

Exercice 1 [02796] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = 2^n u_{2^n}.$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 2 [02797] [Correction]

Soit (u_n) une suite décroissante d'éléments de \mathbb{R}_+ , de limite 0. Pour $n \geq 1$, on pose

$$v_n = n^2 u_{n^2}.$$

Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Exercice 3 [02803] [Correction]

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1}.$$

Exercice 4 [02806] [Correction]

Nature et calcul de la somme de la série de terme général

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Exercice 5 [02790] [Correction]

Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a} \right)$$

où $a > 0$.

Exercice 6 [03879] [Correction]

On donne une suite réelle (a_n) .

On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge.

Exercice 7 [02791] [Correction]

Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}} \right)$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 [02802] [Correction]

Soient $(a, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = a^{\sum_{k=1}^n 1/k^\alpha}.$$

- (a) Pour quels couples (a, α) la suite (u_n) est-elle convergente ? Dans la suite, on suppose que tel est le cas, on note $\ell = \lim u_n$ et on pose, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n - \ell.$$

- (b) Nature des séries de termes généraux v_n et $(-1)^n v_n$.

Exercice 9 [02793] [Correction]

Convergence de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Exercice 10 [02804] [Correction]

Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}.$$

Exercice 11 [02805] [Correction]

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Exercice 12 [02810] [Correction]

On pose $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ pour tout $x \geq 1$ et $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ pour tout entier $n \geq 2$.

- (a) Montrer que f' est intégrable sur $[1; +\infty[$.
 (b) Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.
 (c) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.
 (d) En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 13 [03882] [Correction]

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n}.$$

Exercice 14 [03881] [Correction]Pour $a > 0$, étudier la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}.$$

Exercice 15 [02822] [Correction]Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

- (a) Si f' est bornée sur \mathbb{R}_+ , montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .
 (b) Si $|f'(x)| \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, montrer que f n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 16 [02812] [Correction]Soit $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x/2)}{\sqrt{x}} = 1.$$

Trouver un équivalent simple en 0 de f .**Exercice 17** [02813] [Correction]Soient f et g des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

- (a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus grand et un plus petit élément.
 (b) Montrer l'existence de $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 18 [02819] [Correction]On pose $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour x réel non nul et $f(0) = 0$.

- (a) Montrer l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = x^{-3n} P_n(x) f(x).$$

Quel est le degré de P_n ?

- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ , toutes ses dérivées étant nulles en 0.
 (c) Montrer que toute racine de P_n est réelle.

Exercice 19 [02421] [Correction]

Convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt.$$

Exercice 20 [02826] [Correction]

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2} dt$$

où $a > 0$.**Exercice 21** [02827] [Correction]

Trouver une expression simple de

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{(1 - 2x \cos t + x^2)(1 - 2y \cos t + y^2)} dt$$

où $x, y \in]-1; 1[$.**Exercice 22** [02879] [Correction]

- (a) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

On pose pour tout réel x

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

(b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer sa dérivée.

(c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Exercice 23 [02829] [Correction]

Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable et non bornée.

Exercice 24 [02824] [Correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta.$$

Exercice 25 [02825] [Correction]

Existence et calcul éventuel de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (t + ib)^2} dt.$$

Exercice 26 [03884] [Correction]

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'existence et déterminer l'éventuelle valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha x + 1}.$$

Exercice 27 [02834] [Correction]

Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

(a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$?

(b) Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?

(c) Si

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

montrer que F est continue sur $[-1; 1[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1; 1[$.

(d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

Exercice 28 [02839] [Correction]

On pose

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

pour tout réel $x \in [0; 1]$ et tout entier naturel n .

Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

Exercice 29 [02833] [Correction]

On note U l'ensemble des complexes de module 1 et on considère ω un complexe de module $\neq 1$.

Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z - \omega}$$

soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 30 [03754] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable.

Montrer l'existence d'une fonction $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x+1) - g(x) = f(x).$$

Exercice 31 [02830] [Correction]

On pose, pour $x \geq 0$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 32 [02835] [Correction]

Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

(a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

(b) Montrer

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right).$$

(c) Montrer que Γ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 33 [02836] [Correction]

Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x , on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

On note I le domaine de définition de

$$S: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

- (a) Déterminer I .
 (b) Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
 (c) A-t-on convergence normale sur \mathbb{R}_+^* ?
 (d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?

(e) Étudier la continuité de S sur I .

Exercice 34 [02837] [Correction]

On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S . Donner un équivalent de S en 0 et en 1^- .

Exercice 35 [03203] [Correction]

Définition, continuité et dérivabilité de

$$S: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Exercice 36 [02728] [Correction]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence de :

- (i) toute valeur propre de M est de module strictement inférieur à 1 ;
 (ii) la suite (M^k) tend vers 0 ;
 (iii) la série de terme général M^k converge.

Exercice 37 [03925] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Que dire de B ?

Exercice 38 [02766] [Correction]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

(a) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

(b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Désormais la norme est euclidienne.

(c) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

(d) Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 39 [02832] [Correction]

Soient d un entier naturel et (f_n) une suite de fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de degré au plus d . On suppose que cette suite converge simplement.

Montrer que la limite est polynomiale de degré au plus d , la convergence étant de plus uniforme sur tout segment.

Exercice 40 [02741] [Correction]

Soit $K \in \mathcal{C}([0; 1]^2, \mathbb{R})$ non nulle telle que

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, K(x, y) = K(y, x).$$

On note $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, soit

$$\Phi(f) : x \in [0; 1] \rightarrow \int_0^1 K(x, y)f(y) dy \in \mathbb{R}.$$

- (a) Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
 (b) L'application Φ est-elle continue pour $\|\cdot\|_\infty$? pour $\|\cdot\|_1$?
 (c) Montrer que

$$\forall f, g \in E, (\Phi(f)|g) = (f|\Phi(g)).$$

Soit

$$\Omega = \left(\max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x, y)| dy \right)^{-1}.$$

- (d) Montrer $\forall \lambda \in]-\Omega; \Omega[, \forall h \in E, \exists! f \in E, h = f - \lambda\Phi(f)$.
 (e) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, montrer que :

$$\dim \text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}) \leq \frac{1}{\lambda^2} \iint_{[0; 1]^2} K(x, y)^2 dx dy.$$

Exercice 41 [02828] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0.$$

- (a) Montrer que la fonction f est nulle.
 (b) Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx.$$

- (c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout n dans \mathbb{N} , on ait

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x) dx = 0.$$

Exercice 42 [02774] [Correction]

- (a) Chercher les fonctions $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continues vérifiant

$$f \circ f = f.$$

- (b) Même question avec les fonctions dérivables.

Exercice 43 [02770] [Correction]

On munit l'espace des suites bornées réelles $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_n (|u_n|)$.

- (a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
 (b) Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 44 [02780] [Correction]

On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0; +\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que E est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme

$$\|f\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt}.$$

On note E_0 l'ensemble des $f \in E$ telles que f est nulle hors d'un certain segment. On note F l'ensemble des fonctions de E du type $x \mapsto P(e^{-x})e^{-x^2/2}$ où P parcourt $\mathbb{R}[X]$. Montrer que E_0 est dense dans E puis que F est dense dans E .

Exercice 45 [02773] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{O}_n désigne l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples et \mathcal{F}_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples. Ces ensembles sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 46 [02771] [Correction]

Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ de \mathbb{C} telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ appartient à E , on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

- (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
 (b) Soit

$$F = \left\{ a \in E \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}.$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 47 [02772] [Correction]

Soient f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

son graphe.

- (a) On suppose f continue. Montrer que Γ_f est fermé.
 (b) On suppose f bornée et Γ_f est fermé dans \mathbb{R}^2 . Montrer que f est continue.
 (c) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée ?

Exercice 48 [02778] [Correction]

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

- (a) Montrer

$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\|.$$

- (b) Montrer, si $F \neq E$, qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.
 (c) Montrer que E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ est une partie compacte.

Exercice 49 [02776] [Correction]

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés réels, f une application de E_1 dans E_2 telle que pour tout compact K de E_2 , $f^{-1}(K)$ soit un compact de E_1 . Montrer, si F est un fermé de E_1 , que $f(F)$ est un fermé de E_2 .

Exercice 50 [02853] [Correction]

On pose

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\text{th } t}{t^2} dt$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ entière pour x réel. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
 (b) La fonction f est-elle continue en -1 ?
 (c) Donner un équivalent simple de f en 1^- .

Exercice 51 [02852] [Correction]

Domaine de définition et étude aux bornes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 52 [02850] [Correction]

On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} a_k.$$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!} x^n$.

Exercice 53 [02845] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}.$$

Exercice 54 [02844] [Correction]

- (a) Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R . Déterminer les rayons de convergence de

$$\sum (a_n \ln n) x^n \text{ et } \sum \left(a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n.$$

- (b) Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 55 [02854] [Correction]

Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

(a) Montrer que pour $0 < r < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

(b) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?

(c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 56 [02856] [Correction]

Soient $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ et f une fonction continue de B dans \mathbb{C} dont la restriction à B° est somme d'une série entière. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k \geq 0}$ de polynôme convergeant uniformément vers f sur B .

Exercice 57 [02848] [Correction]

Pour $x \in]-1; 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right).$$

Exercice 58 [02857] [Correction]

Développer en série entière

$$x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

Exercice 59 [02422] [Correction]

(a) Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(X+1)^m (X-1)^n}$$

avec m, n deux entiers non nuls.

(b) Déterminer deux polynômes U et V tels que

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1.$$

Exercice 60 [02858] [Correction]

Développer en série entière $f: x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0.

Exercice 61 [02859] [Correction]

(a) Montrer, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n| |f(t)| dt \right)_{n \geq 0}$ soit bornée.

Montrer que $F: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t) dt$ est développable en série entière en 0.

Exercice 62 [03747] [Correction]

(a) Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

(b) Calculer $f(-1)$ et $\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} dx$ où E est la fonction partie entière.

(c) Donner un équivalent de f en $x = 1$

Exercice 63 [02865] [Correction]

Étudier la limite de la suite de terme général

$$I_n = n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$

Exercice 64 [02808] [Correction]

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2) \times 3^n}.$$

Exercice 65 [02847] [Correction](a) Déterminer le rayon de convergence R de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^n.$$

(b) Pour $x \in]-R; R[$ calculer la somme précédente.**Exercice 66** [02841] [Correction]On note a_n la n -ième décimale de $\sqrt{3}$.Quel est l'intervalle de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?**Exercice 67** [02842] [Correction]Quel est le rayon de convergence de $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$?**Exercice 68** [02843] [Correction]Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$?**Exercice 69** [02855] [Correction]Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt.$$

- (a) Déterminer la limite de (I_n) .
- (b) Donner un équivalent de (I_n) .
- (c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 70 [02874] [Correction]

Étudier

$$f: x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt.$$

Exercice 71 [02863] [Correction](a) Établir pour $a, b > 0$ l'égalité

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}.$$

(b) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 72 [02873] [Correction]Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

Exercice 73 [00933] [Correction]

Établir

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 74 [02862] [Correction]

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx.$$

Exercice 75 [00150] [Correction]Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt} dt.$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 76 [02871] [Correction]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt.$$

- Définition de f .
- Continuité et dérivabilité de f .
- Écrire $f(1)$ comme somme de série.

Exercice 77 [02875] [Correction]

Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t} dt.$$

- Montrer que f est définie et continue sur Ω .
- Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1 .
- Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty$.

Exercice 78 [02881] [Correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x \cos t)}{\cos t} dt.$$

Exercice 79 [02880] [Correction]

Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt.$$

Exercice 80 [02882] [Correction]

On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ et trouver des équivalents simples de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 81 [02876] [Correction]

Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 82 [02807] [Correction]

(a) Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx.$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer l'existence de

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{\binom{2n}{n}}.$$

- Calculer S_0 et S_{-1} .
- Si $p \in \mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de S_p .

Exercice 83 [02872] [Correction]

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt.$$

- Justifier la définition de $f(x)$.
- Montrer que f est classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Calculer $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

Exercice 84 [02840] [Correction]

(a) Si $(s, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

pour $n \geq 0$? À λ fixé, on note Δ_λ l'ensemble des $s > 0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.

(b) Calculer $\lim_{s \rightarrow \sup \Delta_\lambda} F_\lambda(s)$.

(c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s \rightarrow \inf \Delta_\lambda$.

(d) Si $n \geq 1$, calculer :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy.$$

(e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 85 [02864] [Correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt.$$

Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

Exercice 86 [02866] [Correction]

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) dt.$$

Exercice 87 [02869] [Correction]

Montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t} dt.$$

Exercice 88 [02870] [Correction]

Si $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

Exercice 89 [00118] [Correction]

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) \right)^n dx.$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

(b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 90 [03287] [Correction]

Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos^{2n} t dt.$$

Exercice 91 [02893] [Correction]

Résoudre sur $]0; \pi[$

$$y'' + y = \cot x.$$

Exercice 92 [02894] [Correction]

(a) Résoudre sur \mathbb{R}_+^* par variation des constantes l'équation différentielle

$$y'' + y = 1/x.$$

(b) En déduire une expression de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{dt}{1+t^2}$$

valable pour $x > 0$.

(c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 93 [02896] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique et solution de

$$y'' + y = f?.$$

Exercice 94 [02895] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 95 [02890] [Correction]

Trouver les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout x réel

$$f(x) - 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 1.$$

Exercice 96 [02892] [Correction]

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x > 0, f'(x) = f(1/x).$$

Exercice 97 [02889] [Correction]

Résoudre

$$x \ln xy' - (3 \ln x + 1)y = 0.$$

Exercice 98 [02709] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} telle que $A^4 = I_n$. Déterminer $\exp(A)$.

Exercice 99 [02742] [Correction]

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Que peut-on dire de $\exp A$?

Exercice 100 [00391] [Correction]

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

Exercice 101 [02710] [Correction]

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sans diagonaliser la matrice A , déterminer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal et calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Évaluer $\exp(A)$.

Exercice 102 [02701] [Correction]

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le polynôme minimal de A .

(b) La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.

(c) Calculer e^A .

Exercice 103 [02902] [Correction]

Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z. \end{cases}$$

Exercice 104 [02711] [Correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A . Calculer $\exp A$ et $\exp(A) \exp({}^t A)$.

Exercice 105 [02712] [Correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}.$$

Étudier la diagonalisabilité de A , déterminer les polynômes minimal et caractéristique de A , calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension n .

Exercice 106 [02907] [Correction]

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n: (x, y) \mapsto \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}} x^n.$$

On note D l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général $u_n(x, y)$ converge. On pose

$$f: (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y).$$

- (a) Déterminer D .
 (b) Montrer que $f|_{D^\circ}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 107 [02905] [Correction]

On pose

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

pour x, y réels non tous deux nuls.

La fonction f admet-elle un prolongement continue à \mathbb{R}^2 ? Un prolongement de classe \mathcal{C}^1 ? de classe \mathcal{C}^2 ?

Exercice 108 [02912] [Correction]

- (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f.$$

- (b) Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}.$$

Exercice 109 [02910] [Correction]

Trouver les extrema sur \mathbb{R}^2 de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Exercice 110 [02906] [Correction]

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On pose

$$f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ pour } x \neq y \text{ et } f(x, x) = g'(x).$$

- (a) Exprimer $f(x, y)$ à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[0; 1]$.
 (b) En déduire que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 111 [02913] [Correction]

On note U l'ensemble des (x, y) de \mathbb{R}^2 tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré α si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x, y) \in U, \Phi(f)(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

- (a) Déterminer $\text{Ker } \Phi$.
 (b) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.
 (c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$, $\Phi(f) = h$, h étant la fonction qui à (x, y) associe $(x^2 + y^2)^{3/2}xy$.

Exercice 112 [02911] [Correction]

Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r .

Exercice 113 [00071] [Correction]

Soit $a > 0$. On pose, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}.$$

Montrer que f admet un minimum absolu et calculer ce dernier.

Exercice 114 [02903] [Correction]

Soient $(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et, si $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n).$$

Calculer $g'(t)$.

Exercice 115 [02904] [Correction]

Si $p \in \mathbb{N}$, soit

$$f_p: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto (x + y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

- (a) Condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge par continuité en $(0, 0)$?
- (b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0, 0)$?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

On remarque

$$v_n \geq u_{2^n} + u_{2^{n+1}} + \dots + u_{2^{n+1}-1}$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^n v_k \geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k.$$

Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Aussi

$$u_{2^n} + \dots + u_{2^{n+1}-1} \geq \frac{1}{2} v_{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n v_k.$$

Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 2 : [énoncé]

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour $n^2 \leq k < (n+1)^2$,

$$0 \leq u_k \leq u_{n^2} \leq \frac{v_n}{n^2}$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq v_n \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$$

ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs

$\sum u_n$ sont majorées et donc $\sum u_n$ converge.

Inversement, pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ on a $v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Exercice 3 : [énoncé]

Pour $t = -1$,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = -(m+1)(n+1)$$

ce qui permet de conclure.

Pour $t \neq -1$,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i t^{i+1} \frac{1 - (-t)^{m+1}}{1+t}.$$

Quand $m \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t}$$

si $|t| < 1$ et diverge sinon. Aussi, quand $|t| < 1$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t} = t \frac{1 - (-t)^{n+1}}{(1+t)^2}$$

et quand $n \rightarrow +\infty$,

$$t \frac{1 - (-t)^{n+1}}{(1+t)^2} \rightarrow \frac{t}{(1+t)^2}.$$

On conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \frac{t}{(1+t)^2}.$$

Exercice 4 : [énoncé]

Le terme

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

est bien défini en tant que reste d'une série alternée satisfaisant au critère spécial.

Pour $N \leq K$ entiers,

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^K \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=N+1}^K \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

D'une part

$$\sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}.$$

D'autre part

$$\sum_{k=N+1}^K \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = N \sum_{k=N+1}^K \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

En passant à la limite quand $K \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k} + N \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Or

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

donc quand $N \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{n=1}^N u_n \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ainsi $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2.$$

Exercice 5 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right).$$

Par le critère spécial, $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}}$$

est terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a > 1/2$. Finalement, la série étudiée converge si, et seulement si, $a > 1/2$.

Exercice 6 : [\[énoncé\]](#)

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n a_k(S_k - S_{k-1}).$$

En séparant la somme en deux et en reprenant l'indexation de la deuxième somme

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k$$

ce qui donne (sachant $S_0 = 0$)

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} S_n.$$

La suite (S_n) converge, elle est donc bornée par un certain réel M .

D'une part $a_n \rightarrow 0$ et donc $a_{n+1} S_n \rightarrow 0$.

D'autre part $|(a_k - a_{k+1}) S_k| \leq M |a_k - a_{k+1}|$ et donc la série $\sum (a_n - a_{n+1}) S_n$ converge absolument.

Par addition de convergence, on peut conclure que la série $\sum a_n^2$ converge.

Exercice 7 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(a+1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Par suite, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -1$.

Exercice 8 : [\[énoncé\]](#)

(a) Si $\alpha \leq 1$ alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

et donc $u_n \rightarrow 0$ si $a \in [0; 1[$, $u_n \rightarrow 1$ si $a = 1$ et (u_n) diverge si $a > 1$.

Si $\alpha > 1$ alors $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge et donc (u_n) aussi.

(b) Cas $\alpha \leq 1$ et $a = 1$: $u_n = 1$, $v_n = 0$ et on peut conclure.

Cas $\alpha < 1$ et $a \in [0; 1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n$, $n^2 v_n = e^{2 \ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \ln a} \rightarrow 0$ car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Cas $\alpha = 1$ et $a \in [0; 1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n = e^{(\ln n + \gamma + o(1)) \ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$ donc $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$ i.e. $a < -1/e$.

Cas $\alpha > 1$: $\ell = a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$,

$$v_n = \ell(e^{-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}.$$

Ainsi $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Exercice 9 : [énoncé]

$\sqrt{n^2 + 1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

Exercice 10 : [énoncé]

On a

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et donc

$$\frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \sim \frac{3}{n^3}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ converge

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}.$$

En introduisant la constante d'Euler γ , on sait

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1).$$

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln(N+1) + \gamma - 1 + o(1)$$

et en introduisant dans la somme les inverses des nombres pairs absents, on obtient

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} = \ln(2N+1) - \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \gamma - 1 + o(1).$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = \ln \frac{N^{18}(N+1)^6}{(2N+1)^{24}} + 18 + o(1)$$

puis à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = 18 - 24 \ln 2.$$

Exercice 11 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{4n+1} = \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-t^4)^n dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^4)^{N+1}}{1 + t^4} dt.$$

Or

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t^4)^{N+1}}{1 + t^4} dt \right| \leq \int_0^1 t^{4N+4} dt = \frac{1}{4N+5} \rightarrow 0$$

donc $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^4}.$$

Enfin

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \pi \right).$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) La fonction f' est bien définie et continue par morceaux sur $[1; +\infty[$.

On a

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2}$$

et donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{x^2}.$$

La fonction $x \mapsto 1/x^2$ étant intégrable sur $[1; +\infty[$, il en est de même de f' par domination.

(b) Par intégration par parties

$$\int_{n-1}^n f(t) dt = \left[(t - (n-1))f(t) \right]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n (t - (n-1))f'(t) dt$$

donc

$$|u_n| \leq \int_{n-1}^n (t - (n-1))|f'(t)| dt \leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt.$$

L'intégrabilité de f' permet d'introduire $\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$ et d'affirmer que les sommes partielles de la série $\sum |u_n|$ sont majorées via

$$\sum_{n=1}^N |u_n| \leq |u_1| + \int_1^N |f'(t)| dt \leq |u_1| + \int_1^{+\infty} |f'(t)| dt.$$

La série $\sum u_n$ est alors absolument convergente.

(c) Par l'absurde, supposons que la suite $(\cos(\ln n))$ converge. La suite extraite $(\cos(\ln 2^n)) = (\cos(n \ln 2))$ aussi. Notons ℓ sa limite.

Puisque

$$\cos((n+1) \ln 2) + \cos((n-1) \ln 2) = 2 \cos(n \ln 2) \cos(\ln 2)$$

on obtient à la limite $2\ell = 2\ell \cos(\ln 2)$ et donc $\ell = 0$.

Puisque

$$\cos(2n \ln 2) = 2 \cos^2(n \ln 2) - 1$$

on obtient aussi à la limite $\ell = 2\ell^2 - 1$ ce qui est incompatible avec $\ell = 0$.

(d) Puisque

$$\int_{n-1}^n f(t) dt = -\cos(\ln n) + \cos(\ln(n-1)).$$

La divergence de la suite $(\cos(\ln n))$ entraîne la divergence de la série

$$\sum \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

Enfin, puisque la série $\sum u_n$ converge, on peut alors affirmer que la série

$$\sum f(n) \text{ diverge.}$$

Exercice 13 : [énoncé]

Posons

$$P_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n} > 0.$$

On a

$$\ln(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(3k-1) - \ln n.$$

Par comparaison série-intégrale

$$\ln 2 + \int_1^n \ln(3t-1) dt \leq \sum_{k=1}^n \ln(3k-1) \leq \int_1^{n+1} \ln(3t-1) dt.$$

Or

$$\int_1^n \ln(3t-1) dt = \frac{3n-1}{3} \ln(3n-1) - n + C = n \ln n + (\ln 3 - 1)n + O(\ln n)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \ln(3k-1) = n \ln n + (\ln 3 - 1)n + O(\ln n).$$

On en déduit

$$\ln P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 3 - 1$$

puis

$$P_n \rightarrow \frac{3}{e}.$$

Exercice 14 : [énoncé]

On sait

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

et donc

$$a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = e^{\ln a \ln n + \gamma \ln a + o(1)} \sim \frac{e^{\gamma \ln a}}{n^{-\ln a}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs

$$\sum_{n \geq 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \text{ converge} \iff -\ln a > 1$$

ce qui fournit la condition $a < e^{-1}$.

Exercice 15 : [énoncé]

- (a) Si f' est bornée sur \mathbb{R}_+ , l'inégalité des accroissements finis assure que f est lipschitzienne donc uniformément continue.
- (b) Supposons que f soit uniformément continue. Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}, |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x + \alpha) - f(x)| \leq 1$. Or par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_x \in]x; x + \alpha[$ vérifiant $|f(x + \alpha) - f(x)| = \alpha |f'(\xi_x)|$ et donc $|f'(\xi_x)| \leq 1/\alpha$. Cette propriété est incompatible avec $|f'(x)| \rightarrow +\infty$.

Exercice 16 : [énoncé]

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]0; \alpha], (1 - \varepsilon)\sqrt{x} \leq f(x) - f(x/2) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{x}.$$

Pour $x \in]0; \alpha]$, $x/2^n \in]0; \alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$(1 - \varepsilon)\sqrt{x/2^n} \leq f(x/2^n) - f(x/2^{n+1}) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{x/2^{n+1}}.$$

En sommant ces inégalités et en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$(1 - \varepsilon)\sqrt{x} \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} \leq f(x) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{x} \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}}.$$

La phrase quantifiée ainsi obtenue permet d'affirmer

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{1 - 1/\sqrt{2}}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

- (a) L'ensemble des points fixes de f est $(f - \text{Id})^{-1}\{0\}$, c'est donc une partie fermée de $[0; 1]$. Étant fermée et bornée c'est une partie compacte. Étant de plus non vide, cette partie admet un plus petit et un plus grand élément.
- (b) Soient $a \leq b$ les deux éléments précédents. L'égalité $f \circ g = g \circ f$ donne $f(g(a)) = g(a)$ et $f(g(b)) = g(b)$. Les réels $g(a)$ et $g(b)$ étant points fixes de f , on a l'encadrement

$$a \leq g(a), g(b) \leq b.$$

Considérons alors la fonction continue $\varphi = f - g$.

On a $\varphi(a) = a - g(a) \leq 0$ et $\varphi(b) = b - g(b) \geq 0$.

Par application du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction φ s'annule.

Exercice 18 : [énoncé]

- (a) Il suffit de raisonner par récurrence. On obtient $P_0(x) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = (2 - 3nX^2)P_n + X^3P'_n.$$

Par récurrence, pour $n > 0$, $\deg P_n = 2(n - 1)$.

- (b) f est continue en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ dont par le théorème « limite de la dérivée », on peut conclure.

- (c) $P_1 = 2$ a toutes ses racines réelles.

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ donc par une généralisation du théorème de Rolle, on peut affirmer que f'' s'annule sur $]0; +\infty[$ et $] -\infty; 0[$. Ses annulations sont aussi des zéros de P_2 qui est de degré 2, donc P_2 a toutes ses racines réelles.

f'' s'annule aussi en 0 et en $\pm\infty$. Par la généralisation du théorème de Rolle, on obtient 2 annulations sur $]0; +\infty[$ et 2 annulations sur $] -\infty; 0[$ qui seront toutes quatre zéros de P_3 qui est un polynôme de degré 4, ... on peut itérer la démarche.

Exercice 19 : [énoncé]

Par un argument de parité, il suffit d'établir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2t} e^{it^2} dt.$$

Formellement

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{2t} e^{it^2} dt = \left[\frac{e^{it^2} - 1}{2it} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} dt$$

où la primitive de $2te^{it^2}$ a été choisie de sorte de s'annuler en 0.

Puisque les deux termes en second membre sont convergents, le théorème d'intégration par parties s'applique et assure la convergence de

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt.$$

Exercice 20 : [énoncé]

L'intégrabilité est entendue.

Par le changement de variable $u = a^2/t$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln a - \ln u}{a^2 + u^2} du$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2} dt = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

Exercice 21 : [énoncé]

Par le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ on parvient à l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{8u^2 du}{(1+u^2)((1-x)^2 + (1+x)^2u^2)((1-y)^2 + (1+y)^2u^2)}.$$

On peut réaliser une décomposition en éléments simples réelles de la fraction rationnelle intégrée qui pour des raisons de parité sera de la forme

$$\frac{a}{1+u^2} + \frac{b}{(1-x)^2 + (1+x)^2u^2} + \frac{c}{(1-y)^2 + (1+y)^2u^2}$$

avec

$$a = -\frac{1}{2xy}, b = -\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{2x(x-y)(1-xy)} \text{ et } c = -\frac{(1-y)^2(1+y)^2}{2y(y-x)(1-xy)}$$

sous réserve que $x \neq y$ et $xy \neq 0$.

Puisque

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{\alpha^2 + \beta^2 u^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\pi}{2}$$

on parvient à

$$I = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2xy} - \frac{1-x^2}{2x(x-y)(1-xy)} + \frac{1-y^2}{2y(x-y)(1-xy)} \right) = \frac{\pi}{2(1-xy)}.$$

Les cas exclus $x \neq y$ et $xy \neq 0$ peuvent être récupérés par continuité.

Il m'a peut-être échappé une démarche plus simple...

Exercice 22 : [énoncé]

- (a) La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$. On peut la prolonger par continuité en 0 en y posant la valeur 1. Par intégration par parties où l'on intègre l'expression $\sin t$ en $1 - \cos t$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1 - \cos x}{x} \rightarrow 0$$

et

$$\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

cette dernière intégrale étant convergente car la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et est dominée par la fonction intégrable $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$.

- (b) Soit F la primitive s'annulant en 0 du prolongement par continuité de $t \mapsto \sin(t)/t$. On a

$$f(x) = \lim_{+\infty} F - F(x).$$

Puisque la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 , la fonction f est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = -F'(x) = -\frac{\sin x}{x}.$$

- (c) Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) dt = \left[tf(t) \right]_0^x - \int_0^x tf'(t) dt = xf(x) + \int_0^x \sin t dt.$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

donc

$$xf(x) = \cos x - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

puis

$$\int_0^x f(t) dt = 1 - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Mais par intégration par parties on établit encore

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = \left[\frac{\sin t}{t^2} \right]_x^{+\infty} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt$$

avec

$$\left| \int_x^{+\infty} 2 \frac{\sin t}{t^3} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{2 dt}{t^3} = \frac{1}{x^2}$$

ce qui permet d'affirmer

$$x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Exercice 23 : [énoncé]

On peut prendre f nulle sur $[0; 1]$, puis pour chaque intervalle $[n; n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f affine par morceaux définie par les nœuds $f(n) = 0$, $f(n + \frac{1}{n^3}) = n$, $f(n + \frac{2}{n^3}) = 0$ et $f(n+1) = 0$ ce qui définit une fonction f positive continue vérifiant $\int_n^{n+1} f = \frac{1}{n^2}$ et donc intégrable sur \mathbb{R}_+ bien que non bornée.

Exercice 24 : [énoncé]

On a

$$\sqrt{\tan \theta} \Big|_{\theta=\pi/2-h} = \sqrt{\frac{\sin(\pi/2-h)}{\cos(\pi/2-h)}} = \sqrt{\frac{\cos h}{\sin h}} \sim \frac{1}{\sqrt{h}}$$

donc l'intégrale est bien définie.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta \stackrel{u=\sqrt{\tan \theta}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

après calculs...

Exercice 25 : [énoncé]

On peut écrire

$$1 + (t + ib)^2 = (t + i(b + 1))(t + i(b - 1)).$$

Si $b = \pm 1$ la fonction n'est pas intégrable sur \mathbb{R} à cause d'une singularité en 0.

Si $b \neq \pm 1$ alors la fonction $f: t \mapsto \frac{1}{1+(t+ib)^2}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} et

$f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$ donc f est intégrable sur \mathbb{R} .

En procédant à une décomposition en éléments simples :

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{1 + (t + ib)^2} = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(t^2 + (b + 1)^2) + \arctan\left(\frac{t}{b + 1}\right) \right]_{-A}^A - \frac{i}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(t^2 + (b - 1)^2) + \arctan\left(\frac{t}{b - 1}\right) \right]_{-A}^A$$

$$x_0 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Si $|b| > 1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t + ib)^2} = 0.$$

Si $|b| < 1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t + ib)^2} = \pi.$$

Exercice 26 : [énoncé]

Le discriminant du trinôme $x^2 + \alpha x + 1$ vaut $\Delta = \alpha^2 - 4$.

Cas $|\alpha| < 2$

On a $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule pas et la fonction $x \mapsto 1/(x^2 + \alpha x + 1)$ est définie et continue par morceaux sur $[0; +\infty[$. La fonction est intégrable car équivalente à $1/x^2$ en $+\infty$.

Cas $\alpha \geq 2$, le trinôme ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ car il est somme de termes positifs. À nouveau la fonction $x \mapsto 1/(x^2 + \alpha x + 1)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Cas $\alpha \leq -2$, le trinôme $x^2 + \alpha x + 1$ présente deux racines positives et la fonction $x \mapsto 1/(x^2 + \alpha x + 1)$ n'est pas définie sur l'intégralité de l'intervalle $]0; +\infty[$. Même en découpant l'intégrale aux points singuliers, on peut observer que les intégrales introduites ne sont pas définies. On ne parvient donc pas à donner un sens à l'intégrale étudiée dans ce cas.

Reste à calculer l'intégrale.

Cas $|\alpha| < 2$

Le trinôme $x^2 + \alpha x + 1$ s'écrit peut se réécrire

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + a^2 \text{ avec } a = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha x + 1} = \left[\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{2x + \alpha}{a}\right) \right]_0^{+\infty}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha x + 1} = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\alpha}{a}\right) \right).$$

Cas $\alpha = 2$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \left[-\frac{1}{x + 1} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

Cas $\alpha > 2$

Le trinôme $x^2 + \alpha x + 1$ à deux racines x_0, x_1 distinctes strictement négatives.

Par décomposition en éléments

$$\frac{1}{x^2 + \alpha x + 1} = \frac{a}{x - x_0} + \frac{b}{x - x_1}$$

avec

$$a = \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{ et } b = \frac{1}{x_0 - x_1} = -a.$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha x + 1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \left[\ln \left(\frac{x - x_0}{x - x_1} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{\alpha - \sqrt{\Delta}}.$$

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(x) = 1/n^x$ définie sur $]1; +\infty[$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1; +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$.

Plus précisément, pour $a > 1$, on a

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \text{ avec } \sum u_n(a) \text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions u_n sur $[a; +\infty[$.

Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que ζ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

(b) Posons $v_n(x) = \zeta(n)x^n/n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$ (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1).

Pour $x = 1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $((-1)^n \zeta(n)/n)$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car $\zeta(n+1) \leq \zeta(n)$.

(c) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction F est assurément de classe \mathcal{C}^1 (et même \mathcal{C}^∞) sur $] -1; 1[$.

Les fonctions v_n sont continues sur $[-1; 0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in [-1; 0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq |v_{n+1}(x)| \leq \frac{\zeta(n)}{n}.$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1; 0]$ et sa somme F est donc continue.

(d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x \in] -1; 1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}.$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p \geq 1} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right| \text{ et } \sum_{n \geq 1} \sum_{p=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right|.$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{p} \right).$$

La série de fonction associée converge normalement sur tout segment de $] -1; 1[$ et on peut donc intégrer terme à terme

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-t} - \frac{1}{p} \right) dt \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{p-t} - \frac{1}{p} dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{p}{p-x} \right) - \frac{x}{p}. \end{aligned}$$

Exercice 28 : [énoncé]

Remarquons que pour tout $t \in [0; 1]$,

$$t - t^2 \in [0; 1/4].$$

Pour $x \in [0; 1/4]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leq x \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4} \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]}.$$

Par une récurrence facile, on obtient

$$\|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

Par la remarque initiale, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leq \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\|u_{n+1}\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

On peut conclure que la série $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exercice 29 : [énoncé]

Si $|\omega| > 1$ alors

$$\frac{1}{z - \omega} = -\frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n z^{-n}$$

et la convergence normale sur U de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers

$$z \mapsto \frac{1}{z - \omega}.$$

Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{e^{i\theta} - \omega} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \int_0^{2\pi} e^{-i(n+(k+1))\theta} d\theta = 0.$$

Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur U vers $z \mapsto \frac{1}{z - \omega}$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{\overline{P_n(e^{i\theta})}}{e^{i\theta} - \omega} d\theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - \omega|^2} \neq 0.$$

Or par le calcul précédent, on peut affirmer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\overline{P_n(e^{i\theta})}}{e^{i\theta} - \omega} d\theta = 0.$$

On conclut à une absurdité.

La condition cherchée est $|\omega| > 1$.

Exercice 30 : [énoncé]

Puisque la fonction f est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$. Puisque la fonction f est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction f est positive.

Par télescopage, on observe

$$g(x + N) - g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x + k)$$

et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à g en $+\infty$, on est tenté de poser

$$g(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} f(x + k).$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a pour $k \geq 1$

$$0 \leq f(x + k) \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x + k)| \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

Par intégrabilité de f , il y a convergence de la série

$$\sum \int_{k-1}^k f(t) dt$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k \geq 1} f(x + k).$$

L'adjonction du terme d'indice $k = 0$ ne change rien et l'on peut conclure. On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.

Exercice 31 : [énoncé]

Quand $p \rightarrow +\infty$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \rightarrow \frac{1}{1+x} = f(x).$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$

Or, pour $\alpha \in]0; 1]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

pour tout $x \geq 0$ et donc

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \frac{1}{p} \frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leq \frac{1}{p} \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{p}.$$

Puisque $\|f - f_p\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 32 : [énoncé]

(a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.

(b)

$$\ln \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) \right)$$

$$\text{avec } x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

Or la série $\sum \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $O(1/n^2)$ et

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right) = x \ln n + \gamma x + o(1) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

(c) Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ pour $x > 0$ et $n \geq 1$. f_n est \mathcal{C}^1 , $\sum f_n$ converge simplement et $f'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Pour $x < 0$, $u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.

Pour $x = 0$, $u_n(x) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge

Pour $x > 0$, $u_n(x) = o(1/n^2)$ par croissance comparée et donc $\sum u_n(x)$ converge absolument.

On conclut $I = \mathbb{R}_+$

(b) Pour $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\|u_n\|_{\infty, [a; b]} = \sup_{x \in [a; b]} |u_n(x)| \leq \frac{n^\alpha b e^{-na}}{n^2 + 1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de \mathbb{R}_+^* . Sa somme est alors continue sur \mathbb{R}_+^* .

(c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x)| = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}.$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha < 2$.

(d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha e^{-k/n}}{k^2 + 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1} e^{-k/n} \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k/n}.$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k/n} = \frac{1}{2n} \frac{e^{-(n+1)/n}}{1 - e^{-1/n}} \rightarrow \frac{1}{2e}$$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. S'il y avait convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ alors

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \rightarrow 0$$

ce qui vient d'être exclu.

(e) Si S est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq S(1/n) \rightarrow S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

Exercice 34 : [énoncé]

Pour $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.

Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.

La fonction S est définie sur $] -1; 1[$.

Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.

u_n est de classe \mathcal{C}^1 , $\sum u_n$ converge simplement,

$$u'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour $a \in [0; 1[$,

$$\|u'_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq n \frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u'_n$ sur tout segment de $] -1; 1[$.

Par suite la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 .

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Pour $x \in [0; 1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)}.$$

Puisque $\sum_{p \geq 0} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$ converge et $\sum_{n \geq 1} \sum_{p=0}^{+\infty} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x) = x^{p+1} \frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0; 1[$.

La fonction u_p est continue sur $[0; 1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.

Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum (-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k u_k(x) \right\|_{\infty} \leq u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0; 1[$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Sachant

$$2|nx| \leq 1 + n^2x^2$$

on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}.$$

Soit $a > 0$. Pour $|x| \geq a$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}^* .

La somme S est donc une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Montrons que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)}.$$

Par le changement de variable $u = tx$

$$\frac{1}{x}(S(x) - S(0)) \geq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{u(1+u^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

car la fonction positive $u \mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

Exercice 36 : [énoncé]

(i) \implies (ii) Le plus simple est sans doute d'utiliser la décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente commutant entre elles. Par la formule du binôme de Newton, on peut calculer M^k et tronquer la somme par la nilpotence de N , on parvient alors à une somme finie de termes qui tendent vers 0 par croissance comparée. Une autre méthode, techniquement plus lourde, consiste à introduire $\rho_\ell^k = \max\{|(M^k)_{1,\ell+1}|, \dots, |(M^k)_{n-\ell,n}|\}$ qui majorent les coefficients de M^k situés sur la diagonale (pour $\ell = 0$), sur la sur-diagonale (pour $\ell = 1$) etc.

En notant que $\rho = \rho_0^1 < 1$, on montre par récurrence sur k que

$$\rho_\ell^k \leq k^\ell \|M\|_\infty^{\ell+1} \rho^{k-\ell} \text{ ce qui permet de conclure.}$$

(ii) \implies (iii) Supposons que $M^k \rightarrow 0$. On peut alors affirmer que 1 n'est pas valeur propre de M car $MX = X \implies M^k X = X$ et donc à la limite

$MX = X \implies X = 0$. Par suite la matrice $I - M$ est inversible et puisque $(I - M) \sum_{k=0}^m M^k = I - M^{m+1}$, $\sum_{k=0}^m M^k = (I - M)^{-1}(I - M^{m+1})$ d'où la convergence de la série des M^k .

(iii) \implies (i) Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Puisque $\sum_{k=0}^m M^k$ converge quand $\text{rg } C \geq r$, on a $\sum_{k=0}^m M^k X$ converge, puis $\sum_{k=0}^n \lambda^k X$ converge et donc $|\lambda| < 1$ (car $X \neq 0$).

Exercice 37 : [énoncé]

D'une part

$${}^t(A^k) \rightarrow {}^tB$$

et d'autre part

$${}^t(A^k) = (-1)^k A^k$$

de sorte que

$${}^t(A^{2p}) = (-1)^{2p} A^{2p} \rightarrow B$$

et

$${}^t(A^{2p+1}) = (-1)^{2p+1} A^{2p+1} \rightarrow -B.$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$B = {}^tB = -B.$$

On en déduit que la matrice B est nulle.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

Aussi $\|y\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ donc

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

(b) Sur \mathbb{R}^2 avec $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, il y a égalité pour $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

(c) On a déjà

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Or $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2)$$

aussi

$$\|y\|^2 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$$

donc

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

puis

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$

qui permet de conclure.

(d) Non, sur \mathbb{R}^2 , il y a égalité pour $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

Exercice 39 : [énoncé]

Considérons $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ des réels deux à deux distincts et $\varphi: \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_d)).$$

L'application φ est un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimensions finies, c'est aussi une application linéaire continue car les espaces engagés sont de dimensions finies et il en est de même de φ^{-1} .

En notant f la limite simple de (f_n) , on a $\varphi(f_n) \rightarrow (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$. En notant P l'élément de $\mathbb{R}_d[X]$ déterminé par $\varphi(P) = (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$, on peut écrire $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(P)$. Par continuité de l'application φ^{-1} , on a donc $f_n \rightarrow P$ dans $\mathbb{R}_d[X]$. En choisissant sur $\mathbb{R}_d[X]$, la norme équivalente $\|\cdot\|_{\infty, [a; b]}$, on peut affirmer que (f_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a; b]$.

En particulier (f_n) converge simplement vers P et en substance $P = f$.

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Pour $f \in E$, $\Phi(f) \in E$ car $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)$ est continue et on intègre sur un segment. La linéarité de Φ est évidente.

(b) On a

$$\|\Phi(f)\|_{\infty} \leq \|K\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$$

et

$$\|\Phi(f)\|_1 \leq \iint_{[0; 1]^2} |K(x, y)f(y)| \, dx \, dy \leq \|K\|_{\infty} \|f\|_1$$

donc Φ est continue pour $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_1$.

(c) On a

$$(\Phi(f) | g) = \iint_{[0; 1]^2} K(x, y)f(y)g(x) \, dx \, dy = (f | \Phi(g))$$

car

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, K(x, y) = K(y, x).$$

(d) Rappelons que l'espace normé $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ est complet.

Avec plus de finesse que dans les inégalités du b), on peut affirmer

$$\|\Phi(f)\|_{\infty} \leq \Omega^{-1} \|f\|_{\infty}.$$

Pour $h \in E$ et $|\lambda| < \Omega$, L'application $T: f \mapsto \lambda\Phi(f) + h$ est $\lambda\Omega$ -lipschitzienne avec $|\lambda\Omega| < 1$. Par le théorème du point fixe dans un espace complet, l'application T admet un unique point fixe et donc il existe un unique $f \in E$ vérifiant $h = f - \lambda\Phi(f)$.

(e) Soit (f_1, \dots, f_p) une famille orthonormée d'éléments de $\text{Ker}(\Phi - \lambda\text{Id})$. Soit $y \in [0; 1]$ fixé et $\varphi: x \mapsto K(x, y)$. On peut écrire $\varphi = \sum_{j=1}^p \mu_j f_j + \psi$ avec $\psi \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)^{\perp}$ et

$$\mu_j = (f_j | \varphi) = \int_0^1 K(x, y)f_j(x) \, dx = \lambda f_j(y).$$

Par orthogonalité

$$\int_0^1 \varphi^2(x) \, dx = \sum_{j=1}^p \mu_j^2 + \|\psi\|_2^2 \geq \sum_{j=1}^p \mu_j^2.$$

En intégrant on obtient

$$\iint_{[0; 1]^2} K(x, y)^2 \, dx \, dy \geq \sum_{j=1}^p \int_0^1 \lambda^2 f_j^2(y) \, dy = \lambda^2 p$$

car les f_j sont unitaires. Par suite $\text{Ker}(\Phi - \lambda\text{Id})$ est de dimension finie et sa dimension vérifie l'inégalité proposée.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

$$0 \leq \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f - P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f - P) \leq (b - a)\|f\|_{\infty}\varepsilon.$$

En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient $\int_a^b f^2 = 0$ et donc $f = 0$.

(b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties,

$$(n + 1)I_n = (1 - i)I_{n+1}.$$

Or $I_0 = \frac{1+i}{2}$ donc

$$I_n = \frac{(1 + i)^{n+1}}{2^{n+1}} n!$$

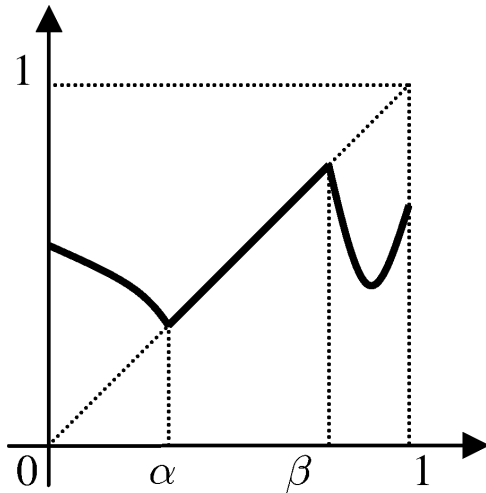
(c) $I_{4p+3} \in \mathbb{R}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4p+3} \sin(x)e^{-x} \, dx = 0$$

puis

$$\int_0^{+\infty} u^p \sin(u^{1/4})e^{-u^{1/4}} \, du = 0$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.



Exercice 42 : [énoncé]

(a) Soit f solution. Formons

$$A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}.$$

On a évidemment $A \subset \text{Im } f$, mais inversement, pour $x \in \text{Im } f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x.$$

Ainsi $\text{Im } f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \text{Im } f$.

On en déduit que A est un segment de \mathbb{R} de la forme $[\alpha; \beta]$ car c'est l'image d'un segment par une fonction réelle continue.

Pour tout $x \in [\alpha; \beta]$, $f(x) = x$ et pour tout $x \in [0; \alpha[\cup]\beta; 1]$, $f(x) \in [\alpha; \beta]$. Inversement, une fonction continue vérifiant les deux conditions précédente est solution.

Cela peut apparaître sous la forme d'une fonction ayant l'allure suivante

(b) Soit f solution dérivable.

Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.

Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha; \beta]$.

Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieure à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.

De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f: x \in [0; 1] \mapsto x$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Notons C l'espace des suites convergentes de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Soit (u^n) une suite convergente d'éléments de C de limite u^∞ .

Pour chaque n , posons $\ell^n = \lim u^n = \lim_{p \rightarrow +\infty} u_p^n$.

Par le théorème de la double limite appliquée à la suite des fonctions u^n , on peut affirmer que la suite (ℓ^n) converge et que la suite u^∞ converge vers la limite de (ℓ^n) . En particulier $u^\infty \in C$.

(b) Notons A l'espace des suites dont le terme général est terme général d'une série absolument convergente.

Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}.$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de A et une étude en norme $\|\cdot\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \rightarrow u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de A , la partie A n'est pas fermée.

Exercice 44 : [énoncé]

Soit f une fonction élément de E . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A vérifiant

$$\int_A^{+\infty} f^2(t) dt \leq \varepsilon.$$

Considérons alors la fonction $\varphi: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$ pour $t \in [0; A]$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geq A+1$ et $\varphi(t) = 1 - (t - A)$ pour $t \in [A; A+1]$. La fonction $f\varphi$ est éléments de E_0 et

$$\|f - f\varphi\|_2 \leq \sqrt{\int_A^{+\infty} f^2(t) dt} \leq \varepsilon.$$

Ainsi E_0 est dense dans E .

Pour montrer maintenant que F est dense dans E , nous allons établir que F est dense dans E_0 .

Soit f une fonction élément de E_0 . Remarquons

$$\int_0^{+\infty} (f(t) - P(e^{-t})e^{-t^2/2})^2 dt = \int_0^1 (f(-\ln u)e^{(\ln u)^2/2} - P(u))^2 \frac{e^{-(\ln u)^2}}{u} du.$$

La fonction $u \mapsto \frac{e^{-(\ln u)^2}}{u}$ est intégrable sur $]0; 1]$ car $\sqrt{u} \frac{e^{-(\ln u)^2}}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$.

La fonction $g: u \mapsto f(-\ln u)e^{(\ln u)^2/2}$ peut-être prolongée par continuité en 0 car f est nulle en dehors d'un segment. Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\|g - P\|_{\infty, [0;1]} \leq \varepsilon$ et pour $\varphi: t \mapsto P(e^{-t})e^{-t^2/2}$ on a alors

$$\|f - \varphi\|_2 \leq \lambda\varepsilon \text{ avec } \lambda = \sqrt{\int_0^1 \frac{e^{-(\ln u)^2}}{u} du}.$$

Cela permet de conclure à la densité proposée.

Exercice 45 : [énoncé]

Soit $P \in O_n$. En notant $x_1 < \dots < x_n$ ses racines, on peut écrire

$$P = \alpha(X - x_1) \dots (X - x_n)$$

avec $\alpha \neq 0$.

Posons y_1, \dots, y_{n-1} les milieux des segments $[x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$.

Posons aussi $y_0 \in]-\infty; x_1[$ et $y_n \in]x_n; +\infty[$.

$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n\alpha$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}\alpha, \dots, P(y_{n-1})$ est du signe de $(-1)\alpha$, $P(y_n)$ du signe de α . Pour simplifier l'exposé de ce qui suit, on va supposer $\alpha > 0$. La résolution se transposera aisément au cas $\alpha < 0$.

Considérons l'application

$$f_i: Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i).$$

L'application f_i est continue et donc $f_j^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $f_j^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}_n[X]$.

Considérons U l'intersection des ouverts

$$f_0^{-1}((-1)^n\mathbb{R}_+^*), f_1^{-2}((-1)^{n-1}\mathbb{R}_+^*), \dots, f_n^{-1}(\mathbb{R}_+^*).$$

Les éléments de U sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0 < y_1 < \dots < y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $U \subset O_n$. Or $P \in U$ et U est ouvert donc U est voisinage de P puis O_n est voisinage de P .

Au final O_n est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.

Dans le cas $n = 1$: $F_n = O_n$ et donc F_n est ouvert.

Dans le cas $n = 2$: F_n réunit les polynômes $P = aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac > 0$ (que a soit égal à 0 ou non). L'application $P \mapsto b^2 - 4ac$ étant continue, on peut affirmer que F_n est encore ouvert car image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Dans le cas $n \geq 3$: $P_n = X(1 + X^2/n)$ est une suite de polynômes non scindés convergeant vers X scindé à racines simples. Par suite F_n n'est pas ouvert.

Exercice 46 : [énoncé]

- (a) Par définition de l'ensemble E , l'application $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie. Soient $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|a + b\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) = \|a\| + \|b\|$$

avec convergence des séries écrites, et

$$\|\lambda.a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| |a_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = |\lambda| \|a\|.$$

Enfin, si $\|a\| = 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq \|a\| = 0$$

donne $(a_n)_{n \geq 0} = (0)_{n \geq 0}$

- (b) Considérons la forme linéaire

$$\varphi: (a_n)_{n \geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

On vérifie

$$\forall a = (a_n)_{n \geq 0} \in E, |\varphi(a)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \|a\|.$$

La forme linéaire φ est donc continue.

Puisque $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ avec $\{1\}$, la partie F est fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue.

Posons $e = (1, 0, 0, \dots)$ et un élément de F et

$$\forall \alpha > 0, e + \alpha e \notin F \text{ et } \|e - (e + \alpha e)\| = \alpha.$$

On en déduit que F n'est pas un voisinage de son élément e et par conséquent la partie F n'est pas ouverte.

Posons $\alpha^p = e + p.(1, -1, 0, 0, \dots)$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \alpha^p \in F \text{ et } \|\alpha^p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La partie F n'est donc pas bornée.

Exercice 47 : [énoncé]

(a) Soit $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de Γ_f . On suppose que la suite $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ converge vers (x_∞, y_∞) . Puisque $y_n = f(x_n)$, on obtient à la limite $y_\infty = f(x_\infty)$ car f est continue. La partie Γ_f est alors fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

(b) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $a \in \mathbb{R}$ et $(y_n) = (f(x_n))$ son image. Soit b une valeur d'adhérence de (y_n) . Il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$y_{\varphi(n)} \rightarrow b.$$

On a alors

$$(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \rightarrow (a, b).$$

Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe Γ_f qui est supposé fermé. On en déduit $(a, b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$.

Ainsi, la suite (y_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Or elle évolue dans un compact car bornée en dimension finie et donc, si elle ne possède qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.

Par la caractérisation séquentielle, on peut conclure que f est continue en a .

(c) Non, on obtient un contre-exemple avec la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est fermée car réunion de deux fermés

$$\{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

mais cette fonction n'est pas continue.

Exercice 48 : [énoncé]

(a) Par définition

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le réel $d(x, F) + 1/(n + 1)$ ne minore par l'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ et donc il existe $y_n \in F$ tel que

$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n + 1}.$$

En faisant varier n , cela détermine une suite (y_n) d'éléments de F vérifiant

$$\|x - y_n\| \rightarrow d(x, F).$$

Cette suite est bornée et évolue dans l'espace vectoriel normé F qui est de dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence y dans F pour laquelle on obtient

$$d(x, F) = \|x - y\|.$$

(b) Puisque $F \neq E$, il existe un vecteur x de E n'appartenant pas à F . On vérifie aisément

$$d(\lambda x, F) = |\lambda|d(x, F)$$

car pour $\lambda \neq 0$

$$\{\|\lambda x - y\| \mid y \in F\} = \{\|\lambda(x - y')\| \mid y' \in F\}.$$

Il est donc possible de choisir x vérifiant $d(x, F) = 1$.

Pour tout vecteur $y \in F$, on a aussi $d(x - y, F) = 1$ car

$$\{\|x - z\| \mid z \in F\} = \{\|x - y - z'\| \mid z' \in F\}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver $y \in F$ tel que $\|x - y\| = 1$. Le vecteur $y \in F$ vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$ convient. Le vecteur $u = x - y$ est alors solution.

(c) Si E est de dimension finie, la boule B est compacte car fermée et bornée en dimension finie.

Inversement, supposons par l'absurde que B est compacte et E de dimension infinie. Par récurrence, on construit une suite (u_n) de vecteurs de E en posant u_0 un vecteur unitaire quelconque, puis une fois u_0, \dots, u_n déterminés, on définit u_{n+1} de sorte que

$$d(u_{n+1}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)) = \|u_{n+1}\| = 1.$$

Cette construction est possible par l'étude qui précède car E est supposé de dimension infinie.

La suite (u_n) ainsi définie est une suite d'éléments du compact B , on peut donc en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$. Puisque cette suite converge

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \rightarrow 0$$

or

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \geq d(u_{\varphi(n+1)}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_{\varphi(n+1)-1})) \geq 1.$$

C'est absurde.

Exercice 49 : [énoncé]

Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $f(F)$ de limite y_∞ . On veut établir que $y_\infty \in f(F)$. Si y_∞ est l'un des éléments de la suite (y_n) l'affaire est entendue. Sans perte de généralités, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq y_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = f(x_n)$. L'ensemble $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_\infty\}$ est un compact de E_2 donc $f^{-1}(K)$ est un compact de E_1 . La suite (x_n) apparaît comme étant une suite d'éléments du compacte $f^{-1}(K)$, on peut donc en extraire une suite convergente dans la partie $x_{\varphi(n)} \rightarrow x_\infty \in f^{-1}(K)$. De plus $(x_{\varphi(n)})$ étant une suite d'éléments du fermé F , on peut affirmer $x_\infty \in F$. On va maintenant établir $y_\infty = f(x_\infty)$ ce qui permettra de conclure. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $K_N = \{y_n \mid n \geq N\} \cup \{y_\infty\}$. K_N est un compact, $f^{-1}(K_N)$ est donc fermé et par suite $x_\infty \in f^{-1}(K_N)$. Ainsi,

$$x_\infty \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} f^{-1}(K_N) = f^{-1}\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} K_N\right). \text{ Or } \bigcap_{N \in \mathbb{N}} K_N = \{y_\infty\} \text{ donc } f(x_\infty) = y_\infty.$$

Exercice 50 : [énoncé]

Notons que l'intégrale définissant a_n converge car $|\text{th } t| \leq 1$.

(a) Pour $t \geq n$,

$$\frac{\text{th } n}{t^2} \leq \frac{\text{th } t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

En intégrant et en exploitant $\text{th } n \rightarrow 1$, on obtient $a_n \sim \frac{1}{n}$.

On en déduit que $R = 1$. Pour $x = -1$, $\sum a_n x^n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.

Pour $x = 1$, $\sum a_n x^n$ diverge par l'équivalent précédent. La fonction somme est définie sur $[-1; 1[$.

(b) Pour $x \in [-1; 0]$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série $\sum a_n x^n$ et affirmer

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série. Par suite la fonction somme est continue en -1 .

(c) On a

$$\left| a_n - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1 - \text{th } n}{n}$$

donc pour $x \in [0; 1[$,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \text{th } n}{n} x^n.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \rightarrow +\infty \text{ et } n^2 \frac{1 - \text{th } n}{n} \sim 2ne^{-2n} \rightarrow 0$$

donc $\sum \frac{1 - \text{th } n}{n}$ est absolument convergente et la somme de la série entière $\sum \frac{1 - \text{th } n}{n} x^n$ est définie et continue en 1. On en déduit

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 51 : [énoncé]

$R = 1$, il y a divergence en $x = 1$ et convergence par le CSSA en $x = -1$.

La fonction somme est définie sur $[-1; 1[$.

Par application du critère spécial des séries alternées sur $[-1; 0]$,

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) x^k \right\|_{\infty, [-1; 0]} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \rightarrow 0$$

il y a donc convergence uniforme sur $[-1; 0]$ et donc continuité de la somme en -1 puis finalement sur $[-1; 1[$.

Pour étudier la fonction en 1^- , on peut exploiter l'encadrement

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit pour $x \in [0; 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 52 : [énoncé]

Posons $b_n = \frac{a_n}{n!}$, on a $b_0 = 1$ et

$$(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_{n-k} b_k.$$

Notons S la somme de la série entière $\sum b_n x^n$ et posons R son rayon de convergence.

Par récurrence, on peut affirmer $|b_n| \leq 1$ et donc $R > 0$.

Sur $]-R; R[$, la relation précédente donne a

$$S'(x) = S^2(x).$$

Après résolution, sachant que $S(0) = 1$, on obtient

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

d'où l'on tire $a_n = n!$.

Exercice 53 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^{2n+1}}{3n+2} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow x^2$ donc $R = 1$.

La fonction somme S est impaire, on se limite alors à $x > 0$.

$$\sqrt{x}S(x^{3/2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{3n+1} dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^3} dt$$

donc $S(x) = \frac{1}{x^{4/3}} \int_0^{x^{2/3}} \frac{t}{1-t^3} dt$ et il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples etc.

$$S(x) = \frac{1}{6x^{4/3}} \ln \frac{x^{4/3} + x^{2/3} + 1}{x^{4/3} - 2x^{2/3} + 1} - \frac{1}{x^{4/3}\sqrt{3}} \left(\arctan\left(\frac{2x^{2/3} + 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6} \right).$$

Exercice 54 : [énoncé]

(a) On sait que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence R (notamment car une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence). Puisque $a_n = o(a_n \ln n)$ et $a_n \ln n = o(n a_n)$ on peut affirmer par encadrement que la série entière $\sum (a_n \ln n) x^n$ a aussi pour rayon de convergence R . De plus

$$a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim a_n \ln n$$

donc la série entière $\sum \left(a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$ a encore pour rayon de convergence R .

(b) Notons que $\sum \ln n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. On sait

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc le terme générale

$$\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

est borné par un certain M .

Par suite

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M x^n = \frac{Mx}{1-x} = O\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

quand $x \rightarrow 1^-$.

Or par produit de Cauchy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 55 : [énoncé]

(a) Pour $0 < r < R$, il y a absolument convergence de $\sum a_n r^n$. On a

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n.$$

Puisque $\sum |a_n r^n|$ et $\sum |\overline{a_n} r^n|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum \sum_{k=0}^n |a_k| |\overline{a_{n-k}}| r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n d\theta.$$

Or $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta} d\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ donc, après simplification des termes nuls,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}.$$

(b) Pour $0 < r < R$ suffisamment petit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 - |f(0)|^2 d\theta.$$

Par intégration, d'une fonction négative, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0.$$

La fonction f est alors constante.

(c) Posons

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

Pour tout $r > 0$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Pour $p \geq N + 1$, on obtient

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta.$$

Or

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta \leq 2\pi \frac{(P(r))^2 + (\sum_{n=0}^N |a_n| r^n)^2}{r^{2p}} = \frac{O(r^{2N})}{r^{2p}}$$

donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2}{r^{2p}} d\theta \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour $p = N + 1$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = |a_{N+1}|^2 + \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2(n-N-1)}$$

avec

$$0 \leq \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2(n-N-1)} \leq \frac{1}{r^2} \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit $a_{N+1} = 0$ puis, en reprenant la démarche avec $p = N + 2, \dots$, on obtient successivement $a_{N+2} = 0, \dots$ et finalement $f = f_N \in \mathbb{C}_N[X]$

Exercice 56 : [énoncé](#)

Notons $\sum a_n z^n$ la série entière dont la somme est égale à f sur B° .

La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall z, z' \in B, |z - z'| \leq \delta \implies |f(z) - f(z')| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors $r = 1 - \delta$ et $g_r: z \mapsto f(rz)$.

Pour tout $z \in B$, $|z - rz| = \delta|z| \leq \delta$ donc $|f(z) - g_r(z)| \leq \varepsilon$. Ainsi $\|f - g_r\|_{\infty, B} \leq \varepsilon$

Puisque la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans B° , la série entière $\sum a_n r^n z^n$ converge uniformément vers g_r sur B . Il existe donc un polynôme P vérifiant $\|P - g_r\|_{\infty, B} \leq \varepsilon$ puis $\|f - P\|_{\infty, B} \leq 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Exercice 57 : [énoncé]

Pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan \left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha} \right) \right) = \frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{e^{-i\alpha} - x} - \frac{1}{e^{i\alpha} - x} \right).$$

On reconnaît une écriture en $(Z - \bar{Z})/2i$, c'est donc une partie imaginaire

$$\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \text{Im} \left(\frac{1}{e^{-i\alpha} - x} \right) = \text{Im} \left(\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} \right).$$

Par sommation géométrique

$$\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n$$

et donc

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan \left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha} \right) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\alpha) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\alpha) x^{n-1}.$$

Par intégration de série entière, on obtient alors la relation proposée.

Exercice 58 : [énoncé]

Posons

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

On vérifie aisément la convergence de cette intégrale et la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} avec

$$f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Pour $|x| < 1$,

$$f'(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_{3n} = 1, a_{3n+1} = -1 \text{ et } a_{3n+2} = 0.$$

En intégrant,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

avec

$$f(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, on écrit

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right]_{-\infty}^0.$$

Après calculs

$$f(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 59 : [énoncé]

(a) En posant $Y = X - 1$,

$$\frac{1}{(X+1)^m (X-1)^n} = \frac{1}{Y^n (Y+2)^m}.$$

Pour $Y \in]-1/2; 1/2[$,

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \frac{1}{2^m} \frac{1}{(1+\frac{Y}{2})^m} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-m(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!} \frac{Y^k}{2^k}.$$

Après simplifications

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{m+k}} \binom{m+k-1}{k} Y^k.$$

On en déduit que la partie polaire relative au pôle 1 est

$$\frac{a_0}{(X-1)^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{X-1} = \frac{a_0}{Y^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y}$$

avec

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{m+k}} \binom{m+k-1}{k}.$$

De même, en posant $Z = X + 1$, la partie polaire relative au pôle -1 est

$$\frac{b_0}{(X+1)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{X+1} = \frac{b_0}{Z^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{Z}.$$

avec

$$b_k = \frac{(-1)^n}{2^{n+k}} \binom{n+k-1}{k}.$$

Enfin, puisque de partie entière nulle, la fraction rationnelle étudiée est la somme des deux parties polaires proposées.

(b) En réduisant chaque partie polaire au même dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(X-1)^k}{(X-1)^n} + \frac{\sum_{k=0}^{m-1} b_k(X+1)^k}{(X+1)^m}.$$

Par conséquent, on posant

$$U(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X-1)^k \text{ et } V(X) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(X+1)^k$$

la poursuite de la réduction au même dénominateur du calcul précédent donne

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1.$$

Exercice 60 : [\[énoncé\]](#)

La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage de 0 avec

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} f(x)$$

et

$$f''(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)^{3/2}} f(x) + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} f'(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$.

Analyse :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S est solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x \in]-R; R[$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n.$$

La relation $(1+x^2)S''(x) + xS'(x) - S(x)/4 = 0$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - 1/4)a_n)x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{1}{4} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

En adjoignant les conditions initiales $S(0) = 1$ et $S'(0) = 1/2$, on parvient à

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{4p-1}} \frac{(4p-2)!}{((2p)!((2p-1)!)} \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{4p}} \frac{(4p-1)!}{(2p+1)!(2p-1)!}.$$

Synthèse :

Considérons la série entière déterminée au terme de l'analyse. Celle-ci se comprend comme la somme de deux séries entières $\sum a_{2p} x^{2p}$ et $\sum a_{2p+1} x^{2p+1}$ chacune de rayon de convergence 1 car

$$\left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = \frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)} \rightarrow 1.$$

Cette série entière est donc de rayon de convergence $R \geq 1$ et, compte tenu des calculs de l'analyse, sa somme est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0.$$

Elle vérifie de plus les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$. Puisque la fonction f est aussi solution de ce problème de Cauchy et que ce dernier possède une solution unique, on peut identifier f et la somme de la série entière.

Exercice 61 : [\[énoncé\]](#)

(a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto e^{it}$ qui est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R} .

(b) La convergence de l'intégrale définissant F provient de la convergence supposée de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(itx)^k}{k!} f(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^n \frac{(itx)^k}{k!} \right) f(t) dt$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(itx)^k}{k!} f(t) dt = \sum_{k=0}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(it)^k f(t)}{k!} dt \right) x^k$$

et

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^n \frac{(itx)^k}{k!} \right) f(t) dt \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+1} |f(t)| dt \rightarrow 0$$

compte tenu des hypothèses.

On peut alors affirmer

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} f(t) dt \right) x^k$$

avec convergence sur \mathbb{R} de la série entière considérée.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

Puisque $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$, la série n'est pas définie pour $x = 1$. En revanche, on vérifie aisément la convergence de la série en $x = -1$ en vertu du critère spécial des séries alternées. Finalement f est définie sur $[-1; 1[$.

(b) Calculons la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) (-1)^n = \sum_{p=1}^N \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) = \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{(2^N N!)^4}\right).$$

Par la formule de Stirling

$$f(1) = \ln \frac{2}{\pi}.$$

Par le changement de variable $u = 1/x$ \mathcal{C}^1 bijectif, on ne modifie par la nature de l'intégrale et on a

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(u)}}{u} du.$$

Puisque

$$\left| \int_{E(x)}^x \frac{(-1)^{E(u)}}{u} du \right| \leq \int_{E(x)}^x \frac{du}{u} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

la nature de l'intégrale et sa valeur sont données par la limite de

$$\int_1^{n+1} \frac{(-1)^{E(u)}}{u} du = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{(-1)^k}{u} du = \sum_{k=1}^n (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

On peut conclure

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} dx = \ln \frac{2}{\pi}.$$

(c) On peut écrire

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^n \varepsilon_n x^n.$$

D'une part

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$$

et d'autre part

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n| < +\infty.$$

On peut donc conclure

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 63 : [énoncé]

Par développement en série entière

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \int_{[0;1[} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk} dt.$$

Pour $n \geq 1$, il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues donc on peut donc intégrer terme à terme par le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}.$$

On a alors

$$n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

donc

$$n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 64 : [\[énoncé\]](#)

Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

somme de série entière définie sur $] -1; 1[$.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2) \times 3^n} = \sqrt[3]{9} S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{9} \int_0^{1/\sqrt[3]{3}} \frac{t dt}{1-t^3}$$

ce qui donne un résultat assez monstrueux :

$$9^{(1/3)} \left(-\frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{9} 3^{(2/3)} + \frac{1}{3}\right) \sqrt{3} + \frac{1}{6} \ln(3) + \frac{1}{6} \ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)}) - \frac{1}{3} \ln(-3^{(2/3)}+3) + \frac{1}{18} \sqrt{3} \pi \right)$$

fourni par Maple.

Exercice 65 : [\[énoncé\]](#)

(a) Posons $a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} \neq 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \rightarrow \frac{1}{2}$. $R = 2$.

(b) On sait que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt = \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t) dt.$$

Par convergence uniforme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin t}{2 - x \sin^2 t} dt.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(2-x) + x \cos^2 t} dt = \int_0^1 \frac{du}{(2-x) + xu^2}$$

puis

si $x > 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}} \arctan \sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

Si $x < 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \operatorname{argth} \sqrt{\frac{-x}{2-x}}.$$

Exercice 66 : [\[énoncé\]](#)

La suite (a_n) est bornée mais ne tend pas vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).

Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n .

En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend pas 0.

On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.

On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même sur $x = -1$.

On conclut que l'intervalle recherché est

$$]-1; 1[.$$

Exercice 67 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$. Après calculs

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi x^2$$

donc $R = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 68 : [énoncé]

Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Étudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. ($\cos((n+1)\alpha)$) est bornée donc $R \geq 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 69 : [énoncé]

- (a) Pour $t > 1$, $e^{-t^n} \rightarrow 0$ avec $0 \leq e^{-t^n} \leq e^{-t}$. Par convergence dominée $I_n \rightarrow 0$.
 (b) Par le changement de variable $u = t^n$ qui est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme,

$$I_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} e^{-u} du.$$

Par convergence dominée,

$$\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} e^{-u} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

donc

$$I_n \sim \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

- (c) Par l'équivalent précédent $R = 1$ et la série entière diverge en 1. Par application du critère spécial des séries alternées, la série entière converge en -1 .

Exercice 70 : [énoncé]

Posons

$$u(x, t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x$$

définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R} \times]0; 1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; 1[$.

Puisque

$$u(x, t) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t^x}{\ln t} \text{ et } u(x, t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\rightarrow} 1$$

la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1[$ si, et seulement si, $x > -1$.

De plus, cette fonction est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction intégrande.

On en déduit que la fonction f est définie sur $] -1; +\infty[$.

La fonction u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x.$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en t .

Pour $[a; b] \subset] -1; +\infty[$, on a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; 1[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq (1-t)t^a.$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1; +\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + C.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$$

est continue sur $]0; 1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1, elle est donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$|f(x)| \leq \int_0^1 M t^x dt = \frac{M}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit $C = 0$ puis finalement

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}.$$

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Pour $t \in]0; 1[$, on peut écrire

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}.$$

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0; 1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$$

elle-même continue par morceaux.

De plus

$$|S_n(t)| \leq \frac{2t^{a-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; 1[$.

Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

avec convergence de l'intégrale introduite.

Or

$$\int_0^1 S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb-1} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

avec convergence de la série introduite..

(b) Après calculs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 72 : [énoncé]

La fonction $u(x, t) = e^{(ix-1)t}/\sqrt{t}$ définie sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$.

$t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$u(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } t^2 u(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que la fonction donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}} dt = f(x) + ig(x)$$

est définie sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur \mathbb{R} pour chaque $t \in]0; +\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t}e^{(ix-1)t}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} pour chaque $t \in]0; +\infty[$,

$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \sqrt{t}e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par domination, on peut affirmer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{(ix-1)t} dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{2(x+i)}F(x).$$

La résolution de cette équation différentielle donne

$$F(x) = F(0) \frac{e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Enfin, sachant

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on parvient à

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2 + 1)^{1/4}}$$

d'où les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2 + 1)^{1/4}} \cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2 + 1)^{1/4}} \sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right).$$

On peut encore éventuellement « simplifier » en exploitant

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}} \text{ pour } x \in [-\pi/2; \pi/2]$$

ce qui donne

$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

et aussi

$$\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \text{signe}(x) \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}.$$

Exercice 73 : [\[énoncé\]](#)

Pour $x > 0$,

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x dx = \int_{]0;1[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(x \ln x)^n}{n!}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0; 1[$.

Les fonctions f_n sont intégrables et

$$\int_{]0;1[} |f_n| = \int_{]0;1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} dx.$$

Or

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{n}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

donc quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{]0;1[} x^n (\ln x)^n dx = -\frac{n}{n+1} \int_{]0;1[} x^n (\ln x)^{n-1} dx.$$

Ainsi

$$\int_{]0;1[} x^n (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \dots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0;1[} x^x dx$ est définie et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 74 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\left| \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \right| \leq \frac{1 \times 2}{(x+1)(x+2)} \times 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0; +\infty[$.

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \rightarrow -\infty$$

car $\ln(1 + x/k) \sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.

Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \rightarrow 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx = 0.$$

Exercice 75 : [énoncé]

Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)e^{-u} du.$$

Par convergence dominée, sachant

$$|f(u/n)| \leq \|f\|_\infty e^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \rightarrow \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u} du = f(0).$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1) \text{ et } \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Posons $g(x, t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$.

g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{e^t - 1} \cos(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Enfin $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{e^t - 1} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par domination, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 , a fortiori continue et dérivable.

(c) La décomposition

$$\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

permet d'écrire

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-nt} dt.$$

Par la majoration $|\sin(u)| \leq |u|$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} |\sin(t)e^{-nt}| \leq \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \int_{]0; +\infty[} |\sin(t)e^{-nt}| dt$ converge, on peut intégrer terme à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-nt} dt.$$

On calcule l'intégrale sommée en considérant la partie imaginaire de

$$\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-nt} dt.$$

On obtient à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Exercice 77 : [énoncé]

(a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq a\}$.

$t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω et pour $z \in \Omega_a$,

$$\left| \frac{t^z}{1+t} \right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; 1]$ car $\varphi(t) \sim t^a$ quand $t \rightarrow 0^+$.

Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur Ω_a .

Ceci valant pour tout $a > -1$, on peut encore affirmer que f est définie et continue sur Ω .

(b) On observe

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -1} f(0)$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

(c) Par intégration par parties

$$(z + 1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt.$$

Or

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 |t^{z+1}| dt$$

avec

$$|t^{z+1}| = |\exp((z+1) \ln t)| = \exp((\operatorname{Re}(z) + 1) \ln t) = t^{\operatorname{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1.

On a alors

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)+1} dt = \frac{1}{\operatorname{Re}(z) + 2} \xrightarrow{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi

$$(z + 1)f(z) \xrightarrow{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

puis

$$f(z) \underset{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2z}.$$

Exercice 78 : [énoncé]

Posons

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1 + x \cos t)}{\cos t} dt.$$

Pour $|x| > 1$, l'intégrale ne peut pas être définie.

Pour $|x| \leq 1$

En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.

Pour $x = -1$:

Quand $t \rightarrow 0^+$, $\ln(1 - \cos t) \sim 2 \ln t$

Quand $t \rightarrow 2\pi^-$, $t = 2\pi - h$, $\ln(1 - \cos t) = \ln(1 - \cos h) \sim 2 \ln h$

Pour $x = 1$, quand $t \rightarrow \pi$, $t = \pi + h$, $\ln(1 + \cos t) = \ln(1 - \cos h) \sim 2 \ln h$.

Finalement f est définie sur $[-1; 1]$.

Pour des raisons de symétrie,

$$f(x) = 2 \int_0^\pi \frac{\ln(1 + x \cos t)}{\cos t} dt.$$

Par domination sur $[-a; a]$ avec $a < 1$, f est \mathcal{C}^1 sur $] -1; 1[$ et

$$f'(x) = 2 \int_0^\pi \frac{dt}{1 + x \cos t}.$$

Par le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$,

$$f'(x) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2) + x(1-u^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = 2\pi \arcsin x$.

Exercice 79 : [énoncé]

Étudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} dt.$$

Notons $u(x, t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times]0; +\infty[$
 $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto u(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ pour chaque $t \in]0; +\infty[$ et

$$|u(x, t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0; +\infty[$.

On en déduit que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

$x \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* pour chaque $t \in]0; +\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(t^2 + x^2)(1 + t^2)}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* pour chaque $t \in]0; +\infty[$

$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{2x} \frac{1}{(1+t^2)}$$

car $2tx \leq x^2 + t^2$.

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{2a} \frac{1}{(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ fonction intégrable.

Par domination sur tout segment, on obtient f de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2 + x^2)(1 + t^2)} dt.$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1 + t^2)(x^2 + t^2)} = \frac{t}{(x^2 - 1)(1 + t^2)} - \frac{t}{(x^2 - 1)(x^2 + t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + t^2}{x^2 + t^2} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{(x^2 - 1)}.$$

Cette identité se prolonge en $x = 1$ par un argument de continuité.

On a alors

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2 - 1)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x \frac{\ln t}{(t^2 - 1)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) - f(\varepsilon).$$

Or $f(0) = 0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2 - 1)} dt = f(x).$$

Exercice 80 : [\[énoncé\]](#)

La fonction f est bien définie sur $]0; +\infty[$ et

$$xf(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1 + t^2} dt.$$

Posons

$$u(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1 + t^2}$$

définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

u admet deux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\frac{t}{1 + t^2} e^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2}{1 + t^2} e^{-tx}.$$

Pour chaque $x > 0$, les fonctions u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables et pour tout $[a; b] \subset]0; +\infty[$, on a la domination

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1 + t^2} dt$$

est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$. Il en est de même pour f par opérations sur de telles fonctions.

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1 + t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

donc $xf(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ puis

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

Étudions maintenant $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Par le changement de variable $u = tx$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{x^2 + u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x^2 + u^2} \frac{1 - e^{-u}}{u} du$$

avec

$$\varphi: u \mapsto \frac{1 - e^{-u}}{u}.$$

Par intégration par parties,

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + u^2) \varphi(u) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \ln(x^2 + u^2) \varphi'(u) du.$$

Pour $x \in]0; 1]$,

$$|\ln(x^2 + u^2)| \leq |\ln(u^2)| + |\ln(1 + u^2)|$$

et la fonction

$$u \mapsto \left(|\ln(u^2)| + |\ln(1 + u^2)| \right) \varphi'(u)$$

est intégrable sur $]0; +\infty[$ car φ' peut être prolongée par continuité en 0 et

$$\varphi'(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-u}}{u}.$$

On en déduit

$$f(x) = -\ln x + O(1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Exercice 81 : [énoncé]

$t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$,

$x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} et pour $x \in [-a; a]$

$$\left| \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \right| \leq \frac{|\ln(a^2+t^2)| + |\ln(t^2)|}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par suite f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Il est immédiat que f est paire. Poursuivons, en étudiant f sur \mathbb{R}_+^*

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \right) = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

$t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$,

$x \mapsto t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur \mathbb{R} et pour $x \in [a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} \right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable. Par suite f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Pour $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2} \right)$$

donc

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{x+1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 1$ par continuité.

En procédant au changement de variable $u = 1/t$, on obtient $f(0) = 0$ et donc on peut conclure

$$f(x) = \pi \ln(x+1)$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$ en exploitant un argument de continuité.

Exercice 82 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

En posant u_n le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.

(b) $S_{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^{n-1} dx$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permuter et obtenir

$$S_{-1} = \int_0^1 \frac{x dx}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1} \binom{2n}{n}$$

on observe

$$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \quad (*)$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$4 \left(S_0 - \frac{1}{2} \right) - 2 \left(S_{-1} - \frac{1}{2} \right) = S_0$$

puis

$$S_0 = \frac{1+2S_{-1}}{3}$$

(c) On multiplie la relation(*) par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des S_q avec $q < p$.

Exercice 83 : [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, $t^2 \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$.

Pour $x = 0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente bien que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.

(b) Pour $x \in [a; b] \subset]0; +\infty[$,

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right) \right| \leq e^{-ax} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

(c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t) e^{-tx} dt = \text{Im} \left(- \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

donc $f(x) = C - \arctan x$.

Or

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

(d) En découpant l'intégrale, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt.$$

Posons

$$u_n(t) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt.$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établit que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction f , est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 84 : [\[énoncé\]](#)

(a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$.
 $\Delta_\lambda :]0; +\infty[.$

(b)

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1) \dots (s+n)} \right).$$

Or

$$\left| 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1) \dots (s+n)} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = e^{|\lambda|}$$

donc $F_\lambda(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$.

(c) Puisque

$$\left| \frac{\lambda^n}{(s+1) \dots (s+n)} \right| \leq \frac{\lambda^n}{n!}$$

il y a convergence normale sur \mathbb{R}_+ de la série des fonctions continues $s \mapsto \frac{\lambda^n}{(s+1) \dots (s+n)}$. Ceci permet d'affirmer

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1) \dots (s+n)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$$

et donc

$$F_\lambda(s) \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{e^\lambda}{s}.$$

(d) Par intégrations par parties successives :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy = \frac{n!}{s(s+1) \dots (s+n)}.$$

(e)

$$F_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy.$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :

$$F_\lambda(s) = \int_0^1 e^{\lambda y} (1-y)^{s-1} dy.$$

Exercice 85 : [\[énoncé\]](#)

Pour $t \in]0; 1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t.$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t dt = \frac{-1}{(2n+1)^2}.$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = - \frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

Exercice 86 : [énoncé]

La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left| a_p \frac{t^p}{p!} \right| \leq \| (a_n) \|_\infty \frac{t^p}{p!}.$$

De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.

Enfin

$$\left| \sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right| \leq \| (a_n) \|_\infty e^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.

Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!} e^{-2t}.$$

La série de fonction $\sum f_p$ converge simplement.

Les fonctions f_p et $\sum_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.

Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0; +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_p(t)| dt = \frac{|a_p|}{2^{p+1}} = O\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme générale d'une série convergente.

Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) dt = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}.$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Exercice 87 : [énoncé]

Par la série exponentielle, on peut écrire pour $t > 0$,

$$t^{-t} = \exp(-t \ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t \ln t)^n}{n!}.$$

Pour procéder à une intégration terme à terme, posons $u_n(t) = (-1)^n (t \ln t)^n / n!$ pour $t \in]0; 1]$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; 1]$ vers la fonction $t \mapsto t^{-t}$ elle-même continue par morceaux.

Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0; 1]$ car on peut les prolonger par continuité en 0 et

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = (-1)^n \int_0^1 u_n(t) dt.$$

Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 (t \ln t)^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^n \right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 t^n (\ln t)^{n-1} dt.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\int_0^1 (t \ln t)^n dt = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 t^n (\ln t)^{n-1} dt.$$

En itérant le procédé on obtient

$$\int_0^1 (t \ln t)^n dt = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et ainsi

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \int_0^1 |u_n|$ étant convergente, on peut intégrer terme à terme et l'on obtient

$$\int_0^1 t^{-t} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

avec existence de l'intégrale en premier membre.

Exercice 88 : [énoncé]

On sait que la fonction ζ est continue.

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} dx$$

avec

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{n^x} = \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

Exercice 89 : [énoncé]

(a) Posons

$$f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) \right)^n.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0; \pi/2[$, elle-même continue par morceaux. Enfin, on a la domination

$$|f_n(x)| \leq 1 = \varphi(x)$$

avec φ évidemment intégrable sur $]0; \pi/2[$. Par convergence dominée, on obtient

$$u_n \rightarrow 0.$$

(b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum f_n$. En effet, les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; \pi/2[$ vers la fonction

$$f: x \mapsto \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)}$$

elle-même continue par morceaux. Enfin les fonctions f_n sont intégrables sur $]0; \pi/2[$ et l'hypothèse de travail absurde signifie la convergence de la série $\sum \int_{]0; \pi/2[} |f_n|$.

Par théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)} dx$$

avec convergence de l'intégrale. Or, quand $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)} \sim \frac{8}{\pi^2 x^2}$$

et donc l'intégrale introduite diverge. C'est absurde.

On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 90 : [énoncé]

On a $u_n \geq v_n = \int_0^{\pi/2} e^{-t} \cos^{2n} t dt$.

Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0; \pi/2[$ de la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t} \cos^{2n} t = \frac{e^{-t}}{1 - \cos^2 t} = \frac{e^{-t}}{\sin^2 t}.$$

Or quand $t \rightarrow 0^+$

$$\frac{e^{-t}}{\sin^2 t} \sim \frac{1}{t^2}$$

qui n'est pas intégrable sur $]0; \pi/2[$.

C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 91 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

Méthode de variation des constantes

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \cot x. \end{cases}$$

Après résolution et intégration

$$y(x) = -\frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + A \cos x + B \sin x.$$

Exercice 92 : [énoncé]

(a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 à coefficients constants de solution homogène

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

La méthode de variation des constantes propose une solution particulière de la forme

$$y(x) = A(x) \cos x + B(x) \sin x$$

avec A et B fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = 1/x. \end{cases}$$

En faisant $\cos(x) \times (1) - \sin(x) \times (2)$, on détermine $A'(x)$ et $B'(x)$ s'obtient de façon analogue

$$\begin{cases} A'(x) = -\sin x/x \\ B'(x) = \cos x/x. \end{cases}$$

On peut alors proposer

$$A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ et } B(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

où les intégrales introduites ont le bon goût de converger...

La solution générale de l'équation différentielle est alors

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

- (b) Posons $u(x, t) = e^{-tx}/(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0; +\infty[$.
 $x \mapsto u(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ pour chaque $t \in [0; +\infty[$
 $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$ et

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0; +\infty[$. Par domination f est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

De plus, $x \mapsto u(x, t)$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+ pour chaque $t \in [0; +\infty[$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}.$$

La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0; +\infty[$.

La dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times [0; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment, f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

On vérifie alors

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

de sorte que f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = A \cos x + B \sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

On observe

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

donc par encadrement $f \xrightarrow{+\infty} 0$ ce qui entraîne $A = B = 0$.

Ainsi

$$\forall x > 0, f(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Séparément, on calcule $f(0)$

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

- (c) Par convergence de l'intégrale, quand $x \rightarrow 0^+$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

De plus

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt = C^{te} + \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt$$

avec

$$\left| \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$$

donc

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \rightarrow 0.$$

Ainsi en passant à la limite en 0 l'expression précédente de $f(x)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 93 : [énoncé]

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont de classe \mathcal{C}^∞ car f l'est. Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

Cette solution est 2π -périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt.$$

i.e. $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille (\sin, \cos) ainsi que la 2π -périodicité de f , cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt = 0.$$

Exercice 94 : [énoncé]

Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$ est bornée. Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = f(x) - f(0) \cos x - \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt.$$

Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer f croissante et donc $f'(t) \geq 0$. Puisque $-1 \leq \cos(x-t) \leq 1$,

$$f(0) - f(x) \leq \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt \leq f(x) - f(0)$$

puis

$$f(0)(1 - \cos x) \leq \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \leq 2f(x) - f(0)(1 + \cos x).$$

La fonction f étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$.

Exercice 95 : [énoncé]

Remarquons

$$\int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt + \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt.$$

Si f est solution alors

$$f(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt$$

et donc $f(0) = 1$.

f est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = -2 \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt + 2 \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt + 2f(x)$$

et $f'(0) = 2$.

f est alors deux fois dérivable et

$$f''(x) = 1 - f(x) + 2f'(x).$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 1$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^x + 1.$$

Cela conduit à $f(x) = 2xe^x + 1$.

Inversement, soit par calculs, soit en remontant le raisonnement, on peut affirmer que la fonction proposée est solution.

Exercice 96 : [énoncé]

Soit f une fonction solution. f est dérivable et

$$f'(x) = f(1/x)$$

donc f' est encore dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

La fonction f apparaît alors comme étant solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$E: x^2 y'' + y = 0$$

E est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t = \ln x$.

Soient $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$z(t) = y(e^t)$$

z est deux fois dérivable et

$$y(x) = z(\ln x).$$

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x).$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)$$

y est solution sur \mathbb{R}_+^* de E si, et seulement si, z est solution sur \mathbb{R} de

$$F: z'' - z' + z = 0$$

F est un équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale

$$z(x) = \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) e^{x/2}.$$

La solution générale de E sur \mathbb{R}_+^* est donc

$$y(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right).$$

Revenons à la fonction f . Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right).$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left((\lambda + \mu\sqrt{3}) \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + (\mu - \lambda\sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right)$$

et donc

$$f'(x) = f(1/x) \iff \begin{cases} \lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda \\ \lambda\sqrt{3} - \mu = 2\mu \end{cases} \iff \lambda = \mu\sqrt{3}.$$

Finalement, les solutions sont les fonctions f données par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 97 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0; +\infty[$.

Sur $]0; 1[$ ou $]1; +\infty[$,

$$\int \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} dx = 3 \ln x + \ln|\ln x| + C^{te}.$$

Solution générale sur $]0; 1[$ ou $]1; +\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3 |\ln x|.$$

Solution sur $]0; +\infty[$.

Soient $y:]0; 1[\cup]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0; 1[$ et $y(x) = \mu x^3 \ln x$ sur $]1; +\infty[$.

La continuité en 1 donne $y(1) = 0$ sans conditions sur λ et μ .

La dérivabilité en 1 donne $\lambda = \mu$.

Ainsi $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0; +\infty[$ qui est évidemment solution.

Exercice 98 : [énoncé]

Par convergence absolue, on peut écrire

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!} I_n + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)!} A + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+2)!} A^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+3)!} A^3$$

ce qui donne

$$\exp(A) = \frac{\cos(1) + \text{ch}(1)}{2} I_n + \frac{\sin(1) + \text{sh}(1)}{2} A + \frac{\text{ch}(1) - \cos(1)}{2} A^2 + \frac{\text{sh}(1) - \sin(1)}{2} A^3.$$

Exercice 99 : [énoncé]

On a

$${}^t \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} ({}^t A)^k.$$

En passant à la limite et par continuité de l'application de transposition, on a

$${}^t(\exp A) = \exp({}^t A).$$

Puisque les matrices A et $-A$ commutent, on a

$${}^t(\exp A) \exp A = \exp(-A) \exp(A) = \exp(-A + A) = \exp(O_n) = I_n.$$

Ainsi la matrice $\exp A$ est orthogonale.

Exercice 100 : [\[énoncé\]](#)

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\text{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}$,

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$X' = AX \iff Y' = DY$$

or

$$Y' = DY \iff Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu e^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

donc

$$X' = AX \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

Exercice 101 : [\[énoncé\]](#)

$\chi_A = X^3 - 2X$, $\pi_A = \chi_A$. On a donc

$$A^3 = 2A, A^{2k+1} = 2^k A \text{ et } A^{2k+2} = 2^k A^2 \text{ pour } k > 0$$

avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} A + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{(2k)!} A^2 = I_3 + \frac{\text{sh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} A + \frac{1}{2} (\text{ch}(\sqrt{2}) - 1) A^2.$$

Exercice 102 : [\[énoncé\]](#)

(a) $\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2$,

$$E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $\mu_A = (X - 2)(X + 1)$.

(b) Ci-dessus.

(c) Par division euclidienne $X^n = (X + 1)(X - 2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$$

puis

$$e^A = \frac{e^2 - e^{-1}}{3} A + \frac{2e^{-1} + e^2}{3} I_3.$$

Exercice 103 : [\[énoncé\]](#)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \chi_A = -(X - 2)(X^2 - X + 1).$$

La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.

La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :

$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A , complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.

Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de tA .

$\text{Sp}({}^tA) = \text{Sp} A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \text{Vect} {}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation

$2x + y - z = 0$ est stable par tA .

Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.

Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = BY$.

Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} \\ y_2(t) = e^{\frac{1}{2}t} (\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

Exercice 104 : [\[énoncé\]](#)

$\chi_A = X(X^2 + 1)$, $\pi_A = X(X^2 + 1)$, $\exp(A) \exp({}^tA) = \exp(A) \exp(-A) = I_3$.

En calculant A^2, A^3, \dots on obtient

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 105 : [\[énoncé\]](#)

$A^2 = O$ donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Puisque $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable. $\pi_A = X^2$ et $\chi_A = -X^3$.

$$\exp(A) = I + A.$$

L'étude se généralise pour $n \geq 3$ avec $A = (\omega^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\omega \in U_n \setminus \{1\}$.

Exercice 106 : [\[énoncé\]](#)

(a) Cas $|x| < 1$:

$$|u_n(x, y)| = o(x^n)$$

donc la série $\sum u_n(x, y)$ est absolument convergente.

Cas $|x| > 1$:

Si la série $\sum u_n(x, y)$ converge alors $u_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\cos(ny) = u_n(x, y) \frac{\sqrt{n}}{x^n} \rightarrow 0$$

par croissance comparée.

Mais alors

$$\cos(2ny) = 2 \cos^2(ny) - 1 \rightarrow -1$$

ce qui est incohérent avec l'affirmation qui précède.

Ainsi la série $\sum u_n(x, y)$ diverge.

Cas $x = 1$:

Si $y = 0 [2\pi]$ alors $u_n(1, y) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n(1, y)$ diverge.

Si $y \neq 0 [2\pi]$ alors par une transformation d'Abel, on obtient la convergence de la série $\sum u_n(1, y)$.

Cas $x = -1$:

On remarque

$$u_n(-1, y) = u_n(1, y + \pi).$$

Ainsi $\sum u_n(-1, y)$ converge si, et seulement si, $y \neq \pi [2\pi]$.

Finalement

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\} \cup \{(1, y)/y \neq 0 [2\pi]\} \cup \{(-1, y)/y \neq \pi [2\pi]\}.$$

(b) L'intérieur de D est alors

$$D^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}.$$

Soient $a \in [0; 1[$ et $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < a\}$.

u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur D_a et la série de fonctions $\sum u_n(x, y)$ converge simplement sur D_a .

La série de fonctions $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)$ converge normalement sur D_a via

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| \leq \sqrt{n} a^{n-1}.$$

Enfin, la série de fonctions $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y)$ converge normalement sur D_a via

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq \sqrt{n} a^n.$$

On peut alors appliquer les théorèmes usuels qui affirment que

$$(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y)$$

admet deux dérivées partielles continues sur D_a . C'est donc une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur D_a . Enfin, ceci valant pour tout $a \in [0; 1[$, on obtient une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'intérieur de D .

Exercice 107 : [énoncé]

En passant en coordonnées polaires, on écrit

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

On a alors

$$f(x, y) = r^2 \cos \theta \sin \theta \cos(2\theta) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

On prolonge f par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.
Par opérations sur les fonctions, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .

L'étude pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique puisque

$$f(x, y) = -f(y, x).$$

Ainsi f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Cependant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1$$

alors que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

La fonction f ne peut donc être de classe \mathcal{C}^2 .

Exercice 108 : [énoncé]

- (a) On passe en coordonnées polaires avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(x/y)$ de sorte que $x = r \sin \theta$ et $y = r \cos \theta$.

On parvient à

$$f(x, y) = C(x/y)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$$

avec C une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur \mathbb{R} .

- (b) Idem, on parvient à

$$f(x, y) = \frac{2}{3} \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3} + C(x/y)$$

avec C une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur \mathbb{R} .

Exercice 109 : [énoncé]

La fonction $f: (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 .

Après résolution ses points critiques sont : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

En $(0, 0)$: $f(0, 0) = 0$, $f(1/n, 0) \sim -2/n^2 < 0$ et $f(1/n, 1/n) \sim 2/n^4 > 0$.

Pas d'extremum local en $(0, 0)$

En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $r = 20$, $t = 20$ et $s = 4$. $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$.

Il y a un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$f(\sqrt{2} + u, -\sqrt{2} + v) = -8 + 10(u^2 + v^2) + 4uv + 4\sqrt{2}(u^3 - v^3) + u^4 + v^4.$$

On exploite

$$2(u^2 + v^2) + 4uv = 2(u + v)^2 \text{ et } 8u^2 + 4\sqrt{2}u^3 + u^4 = u^2(u + 2\sqrt{2})^2$$

pour affirmer

$$f(\sqrt{2} + u, -\sqrt{2} + v) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + 2(u + v)^2 + u^2(u + 2\sqrt{2})^2 + v^2(v + 2\sqrt{2})^2.$$

Ainsi $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum global.

En $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: l'étude est identique puisque $f(x, y) = f(y, x)$.

Exercice 110 : [énoncé]

- (a) Puisque la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 , on peut écrire

$$g(x) = g(y) + \int_y^x g'(t) dt.$$

Par le changement de variable $t = y + u(x - y)$, on obtient

$$g(x) = g(y) + (x - y) \int_0^1 g'(y + u(x - y)) du.$$

Ainsi

$$f(x, y) = \int_0^1 g'(y + u(x - y)) du$$

et cette relation vaut pour $x \neq y$ et aussi pour $x = y$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.

L'application $\varphi: (x, u) \mapsto g'(y + u(x - y))$ admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) = ug''(y + u(x - y)).$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en u
 Pour $[a; b] \subset \mathbb{R}$ assez grand pour que y en soit élément, on a

$$\forall x \in [a; b], \forall u \in [0; 1], y + u(x - y) \in [x; y] \subset [a; b].$$

La fonction g'' est continue donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ sur le segment $[a; b]$. On a alors

$$\forall (x, u) \in [a; b] \times [0; 1], \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) \right| \leq M = \psi(u).$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0; 1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer que l'application $x \mapsto \int_0^1 \varphi(x, u) du$ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^1 \varphi(x, u) du \right) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) du.$$

Ainsi f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 ug''(y + u(x - y)) du.$$

De plus, la fonction $(x, y, u) \mapsto ug''(y + u(x - y))$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times [0; 1]$ et par une domination sur $[a; b] \times [a; b]$, on obtient la continuité sur \mathbb{R}^2 de l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$.

De même, on montre que la deuxième dérivée partielle de f existe et est continue.

Exercice 111 : [énoncé]

(a) L'application ϕ est clairement un endomorphisme de E .

Posons $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan \frac{y}{x}$,
 $(r, \theta) \in V = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[$

Pour $f \in E$, on considère $g \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
 On remarque

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Ainsi

$$\Phi(f) = 0 \iff r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

pour tout $(r, \theta) \in V$.

La résolution de cette équation aux dérivées partielles donne $g(r, \theta) = C(\theta)$ avec C de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-\pi/2; \pi/2[$.

Par suite on obtient la solution générale $f(x, y) = C(\arctan(y/x)) = D(y/x)$ avec D fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

(b) Si f est homogène de degré α alors en dérivant la relation

$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ par rapport à t puis en évaluant le résultat en $t = 1$ on obtient l'égalité $\Phi(f) = \alpha f$.

Inversement si $\Phi(f) = \alpha f$ alors en introduisant g comme ci-dessus, on obtient

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \alpha g(r, \theta)$$

ce qui donne $g(r, \theta) = C(\theta)r^\alpha$ puis

$$f(x, y) = D(y/x)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$$

avec D fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Il est alors facile de vérifier que f est homogène de degré α .

(c) La fonction h est homogène de degré 5, donc $h/5$ est solution particulière de l'équation linéaire $\Phi(f) = h$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors le sous-espace affine $h/5 + \text{Ker } \Phi$.

Exercice 112 : [énoncé]

Notons A, B, C les points définissant notre triangle et O le centre du cercle circonscrit.

En introduisant les mesures α, β, γ des angles $(\vec{OC}, \vec{OB}), (\vec{OB}, \vec{OA})$ et (\vec{OA}, \vec{OB}) , on vérifie

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad [2\pi]$$

et on peut calculer l'aire algébrique des triangles $(OAB), (OBC)$ et (OCA) qui sont respectivement

$$\frac{1}{2}r^2 \sin \alpha, \frac{1}{2}r^2 \sin \beta \text{ et } \frac{1}{2}r^2 \sin \gamma = -\frac{1}{2}r^2 \sin(\alpha + \beta).$$

L'aire algébrique du triangle (ABC) est alors

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}r^2(\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)).$$

L'étude des points critiques de cette fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; 2\pi[$ conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos(\alpha + \beta) \\ \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

dont les seules solutions dans $]0; 2\pi[$ sont

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right).$$

Ce sont les situations des triangles équilatéraux resp. direct et indirect. L'extremum trouvé vaut

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Exercice 113 : [\[énoncé\]](#)

Soit $x > 0$ fixé.

L'application $y \mapsto f(x, y)$ a pour dérivée $2y - \frac{a}{xy^2}$, elle donc minimale pour

$$y = \sqrt[3]{\frac{a}{2x}}.$$

Considérons

$$g: x \mapsto f(x, \sqrt[3]{\frac{a}{2x}}) = x^2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{x^2}}$$

g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $g'(x) = 2x - \frac{\sqrt[3]{2a^2}}{x^{5/3}}$,

$$g'(x) = 0 \iff 2x^{8/3} = 2^{1/3}a^{2/3} \iff x = \sqrt[4]{\frac{a}{2}}.$$

g est minimale pour $x = \sqrt[4]{a/2}$, puis f admet un minimum en $(\sqrt[4]{a/2}, \sqrt[4]{a/2})$ de valeur $2\sqrt{2a}$.

Exercice 114 : [\[énoncé\]](#)

Par dérivation de fonctions composées

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n).$$

Exercice 115 : [\[énoncé\]](#)

(a) En polaires, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

$$f_p(x, y) = (\cos \theta + \sin \theta)^p r^p \sin \frac{1}{r}.$$

Si $p \geq 1$ alors $|f_p(x, y)| \leq 2^p r^p \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ et on peut prolonger f par continuité en $(0, 0)$.

Si $p = 0$ alors $f_0(x, y) = \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ diverge car le sinus diverge en $+\infty$.

(b) On suppose $p \geq 1$.

Pour $p = 2$:

$$f_2(x, y) = (x + y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = O(\|(x, y)\|^2)$$

ce qui s'apparente à un développement limité à l'ordre 1 en $(0, 0)$.

La fonction f_2 est donc différentiable en $(0, 0)$ de différentielle nulle.

Pour $p > 2$:

$$f_p(x, y) = (x + y)^{p-2} f_2(x, y).$$

La fonction f_p est différentiable par produit de fonctions différentiables.

Pour $p = 1$:

Quand $h \rightarrow 0^+$,

$$\frac{1}{h}(f_1(h, 0) - f_1(0, 0)) = \sin \frac{1}{h}$$

diverge. Ainsi f n'est pas dérivable en $(0, 0)$ selon le vecteur $(1, 0)$, elle ne peut donc y être différentiable.