

Exercice 1 [03880] [Correction]

Soient a, b, c des réels strictement positifs.

À quelle condition existe-t-il des complexes t, u, v de somme nulle vérifiant

$$t\bar{t} = a^2, u\bar{u} = b^2 \text{ et } v\bar{v} = c^2$$

Exercice 2 [02781] [Correction]

Étudier la convergence de la suite $(\lfloor a^n \rfloor^{1/n})$, où $a > 0$.

Exercice 3 [02783] [Correction]

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout $n > 0$,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$$

- Ici $x_n = a$ pour tout n , où $a > 0$. Étudier la convergence de (y_n) .
- Même question dans le cas où $x_n = ab^{2^n}$ pour tout n , avec $b > 0$.
- Montrer que (y_n) converge si, et seulement si, la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Exercice 4 [02645] [Correction]

Calculer

$$\sum_{k=1}^4 \cos^2 \frac{k\pi}{9}$$

Exercice 5 [00501] [Correction]

Soit f une fonction croissante de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$.

- Montrer que s'il existe $x \in [0; 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^k(x) = x$ alors x est un point fixe pour f .
- Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6 [02820] [Correction]

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a, b, c trois points distincts de I .

Montrer

$$\exists d \in I, \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d)$$

Exercice 7 [02785] [Correction]

Étudier les limites de $(\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n}))^{1/n}$ et de $(\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n^2}))^{1/n}$.

Exercice 8 [02786] [Correction]

Calculer les limites de

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 [02787] [Correction]

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.

Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

Exercice 10 [02816] [Correction]

Énoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégrale.

Exercice 11 [02817] [Correction]

- Montrer, pour tout $x \in]0; \pi/2[$, l'existence de $\theta_x \in]0; 1[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos(x\theta_x)$$

- Étudier la limite de θ_x quand x tend vers 0 par valeur supérieure.

Exercice 12 [03198] [Correction]

Déterminer un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$$

Exercice 13 [02788] [Correction]

Donner un développement asymptotique de $(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!)_{n \in \mathbb{N}}$ à la précision $o(n^{-3})$.

Exercice 14 [02656] [Correction]Soient des entiers $a > 1$ et $n > 0$.Montrer que si $a^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.**Exercice 15** [02674] [Correction]Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.**Exercice 16** [02669] [Correction]

- (a) Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur \mathbb{R} , montrer que P' est scindé ou constant sur \mathbb{R} .
- (b) Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer que $X^{10} + aX^9 + bX^8 + cX^7 + X + 1$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 17 [02668] [Correction]Déterminer les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$$

Exercice 18 [02670] [Correction]Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\cos \theta) = \cos n\theta$ pour tout θ réel. On le note T_n .

- (a) Lier T_{n-1}, T_n et T_{n+1} .
- (b) Donner une équation différentielle vérifiée par T_n .
- (c) Calculer $T_n^{(k)}(1)$ et $T_n^{(k)}(-1)$.

Exercice 19 [02673] [Correction]On cherche les polynômes P non nuls tels que

$$P(X^2) = P(X - 1)P(X)$$

- (a) Montrer que toute racine d'un tel P est de module 1.
- (b) Déterminer les polynômes P .

Exercice 20 [02671] [Correction]Quels sont les couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$?**Exercice 21** [02375] [Correction]Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

Exercice 22 [02672] [Correction]Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X - 1)P(X)$$

Exercice 23 [02663] [Correction]

- (a) Montrer que $a = \cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans \mathbb{Z} .
- (b) Justifier que le nombre a est irrationnel.

Exercice 24 [02676] [Correction]Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$$

Exercice 25 [02665] [Correction]Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X + 1) - P_n(X) = X^n$.**Exercice 26** [02682] [Correction]Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie. Montrer

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Exercice 27 [02685] [Correction]Soient a_0, a_1, \dots, a_n des réels non nuls deux à deux distincts.On note F_j l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R} définie par

$$F_j(P) = \int_0^{a_j} P$$

Montrer que (F_0, F_1, \dots, F_n) est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Exercice 28 [02242] [Correction]

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p avec $n > p$.

On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant

$$u \circ v = \text{Id}_F$$

- Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.
- Déterminer son rang, son image et son noyau.

Exercice 29 [02684] [Correction]

Soit E et F des espaces vectoriels sur \mathbb{K} , de dimensions finies ou non. Montrer que $(E \times F)^*$ et $E^* \times F^*$ sont isomorphes.

Exercice 30 [02680] [Correction]

Soit E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une famille $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \leq j \leq p}$ de sous-espaces vectoriels de F .

- Montrer

$$f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n f(E_i)$$

- Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe alors la somme des $f(E_i)$ est directe.
- Montrer

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right) \supset \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$$

Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 31 [02689] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes distincts, $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$$

Montrer que $(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $C(A)$.

Exercice 32 [02679] [Correction]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$. Calculer $f \circ g$.

Exercice 33 [02687] [Correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est nilpotente et commute avec A . Montrer que A et $A + B$ sont simultanément inversibles.

Exercice 34 [02688] [Correction]

Soit ω une racine primitive n -ième de 1. On pose

$$F_\omega(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$$

pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Montrer que F_ω est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et exprimer son inverse.

Exercice 35 [03976] [Correction]

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A + A^{-1} = I_n$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k + A^{-k}$.

Exercice 36 [02651] [Correction]

- Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g \in G} \text{tr } g = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.
- Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n stable par les éléments de G . Montrer qu'il existe un supplémentaire de V dans \mathbb{R}^n stable par tous les éléments de G .

Exercice 37 [02686] [Correction]

- Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA)$$

montrer que f est proportionnelle à la trace.

(b) Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$g(AB) = g(BA)$$

pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

Exercice 38 [02693] [Correction]

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$

où x, a_1, \dots, a_n réels.

Exercice 39 [02694] [Correction]

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 40 [02659] [Correction]

Soient des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux.

Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n$$

Exercice 41 [02695] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (avec $n \geq 2$) vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

Montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

Exercice 42 [03288] [Correction]

Soient A, B, C, D des matrices carrées d'ordre n , réelles et commutant deux à deux. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $AD - BC$ l'est.

Exercice 43 [02734] [Correction]

Calculer le minimum de

$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$$

pour a, b, c parcourant \mathbb{R} .

Exercice 44 [02736] [Correction]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Exercice 45 [03764] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$$

Exercice 46 [02743] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice réelle orthogonale. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$

Exercice 47 [02745] [Correction]

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

(a) Montrer

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}$$

(b) Montrer

$$M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S = 1$$

- (c) Montrer que M est dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k \in [0; 4/27]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

Exercice 48 [03883] [\[Correction\]](#)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 < 1$$

- (a) Montrer

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^t X A X > 0$$

- (b) En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 49 [03926] [\[Correction\]](#)

Soient A et B dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A + 2B)/3$ appartienne à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire de A et B ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

En multipliant les trois complexes t, u, v par $e^{i\theta}$, on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $t \in \mathbb{R}_+$ auquel cas $t = a$.

En écrivant $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, la condition $t + u + v = 0$ donne

$$\begin{cases} x' = -(a + x) \\ y' = -y \end{cases}$$

et les deux conditions $u\bar{u} = b^2$ et $v\bar{v} = c^2$ équivalent alors au système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x + a)^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre O et de rayon b coupe le cercle de centre $\Omega(-a, 0)$ et de rayon c . Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,

$$|b - c| \leq a \leq b + c$$

On peut alors conclure que le triplet (t, u, v) existe si, et seulement si, chacun des paramètres a, b, c est inférieur à la somme des deux autres.

Exercice 2 : [énoncé]

Si $a \in]0; 1[$, la suite est constante égale à 0.

Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1.

Si $a > 1$ alors $a^n - 1 < [a^n] \leq a^n$ donne $(a^n - 1)^{1/n} < [a^n]^{1/n} \leq a$ et donc, par encadrement, la suite converge vers a .

Exercice 3 : [énoncé]

Notons que la suite (y_n) est croissante, elle est donc convergente si, et seulement si, elle est majorée.

(a) Ici $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$. Soit ℓ la racine positive de l'équation $\ell^2 - \ell - a = 0$ i.e.

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

On remarque que $y_1 = \sqrt{a} \leq \ell$ et on montre par récurrence $y_n \leq \ell$. La suite (y_n) est croissante et majorée donc convergente.

(b) On observe que la nouvelle suite (y_n) est désormais égale à b fois la précédente, elle est donc convergente.

(c) Si (y_n) converge vers ℓ alors $x_n^{2^{-n}} \leq y_n \leq \ell$ donc $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée. Si $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée par une certaine M alors $x_n \leq M^{2^n}$, la suite (y_n) définie par (x_n) est alors inférieure à celle obtenue par (M^{2^n}) , cette dernière étant convergente, la suite (y_n) converge.

Exercice 4 : [énoncé]

En linéarisant et en faisant quelques transformations angulaires de simplification

$$\sum_{k=1}^4 \cos^2 \frac{k\pi}{9} = \frac{7}{4}$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Si $f(x) > x$ alors par croissance de f ,

$$f^k(x) \geq f^{k-1}(x) \geq \dots \geq f(x) > x$$

ce qui est absurde. Une étude analogue contredit $f(x) < x$.

(b) On a $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. Par dichotomie, on peut construire deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant

$$f(a_n) \geq a_n \text{ et } f(b_n) \leq b_n$$

On initie les suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Une fois les termes a_n et b_n déterminés, on introduit $m = (a_n + b_n)/2$.

Si $f(m) \geq m$ on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.

Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.

Les suites (a_n) et (b_n) ainsi déterminées sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune c . Puisque $a_n \leq c \leq b_n$, on a par croissance

$$f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n)$$

et donc

$$a_n \leq f(c) \leq b_n$$

Or (a_n) et (b_n) convergent vers c donc par encadrement

$$f(c) = c$$

On peut aussi décrire un point fixe de f en considérant

$$c = \sup \{x \in [0; 1], f(x) \geq x\}$$

Les deux questions de cet oral ne semblent pas être liées.

Exercice 6 : [\[énoncé\]](#)

Considérons

$$g: x \mapsto (x - b)f(a) + (a - x)f(b) + (b - a)f(x) - \frac{1}{2}(a - b)(b - x)(x - a)K$$

où la constante K est choisie de sorte que $g(c) = 0$ (ce qui est possible).

La fonction g s'annule en a , en b et en c donc par le théorème de Rolle, il existe $d \in I$ tel que $g''(d) = 0$ ce qui résout le problème posé.

Exercice 7 : [\[énoncé\]](#)

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \rightarrow \int_0^1 \ln(1 + t) dt = 2 \ln 2 - 1$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n} \rightarrow \frac{4}{e}$$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ donc

$$1 \leq \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)^{1/n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)^{1/n} \rightarrow 1$$

Exercice 8 : [\[énoncé\]](#)

Pour $x \geq 0$, $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ donc $|\sin x - x| \leq Mx^3$ avec $M = 1/6$.

On a alors

$$\left| \sin \frac{k}{n^2} - \frac{k}{n^2} \right| \leq M \frac{k^3}{n^6} \leq \frac{M}{n^3}$$

donc

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) - \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{n^2} \rightarrow 0$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \frac{k}{n^2} \rightarrow \int_0^1 t \sin t dt$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \rightarrow \sin 1 - \cos 1$$

Pour $x \geq 0$, $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ donne aussi $|\sin^2 x - x^2| \leq M'x^4$ avec $M' = 1/3$.

Ainsi

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq M' \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+n)^2} \leq \frac{M'}{n} \rightarrow 0$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}} \rightarrow \ln 2$$

Exercice 9 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx = \cos \frac{(n+1)x}{2} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

donc

$$x_n = \frac{\pi}{n+1}$$

Par suite

$$f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k}{n+1}}$$

Or la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)/t$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0; 1]$ donc par somme de Riemann

$$f_n(x_n) \rightarrow \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t} dt$$

Exercice 10 : [\[énoncé\]](#)

C'est du cours!

Exercice 11 : [énoncé]

Par l'égalité de Taylor-Lagrange (hors-programme) :

$$\forall x \in]0; \pi/2[, \exists \xi \in]0; x[, \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 \cos(\xi)$$

Le réel $\theta_x = \xi/x$ convient alors

À défaut de connaître l'égalité de Taylor-Lagrange, par l'égalité de Taylor avec reste-intégrale

$$\sin x = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt$$

Or pour $t \in [0; x]$, on a

$$\cos x \leq \cos t \leq 1$$

avec inégalité stricte pour $t \in]0; x[$ donc

$$\frac{x^3}{6} \cos x < \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt < \frac{x^3}{6}$$

Ainsi

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt = \lambda \frac{x^3}{6} \text{ avec } \cos x < \lambda < 1 = \cos 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut écrire

$$\lambda = \cos(x\theta_x) \text{ avec } \theta_x \in]0; 1[$$

Quand $x \rightarrow 0$, $x\theta_x \rightarrow 0$ donc

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\theta_x^2 + o(x^2)$$

puis

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5\theta_x^2 + o(x^5)$$

or

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

donc $\theta_x^2 \rightarrow 1/10$ puis

$$\theta_x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Exercice 12 : [énoncé]

On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+2k/n)^3} = \frac{1}{n^2} S_n$$

avec

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+2k/n)^3}$$

Par les sommes de Riemann, on a

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{(1+2t)^3} = \left[-\frac{1}{4(1+2t)^2} \right]_0^1 = \frac{2}{9}$$

On en déduit

$$u_n \sim \frac{2}{9n^2}$$

Exercice 13 : [énoncé]

On a

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!} \leq (n-4) \frac{(n-5)!}{n!} = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice 14 : [énoncé]

On peut écrire

$$n = 2^k(2p+1)$$

On a alors

$$a^n + 1 = b^{2p+1} - (-1)^{2p+1} = (b - (-1)) \sum_{k=0}^{2p} b^k (-1)^{2p-k} = (b+1)c$$

avec $b = a^{2^k}$.

On en déduit que $b+1 \mid a^n + 1$, or $a^n + 1$ est supposé premier et $b+1 > 1$ donc $b+1 = a^n + 1$ puis $n = 2^k$.

Exercice 15 : [énoncé]

Parmi les polynômes constants, seuls le polynôme nul est solution.

Si $\deg P \geq 1$ alors, pour vérifier l'équation, il est nécessaire que $\deg P = 2$. On peut alors écrire P sous la forme $aX^2 + bX + c$. Parmi, les polynômes de cette forme, ceux solutions sont ceux obtenus pour $b = 0$ et $c = -a$. Conclusion, les polynômes solutions sont les $a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 : [énoncé]

- (a) Si P est degré 1 alors P' est constant. Si P est de degré $n \geq 2$, par application du théorème de Rolle, il figure une racine de P' entre deux racines consécutives de P . De surcroît, si a est racine de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de P , a est aussi racine de multiplicité $\alpha - 1$ de P' . Par suite, P' en admet $n - 1$ racines comptées avec multiplicité et est donc scindé.
- (b) 0 est racine multiple du polynôme dérivé à l'ordre 2. Si le polynôme était scindé, l'étude qui précède permet d'observer que 0 est racine du polynôme. Ce n'est pas le cas.

Exercice 17 : [énoncé]

Soit P solution. $X \mid (X + 4)P(X)$ donc $X \mid P$ puis $(X + 1) \mid P(X + 1)$ donc

$(X + 1) \mid (X + 4)P(X)$ puis $X + 1 \mid P$ etc...

Ainsi on obtient que $P(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3)Q(X)$ avec

$Q(X + 1) = Q(X)$ donc Q constant.

La réciproque est immédiate.

Exercice 18 : [énoncé]

On a

$$\cos n\theta = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k} \theta \sin^k \theta\right)$$

donc

$$\cos n\theta = \sum_{\ell=0}^{E(n/2)} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \cos^{n-2\ell} \theta (1 - \cos^2 \theta)^\ell$$

est un polynôme en $\cos \theta$. Cela assure l'existence de T_n , l'unicité provenant de ce que deux polynômes coïncidant en un nombre infini de points sont nécessairement égaux.

(a)

$$\cos(n + 1)\theta + \cos(n - 1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta$$

donne

$$T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1} = 0$$

(b) On a

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

donc en dérivant

$$-\sin \theta T_n'(\cos \theta) = -n \sin n\theta$$

et

$$\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - \cos \theta T_n'(\cos \theta) = -n^2 \cos n\theta$$

On en déduit par coïncidence de polynômes sur $[-1; 1]$ que

$$(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0$$

(c) En dérivant cette relation à l'ordre k :

$$(1 - X^2)T_n^{(k+2)} - 2kXT_n^{(k+1)} - k(k-1)T_n^{(k)} - XT_n^{(k+1)} - kT_n^{(k)} + n^2T_n^{(k)} = 0 \quad (1)$$

En évaluant (1) en 1 :

$$(2k + 1)T_n^{(k+1)}(1) = (n^2 - k^2)T_n^{(k)}(1)$$

Comme $T_n^{(0)}(1) = 1$, on obtient

$$T_n^{(k)}(1) = \begin{cases} \frac{(n!)^2 2^k k!}{(n-k)!(n+k)!(2k+1)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En évaluant (1) en -1 :

$$(2k + 1)T_n^{(k+1)}(-1) = -(n^2 - k^2)T_n^{(k)}(-1)$$

Comme $T_n^{(0)}(-1) = (-1)^n$, on obtient

$$T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n-k} T_n^{(k)}(1)$$

Exercice 19 : [énoncé]

- (a) Si a est une racine de P non nulle alors a^2, a^4, \dots sont racines de P . Or $P \neq 0$ donc P n'admet qu'un nombre fini de racines. La série précédente est donc redondante et par suite a est une racine de l'unité et donc $|a| = 1$. Si $a = 0$ est racine de P alors $1 = (0 + 1)^2$ aussi puis $4 = (1 + 1)^2$ l'est encore, ... et finalement P admet une infinité de racines ce qui est exclu. Finalement les racines de P sont toutes de module 1.

(b) Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P . $a + 1$ est racine de $P(X - 1)$ donc $(a + 1)^2$ est aussi racine de P . Il s'ensuit que $|a| = |a + 1| = 1$. En résolvant cette double équation on obtient $a = j$ ou j^2 et donc P est de la forme

$$P(X) = \lambda(X - j)^\alpha(X - j^2)^\beta$$

Le nombre j est racine de multiplicité α de P donc j est racine de multiplicité au moins α de

$$P(X^2) = (X^2 - j)^\alpha(X^2 - j^2)^\beta$$

et par suite $\beta \geq \alpha$. Un raisonnement symétrique permet de conclure $\beta = \alpha$ et le polynôme P est de la forme

$$\lambda(X^2 + X + 1)^\alpha$$

Un tel P est solution du problème posé si, et seulement si,

$$\lambda^2(X^4 + X^2 + 1)^\alpha = \lambda((X - 1)^2 + (X - 1) + 1)^\alpha(X^2 + X + 1)^\alpha$$

égalité qui est vérifiée si, et seulement si, $\lambda = 1$.

Finalement les solutions du problème posé sont les polynômes $P = (X^2 + X + 1)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 : [énoncé]

Soit (P, Q) un couple solution.

Si le polynôme P est constant alors nécessairement $Q = 0$ et $P = \pm 1$. Vérification immédiate.

Sinon, posons $n = \deg P \in \mathbb{N}^*$. La relation $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$ impose que P et Q sont premiers entre eux et en dérivant on obtient

$PP' - XQ^2 + (1 - X^2)QQ' = 0$. Par suite $Q \mid PP'$ puis $Q \mid P'$. Par des considérations de degré et de coefficient dominant on peut affirmer $P' = \pm nQ$.

Quitte à considérer $-Q$, supposons $P' = nQ$ et la relation

$PP' - XQ^2 + (1 - X^2)QQ' = 0$ donne $(1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0$.

Résolvons l'équation différentielle $(1 - t^2)y'' - ty' + n^2y = 0$ sur $[-1; 1]$.

Par le changement de variable $t = \cos \theta$, on obtient pour solution générale

$y(t) = \lambda \cos(n \arccos t) + \mu \sin(n \arccos t)$.

La fonction $t \mapsto \cos(n \arccos t)$ est polynomiale (cf. polynôme de Tchebychev), cela définit le polynôme T_n .

La fonction $t \mapsto \sin(n \arccos t)$ ne l'est pas car de dérivée $\frac{-n}{\sqrt{1-t^2}} \cos(n \arccos t)$ non polynomiale.

Par suite $P = \lambda T_n$ et $Q = \pm \frac{1}{n} T_n'$.

La relation $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$ évaluée en 1 impose $\lambda^2 = 1$ et finalement $(P, Q) = (\pm T_n, \pm \frac{1}{n} T_n')$.

Vérification : pour le couple $(P, Q) = (\pm T_n, \pm \frac{1}{n} T_n')$, le polynôme $P^2 + (1 - X^2)Q^2$ est constant car de polynôme dérivé nul et puisqu'il prend la valeur 1 en 1, on peut affirmer $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$.

Exercice 21 : [énoncé]

Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.

Si a est racine de P alors a^2 l'est aussi puis a^4, a^8, \dots .

Or les racines de P sont en nombre fini donc les éléments a^{2^n} ($n \in \mathbb{N}$) sont redondants. On en déduit que $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.

De plus, si a est racine de P alors $(a - 1)$ est aussi racine de $P(X + 1)$ donc $(a - 1)^2$ est racine de P . On en déduit que $a - 1 = 0$ ou $a - 1$ est racine de l'unité.

Si $a \neq 0, 1$ alors $|a| = |a - 1| = 1$ d'où l'on tire $a = -j$ ou $-j^2$.

Au final, les racines possibles de P sont $0, 1, -j$ et $-j^2$.

Le polynôme P s'écrit donc

$$P(X) = \lambda X^\alpha(X - 1)^\beta(X + j)^\gamma(X + j^2)^\delta$$

avec $\lambda \neq 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.

En injectant cette expression dans l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

on obtient

$$\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta \text{ et } \gamma = \delta = 0$$

On conclut

$$P(X) = [X(X - 1)]^\alpha$$

Exercice 22 : [énoncé]

Supposons P solution.

Le coefficient dominant λ de P vérifie $\lambda = \lambda^2$ et donc est égal à 1.

Si a est racine de P alors a^2 et $(a + 1)^2$ le sont aussi.

Si $a \neq 0$ est une racine de P alors a^2, a^4, \dots sont racines de P . Or $P \neq 0$ et donc P n'admet qu'un nombre fini de racines. La suite précédente est donc redondante et par conséquent a est une racine de l'unité. En particulier $|a| = 1$.

Si $a = 0$ est racine de P alors $1 = (0 + 1)^2$ aussi puis $4 = (1 + 1)^2$ l'est encore, ... et finalement P admet une infinité de racines ce qui est exclu.

Finalement les racines de P sont toutes de module 1.

Or si a est racine de P , $(a + 1)^2$ l'étant encore et donc

$$|a| = |a + 1| = 1$$

Les seuls complexes vérifiant cette identité sont j et j^2 (ce sont les points intersection du cercle unité et du cercle de centre -1 et de rayon 1 du plan complexe). On en déduit

$$P = (X^2 + X + 1)^n$$

car P est un polynôme réel et que donc ses racines complexes conjuguées sont d'égaux multiplicités.

Inversement, on vérifie par le calcul qu'un tel polynôme est bien solution.

Exercice 23 : [\[énoncé\]](#)

(a) On a

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

donc

$$4a^3 - 3a = \cos(\pi/3) = 1/2$$

Ainsi a est racine du polynôme $8X^3 - 6X - 1$.

(b) Soit x une racine rationnelle de ce polynôme. On peut écrire $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. On a alors

$$8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$$

On en déduit $p \mid 8p^3 - 6pq^2 = q^3$. Or p et q sont premiers entre eux et donc par le théorème de Gauss $p = \pm 1$. De plus $q^2 \mid 6pq^2 + q^3 = 8p^3$ et, par un argument analogue au précédent, $q^2 \mid 8$. Ainsi $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$.

Or $1, -1, 1/2$ et $-1/2$ ne sont pas les valeurs de $\cos(\pi/9)$. On peut donc conclure que a est irrationnel.

Exercice 24 : [\[énoncé\]](#)

Les pôles de cette fraction rationnelles sont simples et sont les racines n -ième de l'unité $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$. Sachant que la fraction rationnelle est de degré strictement négatif, sa partie entière est nulle et sa décomposition en éléments simples cherchée s'écrit

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega_k}$$

La partie polaire

$$\frac{\lambda}{X - a}$$

d'un pôle simple a d'une fraction rationnelle P/Q s'obtient par la relation

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

En effet, si $Q(X) = (X - a)R(X)$ on a $Q'(a) = R(a)$

Ici

$$\alpha_k = \left(\frac{X^{n-1}}{(X^n - 1)'} \right) (\omega_k) = \frac{1}{n}$$

et donc

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}$$

Exercice 25 : [\[énoncé\]](#)

Considérons l'application $\varphi: \mathbb{R}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X + 1) - P(X)$. L'application φ est bien définie, linéaire et de noyau $\mathbb{R}_0[X]$. Par le théorème du rang elle est donc surjective et les solutions de l'équation $\varphi(P) = X^n$ se déduisent les unes des autres par l'ajout d'un élément de $\mathbb{R}_0[X]$ c'est-à-dire d'une constante. Ainsi il existe une unique solution vérifiant $P(0) = 0$.

Exercice 26 : [\[énoncé\]](#)

Facilement $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ donc

$$\text{rg}(f + g) \leq \dim(\text{Im } f + \text{Im } g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Puisque $f = f + g + (-g)$,

$$\text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f + g) + \text{rg}(g)$$

Aussi $\text{rg}(g) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg}(f)$ donc

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g)$$

Exercice 27 : [\[énoncé\]](#)

Il est clair que les application F_j sont éléments de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ espace de dimension $n + 1$. Pour conclure, il suffit d'observer la liberté de la famille (F_0, \dots, F_n) .

Supposons $\lambda_0 F_0 + \dots + \lambda_n F_n = 0$.

En appliquant cette égalité aux polynômes $1, 2X, \dots, (n+1)X^n$ on obtient les équations formant le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \\ \lambda_0 a_0^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_0 a_0^{n+1} + \dots + \lambda_n a_n^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Par un déterminant de Vandermonde, ce système est de Cramer ce qui entraîne

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$$

La famille est alors libre et constituée du bon nombre de vecteurs pour former une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Exercice 28 : [énoncé]

- (a) $(v \circ u)^2 = v \circ \text{Id}_F \circ u = v \circ u$ donc $v \circ u$ est un projecteur.
- (b) Le rang d'un projecteur est égal à sa trace donc

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{tr}(v \circ u) = \text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(\text{Id}_F) = p$$

On a

$$\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v \text{ et } \dim \text{Im}(v \circ u) = \text{rg}(v \circ u) = p \geq \text{rg}(v) = \dim \text{Im } v$$

On en déduit

$$\text{Im}(v \circ u) = \text{Im } v$$

On a

$$\ker u \subset \ker(v \circ u) \text{ et } \dim \ker u = n - \text{rg } u \geq n - p = n - \text{rg}(v \circ u) = \dim \ker(v \circ u)$$

donc

$$\ker(v \circ u) = \ker u$$

Exercice 29 : [énoncé]

Pour $f \in E^*$ et $g \in F^*$, posons $f \otimes g$ l'application définie sur $E \times F$ par $(f \otimes g)(x, y) = f(x) + g(y)$. Il est facile d'observer $f \otimes g \in (E \times F)^*$. Considérons $\varphi: E^* \times F^* \rightarrow (E \times F)^*$ définie par $\varphi(f, g) = f \otimes g$.

L'application φ est linéaire.

Si $\varphi(f, g) = 0$ alors pour tout $(x, y) \in E \times F$, $f(x) + g(y) = 0$.

Pour $y = 0$, on peut affirmer $f = 0$ et pour $x = 0$, on affirme $g = 0$. Ainsi

$(f, g) = (0, 0)$ et donc φ est injective.

Soit $h \in (E \times F)^*$. Posons $f: x \mapsto h(x, 0)$, $g: y \mapsto h(0, y)$. On vérifie aisément $f \in E^*$, $g \in F^*$ et $\varphi(f, g) = h$ car $h(x, y) = h(x, 0) + h(0, y)$.

Exercice 30 : [énoncé]

- (a) Si $y \in f(\sum_{i=1}^n E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1 + \dots + x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On alors $y = f(x_1) + \dots + f(x_n)$ avec $f(x_i) \in f(E_i)$ et ainsi $f(\sum_{i=1}^n E_i) \subset \sum_{i=1}^n f(E_i)$.
Si $y \in \sum_{i=1}^n f(E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1) + \dots + f(x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On a alors $y = f(x)$ avec $x = x_1 + \dots + x_n \in \sum_{i=1}^n E_i$ donc $f(\sum_{i=1}^n E_i) \supset \sum_{i=1}^n f(E_i)$.
- (b) Si $f(x_1) + \dots + f(x_n) = 0$ avec $x_i \in E_i$ alors $f(x_1 + \dots + x_n) = 0$ donc $x_1 + \dots + x_n = 0$ car f injective puis $x_1 = \dots = x_n = 0$ car les E_i sont en somme directe et enfin $f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$. Ainsi les $f(E_i)$ sont en somme directe.
- (c) Soit $x \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. On peut écrire $x = x_1 + \dots + x_p$ avec $f(x_j) \in F_j$ donc $f(x) = f(x_1) + \dots + f(x_p) \in \sum_{j=1}^p F_j$. Ainsi $\sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j) \subset f^{-1}(\sum_{j=1}^p F_j)$.
On obtient une inclusion stricte en prenant par exemple pour f une projection sur une droite D et en prenant F_1, F_2 deux droites distinctes de D et vérifiant $D \subset F_1 + F_2$.
 $f = 0$ ou $f = \text{Id}$ sont des conditions suffisantes faciles...
Plus finement, supposons chaque F_j inclus dans $\text{Im } f$ (et $p \geq 1$)
Pour $x \in f^{-1}(\sum_{j=1}^p F_j)$, on peut écrire $f(x) = y_1 + \dots + y_p$ avec $y_j \in F_j$. Or $F_j \subset \text{Im } f$ donc il existe $x_j \in E$ vérifiant $f(x_j) = y_j$. Evidemment $x_j \in f^{-1}(F_j)$. Considérons alors $x'_1 = x - (x_2 + \dots + x_p)$, on a $f(x'_1) = y_1$ donc $x'_1 \in f^{-1}(F_1)$ et $x = x'_1 + x_2 + \dots + x_p \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. Ainsi $f^{-1}(\sum_{j=1}^p F_j) \subset \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$ puis l'égalité.

Exercice 31 : [énoncé]

En étudiant l'égalité $AM = MA$, on justifie $C(A) = D_n(\mathbb{C})$. $C(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension n . De plus il contient évidemment les éléments A^k pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (et, plus généralement, tout polynôme en A).

Supposons

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0$$

Le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ est annulateur de A , donc les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui sont valeurs propres de A sont aussi racines de P qui possède alors plus de racines que son degré. On peut alors affirmer $P = 0$ puis

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0.$$

La famille $(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une famille libre à n éléments de $C(A)$, c'en est donc une base

Exercice 32 : [énoncé]

Si $f = 0$ alors $f \circ g = 0$.

Sinon il existe une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de g commutant avec f est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et puisque $g^2 = 0$, $a = 0$.

Par suite la matrice de $f \circ g$ est nulle.

Exercice 33 : [énoncé]

Supposons A inversible. Puisque A et B commutent, A^{-1} et B aussi. Comme B est nilpotente, $-A^{-1}B$ l'est aussi. Or il est classique d'observer que si N est nilpotente, $I - N$ est inversible d'inverse $I + N + \dots + N^{p-1}$ avec p l'ordre de nilpotence de N . Ainsi $I + A^{-1}B$ est inversible et $A + B = A(I + A^{-1}B)$ aussi. Supposons $A + B$ inversible, puisque $-B$ est nilpotente et commute avec $A + B$, $A = A + B - B$ est inversible.

Exercice 34 : [énoncé]

F_ω est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Sa matrice dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{ij}$. On remarque que $\bar{A}A = I_n$ car $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j-i)k} = \delta_{i,j}$. Par suite F_ω est un automorphisme et F_ω^{-1} étant représenté par \bar{A} , $F_\omega^{-1}(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k})X^k$.

Exercice 35 : [énoncé]

Posons $B_k = A^k + A^{-k}$. On vérifie

$$(A^k + A^{-k})(A + A^{-1}) = A^{k+1} + A^{-(k+1)} + A^{k-1} + A^{-(k-1)}$$

et donc

$$B_k = B_{k+1} + B_{k-1}$$

Sachant $B_0 = 2I_n$ et $B_1 = I_n$, on a par récurrence $B_k = \lambda_k I_n$ avec (λ_k) la suite récurrente linéaire double déterminée par

$$\begin{cases} \lambda_0 = 2, \lambda_1 = 1 \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n - \lambda_{n-1} \end{cases}$$

Après résolution

$$\lambda_n = \frac{(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n}{2^n}$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Posons $p = \sum_{g \in G} g \cdot p^2 = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} gh$. Or pour $g \in G$, l'application $h \mapsto gh$ est une permutation du groupe G donc $\sum_{h \in G} gh = p$ et par suite $p^2 = \text{Card } G \cdot p$.

Par suite $\frac{1}{\text{Card } G} p$ est une projection vectorielle et puisque son rang égale sa trace, $\text{rg } p = 0$. Ainsi $p = 0$.

(b) Considérons $\varphi(x, y) = \sum_{g \in G} (g(x) | g(y))$. φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n pour lequel on a $\forall h \in G, h^* = h^{-1}$. Pour ce produit scalaire, V^\perp est un supplémentaire de V stable pour tout h^{-1} avec h élément de G donc stable pour tout élément de G .

Exercice 37 : [énoncé]

(a) Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque

$$E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} \text{ et } E_{j,j} = E_{j,i}E_{i,j}$$

l'hypothèse de travail donne

$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$$

De plus, pour $i \neq j$, on a

$$E_{i,j} = E_{i,j}E_{j,j} \text{ et } O_n = E_{j,j}E_{i,j}$$

donc

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(O_n) = 0$$

Ainsi

$$f(A) = f\left(\sum a_{i,j}E_{i,j}\right) = \lambda \text{tr } A$$

en notant λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$.

(b) Posons $f = \text{tr} \circ g$. L'application f est une forme linéaire vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA)$$

Ainsi $f = \lambda \text{tr}$.

Or $f(I_n) = \text{tr}(g(I_n)) = \text{tr } I_n$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $f = \text{tr}$ et

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(g(M)) = f(M) = \text{tr}(M)$$

Exercice 38 : [énoncé]

En retirant la première colonne aux autres, on obtient un déterminant où ne figurent des x que sur la première colonne. En développant selon cette première colonne, on obtient une expression affine de la variable x .

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix} = \alpha x + \beta$$

Il reste à déterminer les réels α, β exprimant cette fonction affine. D'une part

$$\beta = \begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n$$

et d'autre part

$$\alpha = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}_{x=0}'$$

La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants obtenus lorsqu'on ne dérive qu'une colonne

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_1 & & 1 & & (0) \\ & \ddots & & & \\ (0) & & 1 & & a_n \end{vmatrix}$$

où la colonne formée de 1 est à la position j . Chaque déterminant se calcule en développant selon la ligne ne contenant que le coefficient 1 et l'on obtient

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} a_i$$

Exercice 39 : [énoncé]

Supposons pour commencer la matrice A inversible. Par opérations par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(D - BA^{-1}C) \det A = \det(DA - BA^{-1}CA)$$

Or les matrices A et C commutent donc A^{-1} et C commutent aussi et

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(DA - BC)$$

Supposons A non inversible.

Pour p assez grand, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p}I$ est inversible et commute avec C donc

$$\det \begin{pmatrix} A_p & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA_p - BC)$$

En passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, la continuité du déterminant donne

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 40 : [énoncé]

Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \det A + v \det B = 1$. $U = u^t(\text{Com } A)$ et $V = v^t(\text{Com } B)$ conviennent alors.

Exercice 41 : [énoncé]

Notons que pour $n = 1$: la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout A et tout X .

On suppose dans la suite $n \geq 2$.

Pour $X = A$, la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2 \det A$ et donc $\det A = 0$.

La matrice A n'est donc pas inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_rP$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$.

On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

Exercice 42 : [\[énoncé\]](#)

Cas où la matrice A inversible :

Pour

$$P = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

on a

$$MP = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det M = \det(MP) = \det A \times \det(-CA^{-1}B + D)$$

Or

$$\det A \times \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - BC)$$

car la matrice C commute avec les matrices A et B .

On en déduit

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Cas général :

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ assez grand, la matrice $A_p = A + 1/pI_n$ est inversible et les matrices A_p, B, C, D commutent deux à deux. Si on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} A_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'étude qui précède donne

$$\det M_p = \det(A_p D - BC)$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Il est alors immédiat de conclure que l'inversibilité de M équivaut à celle de $AD - BC$.

Exercice 43 : [\[énoncé\]](#)

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit un produit scalaire par

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

La quantité cherchée m apparaît alors sous la forme

$$m = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \|X^2 - (aX^2 + bX + c)\|^2$$

C'est donc le carré de la distance de X^3 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. En introduisant la projection orthogonale p sur ce sous-espace vectoriel

$$m = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \|X^3 - p(X^3)\|^2$$

On peut écrire

$$p(X^3) = a + bX + cX^2$$

Pour chaque $i = 0, 1, 2$, on a

$$(p(X^3) | X^i) = (X^3 | X^i)$$

car

$$(p(X^3) - X^3 | X^i) = 0$$

On obtient alors un système d'équations d'inconnue (a, b, c)

$$\begin{cases} a + b/2 + c/3 = 1/4 \\ a/2 + b/3 + c/4 = 1/5 \\ a/3 + b/4 + c/5 = 1/6 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = 1/20, b = -3/5 \text{ et } c = 3/2$$

On en déduit

$$m = \|X^3 - p(X^3)\|^2 = (X^3 - p(X^3) | X^3) = \frac{1}{2800}$$

Exercice 44 : [\[énoncé\]](#)

Le cas $n = 1$ étant évident, on suppose désormais $n \geq 2$.

La quantité cherchée est $m = d(M, \text{Vect}(I, J)) = \|M - p(M)\|$ avec p la projection orthogonale sur $\text{Vect}(I, J)$.

$p(M) = aI + bJ$ avec $(p(M) | I) = (M | I) = \text{tr}(M)$ et $(p(M) | J) = (M | J) = \sigma$ avec σ la somme des coefficients de M .

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{n \text{tr}(M) - \sigma}{n(n-1)} \text{ et } b = \frac{\sigma - \text{tr}(M)}{n(n-1)}$$

donc

$$m^2 = \|M - p(M)\|^2 = (M - p(M) | M) = \|M\|^2 - \frac{(n-1) \text{tr}(M)^2 + (\text{tr}(M) - \sigma)^2}{n(n-1)}$$

Exercice 45 : [\[énoncé\]](#)

En introduisant la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\|A\| = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

on peut interpréter l'infimum calculé

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right) = d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$$

La distance introduite se calcule par projection orthogonale. Sachant $A = M + N$ avec

$$M = \frac{A + {}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } N = \frac{A - {}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$$

on obtient

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \|N\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Exercice 46 : [\[énoncé\]](#)

Pour $X = {}^t(1 \ \dots \ 1)$, on vérifie

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = {}^tXAX$$

Or ${}^tXAX = (X | AX)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|{}^tXAX| \leq \|X\| \|AX\|$$

Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$

Exercice 47 : [\[énoncé\]](#)

- (a) Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$$

Puisque $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sigma$, on obtient

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1$$

- (b) On suppose la matrice M orthogonale et l'on calcule son déterminant. En ajoutant toutes les colonnes à la première puis en factorisant

$$\det M = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

puis en retranchant les premières lignes aux suivantes

$$\det M = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a - b & b - c \\ 0 & c - b & a - c \end{vmatrix}$$

Enfin

$$\det M = (a + b + c) ((a - b)(a - c) + (b - c)^2)$$

Ainsi

$$\det M = S (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = S$$

car $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $\sigma = 0$.

Finalement

$$M \in \text{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S = 1$$

- (c) Les nombres a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ si, et seulement si,

$$X^3 - X^2 + k = (X - a)(X - b)(X - c)$$

En identifiant les coefficients, cette identité polynomiale équivaut à la satisfaction du système

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \\ abc = -k \end{cases}$$

De plus, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles si, et seulement si, $k \in [0; 4/27]$. En effet, considérons la fonction $f: x \mapsto x^3 - x^2 + k$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = x(3x - 2)$.

Compte tenu de ses variations, pour que f s'annule 3 fois il est nécessaire que $f(0) \geq 0$ et $f(2/3) \leq 0$.

Cela fournit les conditions $k \geq 0$ et $k \leq 4/27$.

Inversement, si $k \in [0; 4/27]$, f admet trois racines réelles (comptées avec multiplicité)

Ainsi, si $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ alors a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0; 4/27]$.

Inversement, si $k \in [0; 4/27]$, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines a, b, c vérifiant $\sigma = 0$ et $S = 1$ donc $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 48 : [énoncé]

(a) En notant $X = (x_1, \dots, x_n)$, on obtient

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

et donc

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i x_j$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| |x_j|$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i x_j \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| |x_j| \right)^2}$$

et une nouvelle fois

$$\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| |x_j| \right)^2 \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j^2 \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2$$

On obtient donc

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 < \sum_{i=1}^n x_i^2$$

puis

$${}^tXAX > \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

(b) Si $X \in \ker A$ alors ${}^tXAX = 0$ et donc $X = 0$ en vertu de ce qui précède.

Exercice 49 : [énoncé]

Puisque $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, on a

$$(I + 2M)/3 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

avec $M = A^{-1}B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ unitaire,

$$\|x + 2Mx\| = 3$$

Mais aussi

$$\|x\| + \|2Mx\| = \|x\| + 2\|x\| = 3$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire et, par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$2Mx = \lambda x$$

En considérant à nouveau la norme, on obtient $\lambda = 2$ puis $Mx = x$. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on conclut $M = I_n$ puis $A = B$.