On a

$$1 + A + B = 0, AB = 2 \text{ et } \text{Im}(A) > 0$$

donc

$$A = \bar{B} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

### Exercice 36 : [énoncé]

(a) Puisque les racines de l'équation  $z^n - 1$  sont  $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ , on a

$$z^n - 1 = (z-1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k)$$

Or on a aussi  $z^n - 1 = (z-1)(1+z+\dots+z^{n-1})$  d'où l'égalité proposée pour  $z \neq 1$ .

(b) Les fonctions  $x \mapsto \prod_{k=1}^{n-1} (x - \omega^k)$  et  $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}$  et coïncident sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , elles coïncident donc aussi en 1 par passage à la limite.

(c) Pour  $z = 1$ , l'égalité du a) donne  $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$ . Or par factorisation de l'exponentielle équilibrée,

$$1 - \omega^k = -e^{\frac{ik\pi}{n}} 2i \sin \frac{k\pi}{n}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k} = i^{n-1}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$$

puis la relation proposée.

**Exercice 37 : [énoncé]**

Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité, en considérant la partie réelle, on obtient

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0$$

Sachant  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ , on obtient que  $\cos(2\pi/5)$  est solution positive de l'équation

$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$

et donc

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Or  $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$  donc

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

puis

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

et enfin la formule proposée puisque  $\sin(\pi/5) \geq 0$ .

**Exercice 38 : [énoncé]**

$x = 1$  est solution de l'équation si, et seulement si,  $a^2 - 2a - 3 = 0$  ce qui donne  $a = -1$  ou  $a = 3$ .

Lorsque  $a = -1$ , les solutions de l'équation sont  $1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ .

Lorsque  $a = 3$ , les solutions de l'équation sont  $1, \frac{-3+i3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i3\sqrt{3}}{2}$ .

**Exercice 39 : [énoncé]**

(a)  $\mathcal{S} = \{1, -1 + 2i\}$ ,

(b)  $\mathcal{S} = \{-1 + i, -3 + 2i, 1 - i, 3 - 2i\}$ .

**Exercice 40 : [énoncé]**

(a)  $\pm(3 - 2i)$

(b)  $a = -2i, b = -1 + 3i$  et  $c = 2 + i$

(c)  $|c - b| = |c - a| = \sqrt{13}$  et  $|b - a| = \sqrt{26}$ . Le triangle est rectangle isocèle.

**Exercice 41 : [énoncé]**

Il s'agit d'un système somme produit, on obtient ses solutions en résolvant l'équation

$$z^2 - (1 + i)z + (2 - i) = 0$$

On obtient l'ensemble solution

$$\mathcal{S} = \{(1 + 2i, -i), (-i, 1 + 2i)\}$$

**Exercice 42 : [énoncé]**

Posons  $\rho = |Z|$  et  $\theta = \arg Z \in [2\pi]$ .

$$\begin{aligned} e^z = Z &\iff e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = |Z| e^{i\theta} \\ &\iff e^{\operatorname{Re} z} = |Z| \text{ et } e^{i \operatorname{Im} z} = e^{i\theta} \\ &\iff z = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Exercice 43 : [énoncé]**

En factorisant  $e^{i\theta/2}$  au numérateur et au dénominateur

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{i \sin \theta/2}{\cos \theta/2} = i \tan \frac{\theta}{2}$$

**Exercice 44 : [énoncé]**

On peut factoriser

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}) = 2 \cos \frac{\theta - \theta'}{2} e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de  $\cos \frac{\theta - \theta'}{2}$ .