**Exercice 1** [ 02796 ] [Correction]
Soit $(u_n)$ une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = 2^n u_{2^n}$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

**Exercice 2** [ 02797 ] [Correction]
Soit $(u_n)$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}_+$, de limite 0. Pour $n \geq 1$, on pose

$$v_n = n^2 u_{n^2}$$

Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ ?

**Exercice 3** [ 02803 ] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1}$$

**Exercice 4** [ 02806 ] [Correction]
Nature et calcul de la somme de la série de terme général

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

**Exercice 5** [ 02790 ] [Correction]
Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$$

où $a > 0$.

**Exercice 6** [ 03879 ] [Correction]
On donne une suite réelle $(a_n)$.
On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge.

**Exercice 7** [ 02791 ] [Correction]
Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 8** [ 02800 ] [Correction]

(a) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0, \sum |v_n| \text{ converge et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

Montrer que $(n^\lambda u_n)$ converge.

(b) Nature de la série de terme général

$$\frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n} \,?$$

**Exercice 9** [ 02799 ] [Correction]
Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$u_n^{1/n} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

La série de terme général $u_n$ converge-t-elle ?

**Exercice 10** [ 02793 ] [Correction]
Convergence de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

**Exercice 11** [ 02802 ] [Correction]
Soient $(a, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n = a^{\sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha}$$

(a) Pour quels couples $(a, \alpha)$ la suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Dans la suite, on suppose que tel est le cas, on note $\ell = \lim u_n$ et on pose, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n - \ell$$

(b) Nature des séries de termes généraux $v_n$ et $(-1)^n v_n$.

**Exercice 12** [ 02784 ] [Correction]
Soit $u_0 \in ]0\,;2\pi[$ puis
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n/2)$$

(a) Montrer que $(u_n)$ tend vers 0.

(b) Montrer que $\lim(2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.

(c) Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

**Exercice 13** [ 02809 ] [Correction]
On pose
$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

(a) Montrer que la suite $(a_n)$ converge et trouver sa limite $\lambda$.

(b) Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

**Exercice 14** [ 02804 ] [Correction]
Convergence puis calcul de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

**Exercice 15** [ 02792 ] [Correction]
Nature de la série de terme général
$$\frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^n \ln^2 k}$$
où $\alpha$ est réel.

**Exercice 16** [ 02789 ] [Correction]
Nature de la série de terme général
$$\frac{\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2} \right\rfloor + n}$$

**Exercice 17** [ 02798 ] [Correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) \neq 0$. Étudier la convergence de la série de terme général
$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 18** [ 02805 ] [Correction]
Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

**Exercice 19** [ 02795 ] [Correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}$$
Nature de la série de terme général $u_n$ ?

**Exercice 20** [ 02810 ] [Correction]
On pose $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ pour tout $x \geq 1$ et $u_n = \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ pour tout entier $n \geq 2$.

(a) Montrer que $f'$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

(b) Montrer que la série de terme général $u_n$ est absolument convergente.

(c) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.

(d) En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.

**Exercice 21** [ 03750 ] [Correction]
Soit $(u_n)$ une suite réelle strictement positive et convergeant vers 0. On pose
$$v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n} \text{ avec } S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

**Exercice 22** [ 03119 ] [Correction]
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ dans $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$$

Montrer que si la série de terme général $v_n$ converge alors la série de terme général $u_n$ diverge.

**Exercice 23** [ 03882 ] [Correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(3k-1)^{1/n}$$

**Exercice 24** [ 03881 ] [Correction]
Pour $a > 0$, étudier la convergence de

$$\sum_{n\geq 1} a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

**Exercice 25** [ 02822 ] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable.

(a) Si $f'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Si $|f'(x)| \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, montrer que $f$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 26** [ 02819 ] [Correction]
On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour $x$ réel non nul et $f(0) = 0$.

(a) Montrer l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un polynôme $P_n$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = x^{-3n}P_n(x)f(x)$$

Quel est le degré de $P_n$ ?

(b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, toutes ses dérivées étant nulles en 0.

(c) Montrer que toute racine de $P_n$ est réelle.

**Exercice 27** [ 02812 ] [Correction]
Soit $f\colon ]0\,;+\infty[ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x/2)}{\sqrt{x}} = 1$$

Trouver un équivalent simple en 0 de $f$.

**Exercice 28** [ 02813 ] [Correction]
Soient $f$ et $g$ des fonctions continues de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$ telles que $f\circ g = g\circ f$.

(a) Montrer que l'ensemble des points fixes de $f$ possède un plus grand et un plus petit élément.

(b) Montrer l'existence de $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

**Exercice 29** [ 02421 ] [Correction]
Convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 30** [ 02826 ] [Correction]
Calculer

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$$

où $a > 0$.

**Exercice 31** [ 02827 ] [Correction]
Trouver une expression simple de

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{(1-2x\cos t+x^2)(1-2y\cos t+y^2)}\,\mathrm{d}t$$

où $x, y \in \left]-1\,;1\right[$.

**Exercice 32** [ 02879 ] [Correction]

(a) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On pose pour tout réel $x$

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

(c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 33** [ 02829 ] [Correction]
Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable et non bornée.

**Exercice 34** [ 02824 ] [Correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

**Exercice 35** [ 02825 ] [Correction]
Existence et calcul éventuel de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+ib)^2}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 36** [ 03884 ] [Correction]
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'existence et déterminer l'éventuelle valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}$$

**Exercice 37** [ 02834 ] [Correction]
Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

(a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$ ?

(b) Pour quels réels $x$ la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?

(c) Si

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

montrer que $F$ est continue sur $[-1\,;1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

(d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

**Exercice 38** [ 02839 ] [Correction]
On pose

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel $x \in [0\,;1]$ et tout entier naturel $n$.
Montrer que la série de terme général $u_n$ est normalement convergente.

**Exercice 39** [ 02833 ] [Correction]
On note $U$ l'ensemble des complexes de module 1 et on considère $\omega$ un complexe de module $\neq 1$.
Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$$

soit limite uniforme sur $U$ d'une suite de fonctions polynomiales.

**Exercice 40** [ 03754 ] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable.
Montrer l'existence d'une fonction $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x+1) - g(x) = f(x)$$

**Exercice 41** [ 02830 ] [Correction]
On pose, pour $x \geq 0$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 42** [ 02835 ] [Correction]
Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$
(a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(b) Montrer
$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$
(c) Montrer que $\Gamma$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 43** [ 02836 ] [Correction]
Soit $\alpha$ un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x$, on pose
$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$$
On note $I$ le domaine de définition de
$$S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$
(a) Déterminer $I$.

(b) Montrer que $S$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ ?

(d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$
ne tend pas vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.
La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur $I$ ?

(e) Étudier la continuité de $S$ sur $I$.

**Exercice 44** [ 02837 ] [Correction]
On pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$
Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de $S$. Donner un équivalent de $S$ en 0 et en $1^-$.

**Exercice 45** [ 03203 ] [Correction]
Définition, continuité et dérivabilité de
$$S\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

**Exercice 46** [ 02728 ] [Correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence de :
(i) toute valeur propre de $M$ est de module strictement inférieur à 1 ;
(ii) la suite $(M^k)$ tend vers 0 ;
(iii) la série de terme général $M^k$ converge.

**Exercice 47** [ 03925 ] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que dire de $B$ ?

**Exercice 48** [ 02766 ] [Correction]
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(a) Montrer que pour tous $x, y \in E$
$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$
(b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Désormais la norme est euclidienne.

(c) Montrer que pour tous $x, y \in E$
$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$
(d) Peut-on améliorer la constante$\sqrt{2}$ ?

**Exercice 49** [ 02832 ] [Correction]
Soient $d$ un entier naturel et $(f_n)$ une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus $d$. On suppose que cette suite converge simplement.
Montrer que la limite est polynomiale de degré au plus $d$, la convergence étant de plus uniforme sur tout segment.

**Exercice 50** [ 02741 ] [Correction]
Soit $K \in \mathcal{C}\left([0;1]^2,\mathbb{R}\right)$ non nulle telle que

$$\forall (x,y) \in [0;1]^2, K(x,y) = K(y,x)$$

On note $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, soit

$$\Phi(f)\colon x \in [0;1] \to \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}$$

(a) Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

(b) L'application $\Phi$ est-elle continue pour $\|\|_\infty$ ? pour $\|\|_1$ ?

(c) Montrer que

$$\forall f,g \in E, (\Phi(f) \mid g) = (f \mid \Phi(g))$$

Soit

$$\Omega = \left(\max_{0\le x\le 1} \int_0^1 |K(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)^{-1}$$

(d) Montrer

$$\forall \lambda \in \left]-\Omega;\Omega\right[, \forall h \in E, \exists! f \in E, h = f - \lambda\Phi(f)$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, montrer que :

$$\dim\ker(\Phi - \lambda\,\mathrm{Id}) \le \frac{1}{\lambda^2}\iint_{[0;1]^2} K(x,y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

**Exercice 51** [ 02828 ] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

(a) Montrer que la fonction $f$ est nulle.

(b) Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x$$

(c) En déduire qu'il existe $f$ dans $\mathcal{C}([0;+\infty[,\mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, on ait

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

**Exercice 52** [ 02774 ] [Correction]

(a) Chercher les fonctions $f\colon [0;1] \to [0;1]$ continues vérifiant

$$f \circ f = f$$

(b) Même question avec les fonctions dérivables.

**Exercice 53** [ 02780 ] [Correction]
On note $E$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0;+\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que $E$ est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme

$$\|.\|_2\colon f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

On note $E_0$ l'ensemble des $f \in E$ telles que $f$ est nulle hors d'un certain segment. On note $F$ l'ensemble des fonctions de $E$ du type $x \mapsto P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x^2/2}$ où $P$ parcourt $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $E_0$ est dense dans $E$ puis que $F$ est dense dans $E$.

**Exercice 54** [ 02770 ] [Correction]
On munit l'espace des suites bornées réelles $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_n(|u_n|)$.

(a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'ensemble des suites $(a_n)$ qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

**Exercice 55** [ 02773 ] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $O_n$ désigne l'ensemble des polynômes réels de degré $n$ scindés à racines simples et $F_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples. Ces ensemble sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}_n[X]$ ?

**Exercice 56** [ 02771 ] [Correction]
Soit $E$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\ge 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n\ge 0}$ appartient à $E$, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

(a) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $E$.

(b) Soit

$$F = \left\{a \in E \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\right\}$$

L'ensemble $F$ est-il ouvert ? fermé ? borné ?

**Exercice 57** [ 02772 ] [Correction]

Soient $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

son graphe.

(a) On suppose $f$ continue. Montrer que $\Gamma_f$ est fermé.

(b) On suppose $f$ bornée et $\Gamma_f$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f$ est continue.

(c) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus $f$ bornée ?

**Exercice 58** [ 02778 ] [Correction]

Soient $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$.

(a) Montrer

$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\|$$

(b) Montrer, si $F \neq E$, qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.

(c) Montrer que $E$ est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée $B = \left\{x \in E \,\middle|\, \|x\| \leq 1\right\}$ est une partie compacte.

**Exercice 59** [ 02776 ] [Correction]

Soient $E_1$ et $E_2$ deux espaces vectoriels normés réels, $f$ une application de $E_1$ dans $E_2$ telle que pour tout compact $K$ de $E_2$, $f^{-1}(K)$ soit un compact de $E_1$. Montrer, si $F$ est un fermé de $E_1$, que $f(F)$ est un fermé de $E_2$.

**Exercice 60** [ 02853 ] [Correction]

On pose

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ entière pour $x$ réel. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.

(b) La fonction $f$ est-elle continue en $-1$ ?

(c) Donner un équivalent simple de $f$ en $1^-$.

**Exercice 61** [ 02852 ] [Correction]

Domaine de définition et étude aux bornes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$$

**Exercice 62** [ 02850 ] [Correction]

On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$$

Calculer les $a_n$ en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!} x^n$.

**Exercice 63** [ 02845 ] [Correction]

Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}$$

**Exercice 64** [ 02844 ] [Correction]

(a) Soit $(a_n)$ une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R$. Déterminer les rayons de convergence de

$$\sum (a_n \ln n) x^n \text{ et } \sum \left(a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$$

(b) Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand $x \to 1^-$.

**Exercice 65** [ 02854 ] [Correction]
Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

(a) Montrer que pour $0 < r < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$$

(b) Que dire de $f$ si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?

(c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \le P(|z|)$ pour tout $z$ complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

**Exercice 66** [ 02856 ] [Correction]
Soient $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \le 1\}$ et $f$ une fonction continue de $B$ dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à $B^\circ$ est somme d'une série entière. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\ge 0}$ de polynôme convergeant uniformément vers $f$ sur $B$.

**Exercice 67** [ 02848 ] [Correction]
Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$$

**Exercice 68** [ 02857 ] [Correction]
Développer en série entière

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$$

**Exercice 69** [ 02422 ] [Correction]

(a) Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}$$

avec $m, n$ deux entiers non nuls.

(b) Déterminer deux polynômes $U$ et $V$ tels que

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1$$

**Exercice 70** [ 02858 ] [Correction]
Développer en série entière $f\colon x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0.

**Exercice 71** [ 02859 ] [Correction]

(a) Montrer, si $t \in \mathbb{R}$ :

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\right| \le \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t\right)_{n\ge 0}$ soit bornée.
Montrer que $F\colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t)$ est développable en série entière en 0.

**Exercice 72** [ 03747 ] [Correction]

(a) Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$$

(b) Calculer $f(-1)$ et $\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x$ où $E$ est la fonction partie entière.

(c) Donner un équivalent de $f$ en $x = 1$

**Exercice 73** [ 02865 ] [Correction]
Étudier la limite de la suite de terme général

$$I_n = n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 74** [ 02808 ] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)\times 3^n}$$

**Exercice 75** [ 02847 ] [Correction]

(a) Déterminer le rayon de convergence $R$ de

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}x^n$$

(b) Pour $x\in\,]-R\,;R[$ calculer la somme précédente.

**Exercice 76** [ 02841 ] [Correction]

On note $a_n$ la $n$-ième décimale de $\sqrt{3}$.
Quel est l'intervalle de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ ?

**Exercice 77** [ 02842 ] [Correction]

Quel est le rayon de convergence de $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}}x^{2n}$ ?

**Exercice 78** [ 02843 ] [Correction]

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\alpha)}{n}x^n$ ?

**Exercice 79** [ 02855 ] [Correction]

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer la limite de $(I_n)$.

(b) Donner un équivalent de $(I_n)$.

(c) Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière de terme général $I_nx^n$. Étudier sa convergence en $R$ et en $-R$.

**Exercice 80** [ 02874 ] [Correction]

Étudier

$$f\colon x\mapsto\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}t^x\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 81** [ 02863 ] [Correction]

(a) Établir pour $a,b>0$ l'égalité

$$\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$$

(b) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

**Exercice 82** [ 02873 ] [Correction]

Pour tout $x$ réel, on pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

**Exercice 83** [ 00933 ] [Correction]

Établir

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

**Exercice 84** [ 02862 ] [Correction]

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\,\mathrm{d}x$$

**Exercice 85** [ 00150 ] [Correction]

Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^{+\infty}nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de $I_n$ quand $n\to+\infty$.

**Exercice 86** [ 02871 ] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

(a) Définition de $f$.

(b) Continuité et dérivabilité de $f$.

(c) Écrire $f(1)$ comme somme de série.

**Exercice 87** [ 02875 ] [Correction]
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $f$ est définie et continue sur $\Omega$.

(b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x$ tend vers $-1$.

(c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\operatorname{Re}(z) \to +\infty$.

**Exercice 88** [ 02881 ] [Correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1 + x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 89** [ 02880 ] [Correction]
Montrer que, pour tout $x$ réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 90** [ 02882 ] [Correction]
On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et trouver des équivalents simples de $f$ en $0$ et en $+\infty$.

**Exercice 91** [ 02876 ] [Correction]
Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 92** [ 02807 ] [Correction]

(a) Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer l'existence de

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{\binom{2n}{n}}$$

(b) Calculer $S_0$ et $S_{-1}$.

(c) Si $p \in \mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de $S_p$.

**Exercice 93** [ 02872 ] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

(a) Justifier la définition de $f(x)$.

(b) Montrer que $f$ est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Calculer $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(d) Montrer que $f$ est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

**Exercice 94** [ 02840 ] [Correction]

(a) Si $(s, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

pour $n \geq 0$ ? À $\lambda$ fixé, on note $\Delta_\lambda$ l'ensemble des $s > 0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.

(b) Calculer $\lim_{s\to\sup\Delta_\lambda} F_\lambda(s)$.

(c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s \to \inf \Delta_\lambda$.

(d) Si $n \geq 1$, calculer :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n \, \mathrm{d}y$$

(e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

**Exercice 95** [ 02864 ] [Correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

**Exercice 96** [ 02866 ] [Correction]

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \left( \sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) \mathrm{d}t$$

**Exercice 97** [ 02869 ] [Correction]

Montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t} \, \mathrm{d}t$$

**Exercice 98** [ 02870 ] [Correction]

Si $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

**Exercice 99** [ 00118 ] [Correction]

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \left[ \cos\left( \frac{\pi}{2} \sin x \right) \right]^n \mathrm{d}x$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n$ ?

**Exercice 100** [ 03287 ] [Correction]

Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t$$

**Exercice 101** [ 02893 ] [Correction]

Résoudre sur $]0\,;\pi[$

$$y'' + y = \cot x$$

**Exercice 102** [ 02894 ] [Correction]

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ par variation des constantes l'équation différentielle

$$y'' + y = 1/x$$

(b) En déduire une expression de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

valable pour $x > 0$.

(c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

**Exercice 103** [ 02896 ] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $2\pi$-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $2\pi$-périodique et solution de

$$y'' + y = f\,?$$

**Exercice 104** [ 02895 ] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

**Exercice 105** [ 02890 ] [Correction]
Trouver les fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que pour tout $x$ réel

$$f(x)-2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t=1$$

**Exercice 106** [ 02892 ] [Correction]
Déterminer les fonctions $f\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x>0, f'(x)=f(1/x)$$

**Exercice 107** [ 02889 ] [Correction]
Résoudre

$$x\ln xy'-(3\ln x+1)y=0$$

**Exercice 108** [ 02709 ] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $A^4=I_n$. Déterminer $\exp(A)$.

**Exercice 109** [ 02742 ] [Correction]
Soit $A$ une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que peut-on dire de $\exp A$ ?

**Exercice 110** [ 00391 ] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases}x'=y+z\\y'=x\\z'=x+y+z\end{cases}$$

**Exercice 111** [ 02710 ] [Correction]
On pose

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Sans diagonaliser la matrice $A$, déterminer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal et calculer $A^k$ pour $k\in\mathbb{N}$.
Évaluer $\exp(A)$.

**Exercice 112** [ 02701 ] [Correction]
Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et

$$A=\begin{pmatrix}0&a&a^2\\1/a&0&a\\1/a^2&1/a&0\end{pmatrix}$$

(a) Calculer le polynôme minimal de $A$.
(b) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
(c) Calculer $\mathrm{e}^A$.

**Exercice 113** [ 02902 ] [Correction]
Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases}x'=x-z\\y'=x+y+z\\z'=-x-y+z\end{cases}$$

**Exercice 114** [ 02711 ] [Correction]
Soit

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $A$. Calculer $\exp A$ et $\exp(A)\exp({}^tA)$.

**Exercice 115** [ 02712 ] [Correction]
Soit

$$A=\begin{pmatrix}1&j&j^2\\j&j^2&1\\j^2&1&j\end{pmatrix}$$

Étudier la diagonalisabilité de $A$, déterminer les polynômes minimal et caractéristique de $A$, calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension $n$.

**Exercice 116** [ 02907 ] [Correction]
Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n\colon(x,y)\mapsto\frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}}x^n$$

On note $D$ l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général $u_n(x, y)$ converge. On pose

$$f\colon (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$$

(a) Déterminer $D$.

(b) Montrer que $f_{\restriction D^\circ}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 117** [ 02905 ] [Correction]
On pose

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

pour $x, y$ réels non tous deux nuls.
La fonction $f$ admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$ ? Un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ ? de classe $\mathcal{C}^2$ ?

**Exercice 118** [ 02906 ] [Correction]
Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ pour } x \neq y \text{ et } f(x, x) = g'(x)$$

(a) Exprimer $f(x, y)$ à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[0\,; 1]$.

(b) En déduire que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 119** [ 02912 ] [Correction]

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

(b) Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}\sqrt{x^3 + y^3}$$

**Exercice 120** [ 02910 ] [Correction]
Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

**Exercice 121** [ 02913 ] [Correction]
On note $U$ l'ensemble des $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ; on dit que $f$ est homogène de degré $\alpha$ si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x, y) \in U, \Phi(f)(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

(a) Déterminer $\ker \Phi$.

(b) Soit $f \in E$. Montrer que $f$ est homogène de degré $\alpha$ si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.

(c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$, $\Phi(f) = h$, $h$ étant la fonction qui à $(x, y)$ associe $(x^2 + y^2)^{3/2}xy$.

**Exercice 122** [ 02911 ] [Correction]
Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon $r$.

**Exercice 123** [ 00071 ] [Correction]
Soit $a > 0$. On pose, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$$

Montrer que $f$ admet un minimum absolu et calculer ce dernier.

**Exercice 124** [ 02903 ] [Correction]
Soient $(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et, si $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$$

Calculer $g'(t)$.

**Exercice 125** [ 02904 ] [Correction]
Si $p \in \mathbb{N}$, soit

$$f_p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto (x + y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(a) Condition nécessaire et suffisante pour que $f_p$ se prolonge par continuité en $(0,0)$ ?

(b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0,0)$ ?

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
On remarque
$$v_n \geq u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$$
de sorte que
$$\sum_{k=0}^{n} v_k \geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k$$
Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.
Aussi
$$u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1} \geq \frac{1}{2} v_{n+1}$$
donc
$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} v_k$$
Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

**Exercice 2 :** [énoncé]
Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour $n^2 \leq k < (n+1)^2$,
$$0 \leq u_k \leq u_{n^2} \leq \frac{v_n}{n^2}$$
donc
$$0 \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq v_n \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$$
ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ sont majorées et donc $\sum u_n$ converge.
Inversement, pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ on a $v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

**Exercice 3 :** [énoncé]
Pour $t = -1$,
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = -(m+1)(n+1)$$
ce qui permet de conclure.
Pour $t \neq -1$,
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{i+1} \frac{1 - (-t)^{m+1}}{1+t}$$
Quand $m \to +\infty$,
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \to \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t}$$
si $|t| < 1$ et diverge sinon.
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t} = t \frac{1 - (-t)^{n+1}}{(1+t)^2}$$
Quand $n \to +\infty$,
$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \to \frac{t}{(1+t)^2}$$

**Exercice 4 :** [énoncé]
Le terme
$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$
est bien défini en tant que reste d'une série alternée satisfaisant au critère spécial.
Pour $N \leq K$ entiers,
$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{K} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=N+1}^{K} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2}$$
D'une part
$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$$
D'autre part
$$\sum_{k=N+1}^{K} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = N \sum_{k=N+1}^{K} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

En passant à la limite quand $K \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} + N \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Or

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

donc quand $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Ainsi $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2$$

**Exercice 5 :** [énoncé]
On a

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$$

Par le critère spécial, $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est terme général d'une série convergente.
Par comparaison de séries à termes positifs

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}}$$

est terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a > 1/2$.
Finalement, la série étudiée converge si, et seulement si, $a > 1/2$.

**Exercice 6 :** [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1})$$

En séparant la somme en deux et en reprenant l'indexation de la deuxième somme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k$$

ce qui donne (sachant $S_0 = 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})S_k + a_{n+1}S_n$$

La suite $(S_n)$ converge, elle est donc bornée par un certain réel $M$.
D'une part $a_n \to 0$ et donc $a_{n+1}S_n \to 0$.
D'autre part $|(a_k - a_{k+1})S_k| \leq M\,|a_k - a_{k+1}|$ et donc la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ converge absolument.
Par addition de convergence, on peut conclure que la série $\sum a_n^2$ converge.

**Exercice 7 :** [énoncé]
On a

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(a+1)}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Par suite, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -1$.

**Exercice 8 :** [énoncé]

(a) Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 donc la suite $(u_n)$ est de signe constant à partir d'un certain rang ; quitte à passer à l'opposé on peut supposer $u_n > 0$ pour $n$ assez grand.
Posons

$$w_n = \ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n)$$

On a

$$w_n = \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + v_n\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente. Par conséquent la suite $(\ln(n^\lambda u_n))$ converge et donc $(n^\lambda u_n)$ aussi.

(b) Posons $u_n = \frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En reprenant l'étude qui précède on peut affirmer que $n^{1/2}u_n \to \ell > 0$ donc $\sum u_n$ diverge.
Ce résultat peut être confirmé par la formule de Stirling.

**Exercice 9 :** [énoncé]
On a

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\right)$$

Si $\alpha \geq 1$ alors $(u_n)$ ne tend pas vers zéro et $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
Si $\alpha \in \left]0\,;1\right[$ alors $n^2 u_n \to 0$ et $\sum u_n$ est convergente.

**Exercice 10 :** [énoncé]
$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

**Exercice 11 :** [énoncé]

(a) Si $\alpha \leq 1$ alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

et donc $u_n \to 0$ si $a \in [0\,;1[$, $u_n \to 1$ si $a = 1$ et $(u_n)$ diverge si $a > 1$.
Si $\alpha > 1$ alors $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge et donc $(u_n)$ aussi.

(b) Cas $\alpha \leq 1$ et $a = 1$ : $u_n = 1$, $v_n = 0$ et on peut conclure.
Cas $\alpha < 1$ et $a \in [0\,;1[$ : $\ell = 0$, $v_n = u_n$, $n^2 v_n = \mathrm{e}^{2\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\ln a} \to 0$ car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Cas $\alpha = 1$ et $a \in [0\,;1[$ : $\ell = 0$, $v_n = u_n = \mathrm{e}^{(\ln n + \gamma + \mathrm{o}(1))\ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$ donc $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$ *i.e.* $a < -1/\mathrm{e}$.
Cas $\alpha > 1$ : $\ell = a^{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}}$,

$$v_n = \ell(\mathrm{e}^{-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Ainsi $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.
Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que $\sum(-1)^n v_n$ converge.

**Exercice 12 :** [énoncé]

(a) Par récurrence $0 \leq u_n \leq u_0/2^n$.

(b)

$$\ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n) = \ln\left(\frac{\sin(u_n/2)}{u_n/2}\right) \sim -\frac{1}{6}\left(\frac{u_n}{2}\right)^2$$

est terme général d'une série convergente donc la suite $(\ln(2^n u_n))$ converge et finalement $(2^n u_n)$ converge vers un réel $A$ strictement positif.

(c)

$$u_n - A2^{-n} = 2^{-n}\sum_{k=n}^{+\infty}\left(2^k u_k - 2^{k+1}u_{k+1}\right)$$

Or

$$2^k u_k - 2^{k+1}u_{k+1} \sim \frac{2^{k+1}}{6}\left(\frac{u_k}{2}\right)^3 \sim \frac{A^3}{24.2^{2k}}$$

Par comparaison de restes de séries convergentes à termes positifs,

$$u_n - A2^{-n} \sim 2^{-n}\frac{A^3}{24}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}} = \frac{A^3}{18.2^{-3n}}$$

**Exercice 13 :** [énoncé]

(a) On sait

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

donc

$$a_n = H_{3n} - H_n \to \ln(3) = \lambda$$

(b) Si on sait

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

les choses vont assez vites... mais sans doute l'examinateur souhaitera la démonstration de ce résultat.

$$a_n = \sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=n+1}^{3n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{3n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln 3$$

donc
$$a_n-\lambda=\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$
Or $\sum \frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ est absolument convergente car
$$\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\sim-\frac{1}{2k^2}$$
donc $a_n-\lambda=R_n-R_{3n}$ avec
$$R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$
Or par sommation d'équivalent sur des restes de séries convergentes à termes de signe constant,
$$R_n\sim\sum_{k=n+1}^{+\infty}-\frac{1}{2k^2}\sim-\frac{1}{2n}$$
(le dernier équivalent s'obtenant, soit par comparaison série intégrale, soit par $\frac{1}{k^2}\sim\frac{1}{k(k-1)}$ et sommation télescopique).
Au final
$$a_n-\lambda=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\sim-\frac{1}{3n}$$

**Exercice 14 : [énoncé]**
On a
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
et donc
$$\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}\sim\frac{3}{n^3}$$
Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ converge
Par décomposition en éléments simples
$$\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{6}{n}+\frac{6}{n+1}-\frac{24}{2n+1}$$
En introduisant la constante d'Euler $\gamma$, on sait
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln N+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
Par décalage d'indice
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}=\ln(N+1)+\gamma-1+\mathrm{o}(1)$$
et en introduisant dans la somme les inverses des nombres pairs absents, on obtient
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}=\ln(2N+1)-\frac{1}{2}\ln N+\frac{1}{2}\gamma-1+\mathrm{o}(1)$$
On en déduit
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\ln\frac{N^{18}(N+1)^6}{(2N+1)^{24}}+18+\mathrm{o}(1)$$
puis à la limite
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=18-24\ln 2$$

**Exercice 15 : [énoncé]**
Par comparaison série intégral,
$$\sum_{k=2}^{n}\ln^2 k\sim n(\ln n)^2$$
donc
$$u_n=\frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^{n}\ln^2 k}\sim\frac{1}{n^{1-\alpha}(\ln n)^2}$$
Par référence aux séries de Bertrand, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha\leq 0$.

**Exercice 16 : [énoncé]**
On a
$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$
et
$$n^{3/2}-\left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor+n=n+\mathrm{O}(1)\sim n$$
donc
$$\frac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2}-\left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor+n}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
ce qui permet de conclure à une absolue convergence.

**Exercice 17 :** [énoncé]
Pour $t \in [0\,;1/n]$, on peut affirmer $t^n \in [0\,;1/n]$ donc

$$\left|\int_0^{1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f(0)\right| \leq \frac{1}{n}\sup_{t\in[0;1/n]}|f(t)-f(0)|$$

Par continuité de $f$ en 0, on peut affirmer,

$$\sup_{t\in[0;1/n]}|f(t)-f(0)| \to 0$$

et donc

$$\int_0^{1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{n}f(0)$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{f(0)}{n^{\alpha+1}}$$

et $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

**Exercice 18 :** [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{4n+1} = \sum_{n=0}^{N}\int_0^1 (-t^4)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^4)^{N+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t^4)^{N+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^{4N+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4N+5} \to 0$$

donc $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

Enfin

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right)$$

**Exercice 19 :** [énoncé]
Par comparaison série intégrale :
Si $\alpha > 0$, $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ est terme général d'une série absolument convergente.
Si $-1 < \alpha < 0$, $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.
Si $\alpha = -1$, $u_n \sim \frac{1}{\ln n}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.
Si $\alpha < -1$, $u_n \not\to 0$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

**Exercice 20 :** [énoncé]

(a) La fonction $f'$ est bien définie et continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$.
On a

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2}$$

et donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{x^2}$$

La fonction $x \mapsto 1/x^2$ étant intégrable sur $[1\,;+\infty[$, il en est de même de $f'$ par domination.

(b) Par intégration par parties

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = [(t-(n-1)f(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n}(t-(n-1))f'(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|u_n| \leq \int_{n-1}^{n}(t-(n-1))\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

L'intégrabilité de $f'$ permet d'introduire $\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$ et d'affirmer que les sommes partielles de la série $\sum|u_n|$ sont majorées via

$$\sum_{n=1}^{N}|u_n| \leq |u_1| + \int_1^N |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq |u_1| + \int_1^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

La série $\sum u_n$ est alors absolument convergente.

(c) Par l'absurde, supposons que la suite $(\cos(\ln n))$ converge. La suite extraite $(\cos(\ln 2^n)) = (\cos(n\ln 2))$ aussi. Notons $\ell$ sa limite.
Puisque

$$\cos((n+1)\ln 2) + \cos((n-1)\ln 2) = 2\cos(n\ln 2)\cos(\ln 2)$$

on obtient à la limite $2\ell = 2\ell\cos(\ln 2)$ et donc $\ell = 0$.
Puisque

$$\cos(2n\ln 2) = 2\cos^2(n\ln 2) - 1$$

on obtient aussi à la limite $\ell = 2\ell^2 - 1$ ce qui est incompatible avec $\ell = 0$.

(d) Puisque

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(\ln n) + \cos(\ln(n-1))$$

La divergence de la suite $(\cos(\ln n))$ entraîne la divergence de la série $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Enfin, puisque la série $\sum u_n$ converge, on peut alors affirmer que la série $\sum f(n)$ diverge.

**Exercice 21 :** [énoncé]
Puisque la suite $(S_n)$ est croissante

$$0 \le v_n \le \frac{u_{n+1}}{S_0} \to 0$$

et donc $v_n \to 0$. On en tire

$$v_n \sim \ln(1+v_n) = \ln\frac{S_{n+1}}{S_n} = \ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)$$

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite $\ln(S_n)$ converge et donc si, et seulement si, la série télescopique $\sum (\ln S_{n+1} - \ln S_n)$ converge. Par équivalence de série à termes positifs, cela équivaut à affirmer la convergence de la série $\sum v_n$.

**Exercice 22 :** [énoncé]
Supposons la série $\sum v_n$ convergente. On a $v_n \to 0^+$ donc $1 + n^2 u_n \to +\infty$ et on en déduit

$$v_n \sim \frac{1}{n^2 u_n}$$

puis

$$\sqrt{u_n v_n} \sim \frac{1}{n}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, il y a divergence de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$.
Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k v_k}\right)^2 \le \sum_{k=0}^{n} u_n \sum_{k=0}^{n} v_k \le \sum_{k=0}^{n} u_n \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

On en déduit la divergence de la série $\sum u_n$.

**Exercice 23 :** [énoncé]
Posons

$$P_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} (3k-1)^{1/n} > 0$$

On a

$$\ln(P_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(3k-1) - \ln n$$

Par comparaison série-intégrale

$$\ln 2 + \int_1^n \ln(3t-1)\,\mathrm{d}t \le \sum_{k=1}^{n} \ln(3k-1) \le \int_1^{n+1} \ln(3t-1)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_1^n \ln(3t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{3n-1}{3}\ln(3n-1) - n + C = n\ln n + (\ln 3 - 1)n + \mathrm{O}(\ln n)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(3k-1) = n\ln n + (\ln 3 - 1)n + \mathrm{O}(\ln n)$$

On en déduit

$$\ln P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 3 - 1$$

puis

$$P_n \to \frac{3}{\mathrm{e}}$$

**Exercice 24 :** [énoncé]
On sait

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

et donc

$$a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = \mathrm{e}^{\ln a \ln n + \gamma\ln a + \mathrm{o}(1)} \sim \frac{\mathrm{e}^{\gamma\ln a}}{n^{-\ln a}}$$

Par équivalence de séries à termes positifs

$$\sum_{n\ge 1} a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \text{ converge} \iff -\ln a > 1$$

ce qui fournit la condition $a < \mathrm{e}^{-1}$.

**Exercice 25 :** [énoncé]

(a) Si $f'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, l'inégalité des accroissements finis assure que $f$ est lipschitzienne donc uniformément continue.

(b) Supposons que $f$ soit uniformément continue. Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x+\alpha) - f(x)| \leq 1$. Or par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_x \in ]x\,;x+\alpha[$ vérifiant
$|f(x+\alpha) - f(x)| = \alpha\,|f'(\xi_x)|$ et donc $|f'(\xi_x)| \leq 1/\alpha$. Cette propriété est incompatible avec $|f'(x)| \to +\infty$.

**Exercice 26 :** [énoncé]

(a) Il suffit de raisonner par récurrence. On obtient $P_0(x) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = (2 - 3nX^2)P_n + X^3P_n'$$

Par récurrence, pour $n > 0$, $\deg P_n = 2(n-1)$.

(b) $f$ est continue en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ dont par le théorème « limite de la dérivée », on peut conclure.

(c) $P_1 = 2$ a toutes ses racines réelles.
$f'(0) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ donc par une généralisation du théorème de Rolle, on peut affirmer que $f''$ s'annule sur $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$. Ses annulations sont aussi des zéros de $P_2$ qui est de degré 2, donc $P_2$ a toutes ses racines réelles.
$f''$ s'annule aussi en 0 et en $\pm\infty$. Par la généralisation du théorème de Rolle, on obtient 2 annulations sur $]0\,;+\infty[$ et 2 annulations sur $]-\infty\,;0[$ qui seront toutes quatre zéros de $P_3$ qui est un polynôme de degré 4,... on peut itérer la démarche.

**Exercice 27 :** [énoncé]
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in ]0\,;\alpha],\ (1-\varepsilon)\sqrt{x} \leq f(x) - f(x/2) \leq (1+\varepsilon)\sqrt{x}$$

Pour $x \in ]0\,;\alpha]$, $x/2^n \in ]0\,;\alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$(1-\varepsilon)\sqrt{x/2^n} \leq f(x/2^n) - f(x/2^{n+1}) \leq (1+\varepsilon)\sqrt{x/2^{n+1}}$$

En sommant ces inégalités et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}} \leq f(x) \leq (1+\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}$$

La phrase quantifiée ainsi obtenue permet d'affirmer

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{1-1/\sqrt{2}}$$

**Exercice 28 :** [énoncé]

(a) L'ensemble des points fixes de $f$ est $(f - \mathrm{Id})^{-1}\{0\}$, c'est donc une partie fermée de $[0\,;1]$. Étant fermée et bornée c'est une partie compacte. Étant de plus non vide, cette partie admet un plus petit et un plus grand élément.

(b) Soient $a \leq b$ les deux éléments précédents. L'égalité $f \circ g = g \circ f$ donne $f(g(a)) = g(a)$ et $f(g(b)) = g(b)$.
Les réels $g(a)$ et $g(b)$ étant points fixes de $f$, on a l'encadrement

$$a \leq g(a), g(b) \leq b$$

Considérons alors la fonction continue $\varphi = f - g$.
On a $\varphi(a) = a - g(a) \leq 0$ et $\varphi(b) = b - g(b) \geq 0$.
Par application du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $\varphi$ s'annule.

**Exercice 29 :** [énoncé]
Par un argument de parité, il suffit d'établir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$$

Formellement

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où la primitive de $2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}$ a été choisie de sorte de s'annuler en 0.
Puisque les deux termes en second membre sont convergents, le théorème d'intégration par parties s'applique et assure la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 30 :** [énoncé]
L'intégrabilité est entendue.
Par le changement de variable $u = a^2/t$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\ln a - \ln u}{a^2 + u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2a}\ln a$$

**Exercice 31 :** [énoncé]
Par le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ on parvient à l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{8u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)((1-x)^2 + (1+x)^2u^2)((1-y)^2 + (1+y)^2u^2)}$$

On peut réaliser une décomposition en éléments simples réelles de la fraction rationnelle intégrée qui pour des raisons de parité sera de la forme

$$\frac{a}{1+u^2} + \frac{b}{(1-x)^2 + (1+x)^2u^2} + \frac{c}{(1-y)^2 + (1+y)^2u^2}$$

avec

$$a = -\frac{1}{2xy}, b = -\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{2x(x-y)(1-xy)} \text{ et } c = -\frac{(1-y)^2(1+y)^2}{2y(y-x)(1-xy)}$$

sous réserve que $x \neq y$ et $xy \neq 0$.
Puisque

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\alpha^2 + \beta^2u^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{\pi}{2}$$

on parvient à

$$I = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2xy} - \frac{1-x^2}{2x(x-y)(1-xy)} + \frac{1-y^2}{2y(x-y)(1-xy)}\right) = \frac{\pi}{2(1-xy)}$$

Les cas exclus $x \neq y$ et $xy \neq 0$ peuvent être récupérés par continuité.
Il m'a peut-être échappé une démarche plus simple...

**Exercice 32 :** [énoncé]

(a) La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$. On peut la prolonger par continuité en 0 en y posant la valeur 1. Par intégration par parties où l'on intègre l'expression $\sin t$ en $1 - \cos t$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to +\infty$, on a

$$\frac{1-\cos x}{x} \to 0$$

et

$$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

cette dernière intégrale étant convergente car la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et est dominée par la fonction intégrable $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$.

(b) Soit $F$ la primitive s'annulant en 0 du prolongement par continuité de $t \mapsto \sin(t)/t$. On a

$$f(x) = \lim_{+\infty} F - F(x)$$

Puisque la fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $f$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -F'(x) = -\frac{\sin x}{x}$$

(c) Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) + \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$xf(x) = \cos x - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Mais par intégration par parties on établit encore

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_x^{+\infty} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

avec
$$\left|\int_x^{+\infty} 2\frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{x^2}$$
ce qui permet d'affirmer
$$x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Finalement $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

**Exercice 33 :** [énoncé]
On peut prendre $f$ nulle sur $[0\,;1]$, puis pour chaque intervalle $[n\,;n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f$ affine par morceaux définie par les nœuds $f(n) = 0$, $f(n+\frac{1}{n^3}) = n$, $f(n+\frac{2}{n^3}) = 0$ et $f(n+1) = 0$ ce qui définit une fonction $f$ positive continue vérifiant $\int_n^{n+1} f = \frac{1}{n^2}$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ bien que non bornée.

**Exercice 34 :** [énoncé]
On a
$$\sqrt{\tan\theta} \underset{\theta=\pi/2-h}{=} \sqrt{\frac{\sin(\pi/2-h)}{\cos(\pi/2-h)}} = \sqrt{\frac{\cos h}{\sin h}} \sim \frac{1}{\sqrt{h}}$$
donc l'intégrale est bien définie.
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \underset{u=\sqrt{\tan\theta}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$
après calculs...

**Exercice 35 :** [énoncé]
On peut écrire
$$1+(t+ib)^2 = (t+i(b+1))(t+i(b-1))$$
Si $b = \pm 1$ la fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ à cause d'une singularité en 0.
Si $b \neq \pm 1$ alors la fonction $f\colon t \mapsto \frac{1}{1+(t+ib)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to \pm\infty$ donc $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En procédant à une décomposition en éléments simples :
$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2} = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b+1)^2) + \arctan\left(\frac{t}{b+1}\right)\right]_{-A}^{A} - \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b-1)^2) +\right.$$
Si $|b| > 1$ alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2} = 0$$
Si $|b| < 1$ alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2} = \pi$$

**Exercice 36 :** [énoncé]
Le discriminant du trinôme $x^2+\alpha x+1$ vaut $\Delta = \alpha^2 - 4$.
Cas $|\alpha| < 2$
On a $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule pas et la fonction $x \mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$. La fonction est intégrable car équivalente à $1/x^2$ en $+\infty$.
Cas $\alpha \geq 2$, le trinôme ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ car il est somme de termes positifs. À nouveau la fonction $x \mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Cas $\alpha \leq 2$, le trinôme $x^2+\alpha x+1$ présente deux racines positives et la fonction $x \mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ n'est pas définie sur l'intégralité de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Même en découpant l'intégrale aux points singuliers, on peut observer que les intégrales introduites ne sont pas définies. On ne parvient donc pas à donner un sens à l'intégrale étudiée dans ce cas.
Reste à calculer l'intégrale.
Cas $|\alpha| < 2$
Le trinôme $x^2+\alpha x+1$ s'écrit peut se réécrire
$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + a^2 \text{ avec } a = \sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}$$
On a alors
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1} = \left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{2x+\alpha}{a}\right)\right]_0^{+\infty}$$
puis
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1} = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right)$$
Cas $\alpha = 2$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{+\infty} = 1$$

Cas $\alpha > 2$
Le trinôme $x^2 + \alpha x + 1$ à deux racines $x_0, x_1$ distinctes strictement négatives.

$$x_0 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Par décomposition en éléments

$$\frac{1}{x^2 + \alpha x + 1} = \frac{a}{x - x_0} + \frac{b}{x - x_1}$$

avec

$$a = \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{ et } b = \frac{1}{x_0 - x_1} = -a$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + \alpha x + 1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \left[ \ln \frac{x - x_0}{x - x_1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{\alpha - \sqrt{\Delta}}$$

**Exercice 37 :** [énoncé]

(a) Posons $u_n(x) = 1/n^x$ définie sur $]1\,;+\infty[$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1\,;+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$.
Plus précisément, pour $a > 1$, on a

$$\sup_{x \in [a;+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \text{ avec } \sum u_n(a) \text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions $u_n$ sur $[a\,;+\infty[$.
Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que $\zeta$ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

(b) Posons $v_n(x) = \zeta(n)x^n/n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$ (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1).
Pour $x = 1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}$$

Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $((-1)^n\zeta(n)/n)$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car $\zeta(n+1) \leq \zeta(n)$.

(c) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction $F$ est assurément de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1\,;1[$.
Les fonctions $v_n$ sont continues sur $[-1\,;0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in [-1\,;0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq |v_{n+1}(x)| \leq \frac{\zeta(n)}{n}$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1\,;0]$ et sa somme $F$ est donc continue.

(d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x \in ]-1\,;1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p\geq 1} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right| \text{ et } \sum_{n\geq 1} \sum_{p=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right|$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{p-x} - \frac{1}{p} \right)$$

La série de fonction associée converge normalement sur tout segment de

$]-1\,;1[$ et on peut donc intégrer terme à terme

$$F(x)=F(0)+\int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-t}-\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{p=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{1}{p-t}-\frac{1}{p}\,\mathrm{d}t=\sum_{p=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{p}{p-x}\right)-\frac{x}{p}$$

**Exercice 38 :** [énoncé]
Remarquons que pour tout $t\in[0\,;1]$,

$$t-t^2\in[0\,;1/4]$$

Pour $x\in[0\,;1/4]$,

$$|u_{n+1}(x)|\leq x\,\|u_n\|_{\infty,[0;1/4]}\leq\frac{1}{4}\,\|u_n\|_{\infty,[0;1/4]}$$

Par une récurrence facile, on obtient

$$\|u_n\|_{\infty,[0;1/4]}\leq\frac{1}{4^n}$$

Par la remarque initiale, pour tout $x\in[0\,;1]$,

$$|u_{n+1}(x)|\leq\|u_n\|_{\infty,[0;1/4]}\leq\frac{1}{4^n}$$

donc

$$\|u_{n+1}\|_{\infty,[0;1]}\leq\frac{1}{4^n}$$

On peut conclure que la série $\sum u_n$ est normalement convergente.

**Exercice 39 :** [énoncé]
Si $|\omega|>1$ alors

$$\frac{1}{z-\omega}=-\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\omega^n}$$

et la convergence normale sur $U$ de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers

$$z\mapsto\frac{1}{z-\omega}$$

Si $|\omega|<1$, on peut remarquer que pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-ik\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}\omega^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-i(n+(k+1))\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$$

Si $z\mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $U$ vers $z\mapsto\frac{1}{z-\omega}$ alors

$$\int_0^{2\pi}\overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left|\mathrm{e}^{i\theta}-\omega\right|^2}\neq 0$$

Or par le calcul précédent, on peut affirmer

$$\int_0^{2\pi}\overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta=0$$

On conclut à une absurdité.
La condition cherchée est $|\omega|>1$.

**Exercice 40 :** [énoncé]
Puisque la fonction $f$ est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$. Puisque la fonction $f$ est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction $f$ est positive.
Par télescopage, on observe

$$g(x+N)-g(x)=\sum_{k=0}^{N-1}f(x+k)$$

et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à $g$ en $+\infty$, on est tenté de poser

$$g(x)=-\sum_{k=0}^{+\infty}f(x+k)$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a pour $k\geq 1$

$$0\leq f(x+k)\leq f(k)\leq\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f(x+k)|\leq\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégrabilité de $f$, il y a convergence de la série

$$\sum \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k\geq 1} f(x+k)$$

L'adjonction du terme d'indice $k=0$ ne change rien et l'on peut conclure.
On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.

**Exercice 41 :** [énoncé]
Quand $p\to+\infty$,

$$f_p(x)=\frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}\to\frac{1}{1+x}=f(x)$$

On a

$$f(x)-f_p(x)=\frac{(1+x)^{1/p}-1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Or, pour $\alpha\in\left]0\,;1\right]$, la fonction $x\mapsto(1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0\leq(1+x)^\alpha\leq 1+\alpha x$$

pour tout $x\geq 0$ et donc

$$|f(x)-f_p(x)|\leq\frac{1}{p}\frac{x}{(1+x)^{1+1/p}}\leq\frac{1}{p}\frac{x}{1+x}\leq\frac{1}{p}$$

Puisque $\|f-f_p\|_{\infty,\mathbb{R}_+}\leq\frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 42 :** [énoncé]
(a)

$$\ln f_{n+1}(x)-\ln f_n(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n+1)-\ln(x+n+1)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum\ln f_{n+1}(x)-\ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.

(b)

$$\ln\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(x\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln k-\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right)$$

avec $x\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln k-\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)=x\ln n-\ln x-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.
Or la série $\sum\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$ et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k}-\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)=x\ln n+\gamma x+\mathrm{o}(1)-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln\Gamma(x)=-\ln x-\gamma x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

(c) Posons $f_n(x)=\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ pour $x>0$ et $n\geq 1$. $f_n$ est $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $f_n'(x)=\frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment$[a\,;b]\subset\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 43 :** [énoncé]
(a) Pour $x<0$, $u_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
Pour $x=0$, $u_n(x)=0$ donc $\sum u_n(0)$ converge
Pour $x>0$, $u_n(x)=\mathrm{o}(1/n^2)$ par croissance comparée et donc $\sum u_n(x)$ converge absolument.
On conclut $I=\mathbb{R}_+$

(b) Pour $[a\,;b]\subset\mathbb{R}_+^*$,

$$\|u_n\|_{\infty,[a;b]}=\sup_{x\in[a;b]}|u_n(x)|\leq\frac{n^\alpha b\mathrm{e}^{-na}}{n^2+1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Sa somme est alors continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|u_n(x)|=u_n(1/n)\sim\frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha<2$.

(d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha \mathrm{e}^{-k/n}}{k^2+1} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+1}\mathrm{e}^{-k/n} \geq \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-k/n}$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-k/n} = \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \to \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n \to +\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ alors

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0$$

ce qui vient d'être exclu.

(e) Si $S$ est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq S(1/n) \to S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

**Exercice 44 :** [énoncé]
Pour $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.
Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.
La fonction $S$ est définie sur $]-1\,;1[$.
Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
$u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum u_n$ converge simplement,

$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour $a \in [0\,;1[$,

$$\|u_n'\|_{\infty,[-a;a]} \leq n\frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $]-1\,;1[$.
Par suite la fonction $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

Pour $x \in [0\,;1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)}$$

Puisque $\sum_{p\geq 0}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum_{n\geq 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x) = x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0\,;1[$.
La fonction $u_p$ est continue sur $[0\,;1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.
Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum (-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k u_k(x)\right\|_\infty \leq u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$$

**Exercice 45 :** [énoncé]
Posons

$$f_n\colon x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

Sachant

$$2|nx| \leq 1 + n^2x^2$$

on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $f_n$ étant continue, la somme $S$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$$

Soit $a > 0$. Pour $|x| \geq a$,

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^*$.
La somme $S$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Montrons que la fonction $S$ n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}\left(S(x) - S(0)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}\left(S(x) - S(0)\right) \geq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)}$$

Par le changement de variable $u = tx$

$$\frac{1}{x}\left(S(x) - S(0)\right) \geq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{u(1+u^2)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

car la fonction positive $u \mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$.

**Exercice 46 :** [énoncé]
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Le plus simple est sans doute d'utiliser la décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec $D$ diagonalisable et $N$ nilpotente commutant entre elles. Par la formule du binôme de Newton, on peut calculer $M^k$ et tronquer la somme par la nilpotence de $N$, on parvient alors à une somme finie de termes qui tendent vers 0 par croissance comparée. Une autre méthode, techniquement plus lourde, consiste à introduire $\rho_\ell^k = \max\left\{\left|(M^k)_{1,\ell+1}\right|, \dots, \left|(M^k)_{n-\ell,n}\right|\right\}$ qui majorent les coefficients de $M^k$ situés sur la diagonale (pour $\ell = 0$), sur la sur-diagonale (pour $\ell = 1$) etc. En notant que $\rho = \rho_0^1 < 1$, on montre par récurrence sur $k$ que $\rho_\ell^k \leq k^\ell \|M\|_\infty^{\ell+1} \rho^{k-\ell}$ ce qui permet de conclure.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons que $M^k \to 0$. On peut alors affirmer que 1 n'est pas valeur propre de $M$ car $MX = X \implies M^kX = X$ et donc à la limite $MX = X \implies X = 0$. Par suite la matrice $I - M$ est inversible et puisque $(I-M)\sum_{k=0}^m M^k = I - M^{m+1}$, $\sum_{k=0}^m M^k = (I-M)^{-1}(I - M^{m+1})$ d'où la convergence de la série des $M^k$.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Puisque $\sum_{k=0}^m M^k$ converge quand $\operatorname{rg} C \geq r$, on a $\sum_{k=0}^m M^kX$ converge, puis $\sum_{k=0}^n \lambda^k X$ converge et donc $|\lambda| < 1$ (car $X \neq 0$).

**Exercice 47 :** [énoncé]
D'une part

$${}^t(A^k) \to {}^tB$$

et d'autre part

$${}^t(A^k) = (-1)^k A^k$$

de sorte que

$${}^t(A^{2p}) = (-1)^{2p}A^{2p} \to B$$

et

$${}^t(A^{2p+1}) = (-1)^{2p+1}A^{2p+1} \to -B$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$B = {}^tB = -B$$

On en déduit que la matrice $B$ est nulle.

**Exercice 48 :** [énoncé]

(a) $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\| \leq \max\left\{\|x+y\|, \|x-y\|\right\}$$

Aussi $\|y\| \leq \max\left\{\|x+y\|, \|x-y\|\right\}$ donc

$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max\left\{\|x+y\|, \|x-y\|\right\}$$

(b) Sur $\mathbb{R}^2$ avec $\|\| = \|\|_\infty$, il y a égalité pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

(c) On a déjà

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Or $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2\right)$$

aussi

$$\|y\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)$$

donc

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

puis

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$

qui permet de conclure.

(d) Non, sur $\mathbb{R}^2$, il y a égalité pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

**Exercice 49 :** [énoncé]

Considérons $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ des réels deux à deux distincts et $\varphi\colon \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}^{d+1}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_d))$$

L'application $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, c'est aussi une application linéaire continue car les espaces engagés sont de dimensions finies et il en est de même de $\varphi^{-1}$.
En notant $f$ la limite simple de $(f_n)$, on a $\varphi(f_n) \to (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$. En notant $P$ l'élément de $\mathbb{R}_d[X]$ déterminé par $\varphi(P) = (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$, on peut écrire $\varphi(f_n) \to \varphi(P)$. Par continuité de l'application $\varphi^{-1}$, on a donc $f_n \to P$ dans $\mathbb{R}_d[X]$. En choisissant sur $\mathbb{R}_d[X]$, la norme équivalente $\|.\|_{\infty,[a;b]}$, on peut affirmer que $(f_n)$ converge uniformément vers $P$ sur le segment $[a\,;b]$.
En particulier $(f_n)$ converge simplement vers $P$ et en substance $P = f$.

**Exercice 50 :** [énoncé]

(a) Pour $f \in E$, $\Phi(f) \in E$ car $(x,y) \mapsto K(x,y)f(y)$ est continue et on intègre sur un segment. La linéarité de $\Phi$ est évidente.

(b) On a

$$\|\Phi(f)\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty$$

et

$$\|\Phi(f)\|_1 \leq \iint_{[0;1]^2} |K(x,y)f(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|K\|_\infty \|f\|_1$$

donc $\Phi$ est continue pour $\|\|_\infty$ et $\|\|_1$.

(c) On a

$$(\Phi(f) \mid g) = \iint_{[0;1]^2} K(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (f \mid \Phi(g))$$

car

$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2, K(x,y) = K(y,x)$$

(d) Rappelons que l'espace normé $(E, \|\|_\infty)$ est complet.
Avec plus de finesse que dans les inégalités du b), on peut affirmer $\|\Phi(f)\|_\infty \leq \Omega^{-1}\|f\|_\infty$.
Pour $h \in E$ et $|\lambda| < \Omega$, L'application $T\colon f \mapsto \lambda\Phi(f) + h$ est $\lambda\Omega$-lipschitzienne avec $|\lambda\Omega| < 1$. Par le théorème du point fixe dans un espace complet, l'application $T$ admet un unique point fixe et donc il existe un unique $f \in E$ vérifiant $h = f - \lambda\Phi(f)$.

(e) Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille orthonormée d'éléments de $\ker(\Phi - \lambda\,\mathrm{Id})$. Soit $y \in [0\,;1]$ fixé et $\varphi\colon x \mapsto K(x,y)$. On peut écrire $\varphi = \sum_{j=1}^p \mu_j f_j + \psi$ avec $\psi \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$ et

$$\mu_j = (f_j \,|\, \varphi) = \int_0^1 K(x,y)f_j(x)\,\mathrm{d}x = \lambda f_j(y)$$

Par orthogonalité

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^p \mu_j^2 + \|\psi\|_2^2 \geq \sum_{j=1}^p \mu_j^2$$

En intégrant on obtient

$$\iint_{[0;1]^2} K(x,y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \sum_{j=1}^p \int_0^1 \lambda^2 f_j^2(y)\,\mathrm{d}y = \lambda^2 p$$

car les $f_j$ sont unitaires. Par suite $\ker(\Phi - \lambda\,\mathrm{Id})$ est de dimension finie et sa dimension vérifie l'inégalité proposée.

**Exercice 51 :** [énoncé]

(a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$.

$$0 \leq \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f-P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f-P) \leq (b-a)\,\|f\|_\infty\,\varepsilon$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient $\int_a^b f^2 = 0$ et donc $f = 0$.

(b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties,

$$(n+1)I_n = (1-\mathrm{i})I_{n+1}$$

Or $I_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$ donc

$$I_n = \frac{(1+\mathrm{i})^{n+1}}{2^{n+1}} n!$$

(c) $I_{4p+3} \in \mathbb{R}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4p+3}\sin(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$$

puis

$$\int_0^{+\infty} u^p \sin(u^{1/4})\mathrm{e}^{-u^{1/4}}\,\mathrm{d}u = 0$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

**Exercice 52 :** [énoncé]

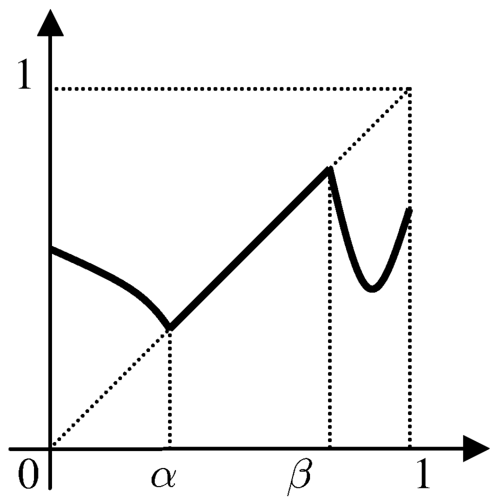
(a) Soit $f$ solution. Formons

$$A = \{x \in [0\,;1] \mid f(x) = x\}$$

On a évidemment $A \subset \operatorname{Im} f$, mais inversement, pour $x \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x$$

Ainsi $\operatorname{Im} f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \operatorname{Im} f$.
On en déduit que $A$ est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha\,;\beta]$ car image d'un compact par une fonction réelle continue.
Pour tout $x \in [\alpha\,;\beta]$, $f(x) = x$ et pour tout $x \in [0\,;\alpha[\,\cup\,]\beta\,;1]$, $f(x) \in [\alpha\,;\beta]$.
Inversement, une fonction continue vérifiant les deux conditions précédente est solution.
Cela peut apparaître sous la forme d'une fonction ayant l'allure suivante




(b) Soit $f$ solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors $f$ est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha\,;\beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, $f$ prend des valeurs strictement inférieur à $\alpha$ ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.
De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f : x \in [0\,;1] \mapsto x$.

**Exercice 53 :** [énoncé]

Soit $f$ une fonction élément de $E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A$ vérifiant

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

Considérons alors la fonction $\varphi : [0\,;+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$ pour $t \in [0\,;A]$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geq A+1$ et $\varphi(t) = 1 - (t-A)$ pour $t \in [A\,;A+1]$. La fonction $f\varphi$ est éléments de $E_0$ et

$$\|f - f\varphi\|_2 \leq \sqrt{\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leq \varepsilon$$

Ainsi $E_0$ est dense dans $E$.
Pour montrer maintenant que $F$ est dense dans $E$, nous allons établir que $F$ est dense dans $E_0$.

Soit $f$ une fonction élément de $E_0$. Remarquons

$$\int_0^{+\infty}\left(f(t)-P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)^2\mathrm{d}t \underset{u=\mathrm{e}^{-t}}{=} \int_0^1\left(f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2}-P(u)\right)^2\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\mathrm{d}u$$

La fonction $u\mapsto\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ car $\sqrt{u}\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\xrightarrow[u\to 0]{}0$.
La fonction $g\colon u\mapsto f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2}$ peut-être prolongée par continuité en 0 car $f$ est nulle en dehors d'un segment. Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\|g-P\|_{\infty,[0;1]}\le\varepsilon$ et pour $\varphi\colon t\mapsto P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}$ on a alors

$$\|f-\varphi\|_2\le\lambda\varepsilon \text{ avec } \lambda=\sqrt{\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\,\mathrm{d}u}$$

Cela permet de conclure à la densité proposée.

**Exercice 54 :** [énoncé]

(a) Notons $C$ l'espace des suites convergentes de $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Soit $(u^n)$ une suite convergente d'éléments de $C$ de limite $u^\infty$.
Pour chaque $n$, posons $\ell^n=\lim u^n=\lim_{p\to+\infty}u_p^n$.
Par le théorème de la double limite appliquée à la suite des fonctions $u^n$, on peut affirmer que la suite $(\ell^n)$ converge et que la suite $u^\infty$ converge vers la limite de $(\ell^n)$. En particulier $u^\infty\in C$.

(b) Notons $A$ l'espace des suites dont le terme général est terme général d'une série absolument convergente.
Soit $(u^n)$ la suite définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall p\in\mathbb{N},u_p^n=\frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}$$

La suite $(u^n)$ est une suite d'éléments de $A$ et une étude en norme $\|\|_\infty$ permet d'établir que $u^n\to u^\infty$ avec $u_p^\infty=\frac{1}{p+1}$. La suite $u^\infty$ n'étant pas élément de $A$, la partie $A$ n'est pas fermée.

**Exercice 55 :** [énoncé]
Soit $P\in O_n$. En notant $x_1<\ldots<x_n$ ses racines, on peut écrire

$$P=\alpha(X-x_1)\ldots(X-x_n)$$

avec $\alpha\neq 0$.
Posons $y_1,\ldots,y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1\,;x_2],\ldots,[x_{n-1}\,;x_n]$.
Posons aussi $y_0\in\,]-\infty\,;x_1[$ et $y_n\in\,]x_n\,;+\infty[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n\alpha$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}\alpha$,..., $P(y_{n-1})$ est du signe de $(-1)\alpha$, $P(y_n)$ du signe de $\alpha$. Pour simplifier l'exposé de ce qui suit, on va supposer $\alpha>0$. La résolution se transposera aisément au cas $\alpha<0$.
Considérons l'application

$$f_i\colon Q\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto Q(y_i)$$

L'application $f_i$ est continue et donc $f_j^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $f_j^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons $U$ l'intersection des ouverts

$$f_0^{-1}\left((-1)^n\mathbb{R}_+^*\right),f_1^{-2}\left((-1)^{n-1}\mathbb{R}_+^*\right),\ldots,f_n^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$$

Les éléments de $U$ sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0<y_1<\ldots<y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet $n$ racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $U\subset O_n$. Or $P\in U$ et $U$ est ouvert donc $U$ est voisinage de $P$ puis $O_n$ est voisinage de $P$.
Au final $O_n$ est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.
Dans le cas $n=1$ : $F_n=O_n$ et donc $F_n$ est ouvert.
Dans le cas $n=2$ : $F_n$ réunit les polynômes $P=aX^2+bX+c$ avec $b^2-4ac>0$ (que $a$ soit égal à 0 ou non). L'application $P\mapsto b^2-4ac$ étant continue, on peut affirmer que $F_n$ est encore ouvert car image réciproque d'un ouvert pas une application continue.
Dans le cas $n\ge 3$ : $P_n=X(1+X^2/n)$ est une suite de polynômes non scindés convergeant vers $X$ scindé à racines simples. Par suite $F_n$ n'est pas ouvert.

**Exercice 56 :** [énoncé]

(a) Par définition de l'ensemble $E$, l'application $\|.\|:E\to\mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soient $(a_n)_{n\ge 0}$, $(b_n)_{n\ge 0}$ éléments de $E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\|a+b\|=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n+b_n|\le\sum_{n=0}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)=\|a\|+\|b\|$$

avec convergence des séries écrites, et

$$\|\lambda.a\|=\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda a_n|=\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|\,|a_n|=|\lambda|\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|=|\lambda|\,\|a\|$$

Enfin, si $\|a\| = 0$ alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq \|a\| = 0$$
donne $(a_n)_{n\geq 0} = (0)_{n\geq 0}$

(b) Considérons la forme linéaire
$$\varphi\colon (a_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
On vérifie
$$\forall a = (a_n)_{n\geq 0} \in E, |\varphi(a)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \|a\|$$
La forme linéaire $\varphi$ est donc continue.
Puisque $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ avec $\{1\}$, la partie $F$ est fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue..
Posons $e = (1, 0, 0, \ldots)$ et un élément de $F$ et
$$\forall \alpha > 0, e + \alpha e \notin F \text{ et } \|e - (e + \alpha e)\| = \alpha$$
On en déduit que $F$ n'est pas un voisinage de son élément $e$ et par conséquent la partie $F$ n'est pas ouverte.
Posons $\alpha^p = e + p.(1, -1, 0, 0, \ldots)$.
$$\forall p \in \mathbb{N}, \alpha^p \in F \text{ et } \|\alpha^p\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$
La partie $F$ n'est donc pas bornée.

**Exercice 57 :** [énoncé]

(a) Soit $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\Gamma_f$. On suppose que la suite $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ converge vers $(x_\infty, y_\infty)$. Puisque $y_n = f(x_n)$, on obtient à la limite $y_\infty = f(x_\infty)$ car $f$ est continue.
La partie $\Gamma_f$ est alors fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

(b) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $a \in \mathbb{R}$ et $(y_n) = (f(x_n))$ son image.
Soit $b$ une valeur d'adhérence de $(y_n)$. Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$$y_{\varphi(n)} \to b$$
On a alors
$$\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right) \to (a, b)$$
Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe $\Gamma_f$ qui est supposé fermé. On en déduit $(a, b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$.
Ainsi, la suite $(y_n)$ ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Or elle évolue dans un compact car bornée en dimension finie et donc, si elle ne possède qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.
Par la caractérisation séquentielle, on peut conclure que $f$ est continue en $a$.

(c) Non, on obtient un contre-exemple avec la fonction donnée par
$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Le graphe de cette fonction est fermée car réunion de deux fermés
$$\{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$
mais cette fonction n'est pas continue.

**Exercice 58 :** [énoncé]

(a) Par définition
$$d(x, F) = \inf \{\|x - y\| \mid y \in F\}$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le réel $d(x, F) + 1/(n + 1)$ ne minore par l'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ et donc il existe $y_n \in F$ tel que
$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n + 1}$$
En faisant varier $n$, cela détermine une suite $(y_n)$ d'éléments de $F$ vérifiant
$$\|x - y_n\| \to d(x, F)$$
Cette suite est bornée et évolue dans l'espace vectoriel normé $F$ qui est de dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence $y$ dans $F$ pour laquelle on obtient
$$d(x, F) = \|x - y\|$$

(b) Puisque $F \neq E$, il existe un vecteur $x$ de $E$ n'appartenant pas à $F$. On vérifie aisément
$$d(\lambda x, F) = |\lambda|\, d(x, F)$$
car pour $\lambda \neq 0$
$$\{\|\lambda x - y\| \mid y \in F\} = \{\|\lambda(x - y')\| \mid y' \in F\}$$

Il est donc possible de choisir $x$ vérifiant $d(x,F)=1$.
Pour tout vecteur $y\in F$, on a aussi $d(x-y,F)=1$ car

$$\{\|x-z\| \mid z\in F\} = \{\|x-y-z'\| \mid z'\in F\}$$

Il ne reste plus qu'à trouver $y\in F$ tel que $\|x-y\|=1$. Le vecteur $y\in F$ vérifiant $d(x,F)=\|x-y\|$ convient. Le vecteur $u=x-y$ est alors solution.

(c) Si $E$ est de dimension finie, la boule $B$ est compacte car fermée et bornée en dimension finie.
Inversement, supposons par l'absurde que $B$ est compacte et $E$ de dimension infinie. Par récurrence, on construit une suite $(u_n)$ de vecteurs de $E$ en posant $u_0$ un vecteur unitaire quelconque, puis une fois $u_0,\dots,u_n$ déterminés, on définit $u_{n+1}$ de sorte que

$$d(u_{n+1},\mathrm{Vect}(u_0,\dots,u_n)) = \|u_{n+1}\| = 1$$

Cette construction est possible par l'étude qui précède car $E$ est supposé de dimension infinie.
La suite $(u_n)$ ainsi définie est une suite d'éléments du compact $B$, on peut donc en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$. Puisque cette suite converge

$$\left\|u_{\varphi(n+1)}-u_{\varphi(n)}\right\| \to 0$$

or

$$\left\|u_{\varphi(n+1)}-u_{\varphi(n)}\right\| \geq d(u_{\varphi(n+1)},\mathrm{Vect}(u_0,\dots,u_{\varphi(n+1)-1})) \geq 1$$

C'est absurde.

**Exercice 59 :** [énoncé]
Soit $(y_n)$ une suite convergente d'éléments de $f(F)$ de limite $y_\infty$. On veut établir que $y_\infty\in f(F)$. Si $y_\infty$ est l'un des éléments de la suite $(y_n)$ l'affaire est entendue. Sans perte de généralités, on peut supposer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $y_n\neq y_\infty$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n\in F$ tel que $y_n=f(x_n)$. L'ensemble $K=\{y_n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{y_\infty\}$ est un compact de $E_2$ donc $f^{-1}(K)$ est un compact de $E_1$. La suite $(x_n)$ apparaît comme étant une suite d'éléments du compacte $f^{-1}(K)$, on peut donc en extraire une suite convergeant dans la partie $x_{\varphi(n)}\to x_\infty\in f^{-1}(K)$. De plus $(x_{\varphi(n)})$ étant une suite d'éléments du fermé $F$, on peut affirmer $x_\infty\in F$. On va maintenant établir $y_\infty=f(x_\infty)$ ce qui permettra de conclure. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, posons $K_N=\{y_n \mid n\geq N\}\cup\{y_\infty\}$. $K_N$ est un compact, $f^{-1}(K_N)$ est donc fermé et par suite $x_\infty\in f^{-1}(K_N)$. Ainsi, $x_\infty\in\bigcap_{N\in\mathbb{N}} f^{-1}(K_N) = f^{-1}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} K_N\right)$. Or $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} K_N=\{y_\infty\}$ donc $f(x_\infty)=y_\infty$.

**Exercice 60 :** [énoncé]
Notons que l'intégrale définissant $a_n$ converge car $|\operatorname{th} t|\leq 1$.

(a) Pour $t\geq n$,

$$\frac{\operatorname{th} n}{t^2} \leq \frac{\operatorname{th} t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

En intégrant et en exploitant $\operatorname{th} n\to 1$, on obtient $a_n\sim\frac{1}{n}$.
On en déduit que $R=1$. Pour $x=-1$, $\sum a_nx^n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées car $(a_n)$ décroît vers 0.
Pour $x=1$, $\sum a_nx^n$ diverge par l'équivalent précédent. La fonction somme est définie sur $[-1\,;1[$.

(b) Pour $x\in[-1\,;0]$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série $\sum a_nx^n$ et affirmer

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_kx^k\right| \leq a_{n+1}\left|x\right|^{n+1} \leq a_{n+1}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série. Par suite la fonction somme est continue en $-1$.

(c) On a

$$\left|a_n-\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1-\operatorname{th} n}{n}$$

donc pour $x\in[0\,;1[$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\operatorname{th} n}{n}x^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x)\to+\infty \text{ et } n^2\frac{1-\operatorname{th} n}{n}\sim 2n\mathrm{e}^{-2n}\to 0$$

donc $\sum\frac{1-\operatorname{th} n}{n}$ est absolument convergente et la somme de la série entière $\sum\frac{1-\operatorname{th} n}{n}x^n$ est définie et continue en 1. On en déduit

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

**Exercice 61 :** [énoncé]
$R=1$, il y a divergence en $x=1$ et convergence par le CSSA en $x=-1$.
La fonction somme est définie sur $[-1\,;1[$.

Par application du critère spécial des séries alternées sur $[-1\,;0]$,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)x^k\right\|_{\infty,[-1;0]}\leq\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\to 0$$

il y a donc convergence uniforme sur $[-1\,;0]$ et donc continuité de la somme en $-1$ puis finalement sur $[-1\,;1[$.
Pour étudier la fonction en $1^-$, on peut exploiter l'encadrement

$$\frac{1}{n+1}\leq\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\frac{1}{n}$$

On en déduit pour $x\in[0\,;1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$

$$\text{et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)\underset{x\to1^-}{\sim}-\ln(1-x)$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n\underset{x\to1^-}{\sim}-\ln(1-x)$$

**Exercice 62 :** [énoncé]
Posons $b_n=\frac{a_n}{n!}$, on a $b_0=1$ et

$$(n+1)b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}b_{n-k}b_k$$

Notons $S$ la somme de la série entière $\sum b_nx^n$ et posons $R$ son rayon de convergence.
Par récurrence, on peut affirmer $|b_n|\leq 1$ et donc $R>0$.
Sur $]-R\,;R[$, la relation précédente donne a

$$S'(x)=S^2(x)$$

Après résolution, sachant que $S(0)=1$, on obtient

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

d'où l'on tire $a_n=n!$.

**Exercice 63 :** [énoncé]
Pour $x\neq 0$, posons $u_n=\frac{x^{2n+1}}{3n+2}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to x^2$ donc $R=1$.
La fonction somme $S$ est impaire, on se limite alors à $x>0$.

$$\sqrt{x}S(x^{3/2})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

or

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{3n+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$$

donc $S(x)=\frac{1}{x^{4/3}}\int_0^{x^{2/3}}\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ et il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples etc.

$$S(x)=\frac{1}{6x^{4/3}}\ln\frac{x^{4/3}+x^{2/3}+1}{x^{4/3}-2x^{2/3}+1}-\frac{1}{x^{4/3}\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x^{2/3}+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}\right)$$

**Exercice 64 :** [énoncé]

(a) On sait que les séries entières $\sum a_nx^n$ et $\sum na_nx^n$ ont le même rayon de convergence $R$ (notamment car une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence). Puisque $a_n=\mathrm{o}(a_n\ln n)$ et $a_n\ln n=\mathrm{o}(na_n)$ on peut affirmer par encadrement que la série entière $\sum(a_n\ln n)x^n$ a aussi pour rayon de convergence $R$. De plus

$$a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim a_n\ln n$$

donc la série entière $\sum\left(a_n\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)x^n$ a encore pour rayon de convergence $R$.

(b) Notons que $\sum\ln nx^n$ a pour rayon de convergence $R=1$. On sait

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$

donc le terme générale
$$\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
est borné par un certain $M$.
Par suite
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} Mx^n = \frac{Mx}{1-x} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
quand $x \to 1^-$.
Or par produit de Cauchy
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$
donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

**Exercice 65 :** [énoncé]

(a) Pour $0 < r < R$, il y a absolument convergence de $\sum a_n r^n$. On a
$$\left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}$$
Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient
$$\left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n$$
Puisque $\sum |a_n r^n|$ et $\sum |\overline{a_n} r^n|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum \sum_{k=0}^{n} |a_k| |\overline{a_{n-k}}| r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :
$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n \,d\theta$$
Or $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,d\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ donc, après simplification des termes nuls,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}$$

(b) Pour $0 < r < R$ suffisamment petit
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 - |f(0)|^2 \,d\theta$$
Par intégration, d'une fonction négative, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et on en déduit
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0$$
La fonction $f$ est alors constante.

(c) Posons
$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$
Pour tout $r > 0$,
$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$$
Pour $p \geq N+1$, on obtient
$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}} d\theta$$
Or
$$0 \leq \int_0^{2\pi} \frac{\left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}} d\theta \leq 2\pi \frac{(P(r))^2 + \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n\right)^2}{r^{2p}} = \frac{\mathrm{O}(r^{2N})}{r^{2p}}$$
donc
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}} d\theta \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$
Pour $p = N+1$,
$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = |a_{N+1}|^2 + \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2(n-N-1)}$$

avec

$$0 \leq \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2(n-N-1)} \leq \frac{1}{r^2} \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$$

On en déduit $a_{N+1} = 0$ puis, en reprenant la démarche avec $p = N+2, \ldots$, on obtient successivement $a_{N+2} = 0, \ldots$ et finalement $f = f_N \in \mathbb{C}_N[X]$

**Exercice 66 :** [énoncé]
Notons $\sum a_n z^n$ la série entière dont la somme est égale à $f$ sur $B^\circ$.
La fonction $f$ est continue sur un compact donc uniformément continue.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall z, z' \in B, |z - z'| \leq \delta \implies |f(z) - f(z')| \leq \varepsilon$$

Considérons alors $r = 1 - \delta$ et $g_r : z \mapsto f(rz)$.
Pour tout $z \in B$, $|z - rz| = \delta |z| \leq \delta$ donc $|f(z) - g(z)| \leq \varepsilon$. Ainsi $\|f - g\|_{\infty,B} \leq \varepsilon$
Puisque la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément vers $f$ sur tout compact inclus dans $B^\circ$, la série entière $\sum a_n r^n z^n$ converge uniformément vers $g$ sur $B$. Il existe donc un polynôme $P$ vérifiant $\|P - g\|_{\infty,B} \leq \varepsilon$ puis $\|f - P\|_{\infty,B} \leq 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

**Exercice 67 :** [énoncé]
Pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)\right) = \frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - x} - \frac{1}{\mathrm{e}^{i\alpha} - x}\right)$$

On reconnaît une écriture en $(Z - \bar{Z})/2i$, c'est donc une partie imaginaire

$$\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - x}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1 - x\mathrm{e}^{i\alpha}}\right)$$

Par sommation géométrique

$$\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1 - x\mathrm{e}^{i\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(n+1)\alpha} x^n$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\alpha) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\alpha) x^{n-1}$$

Par intégration de série entière, on obtient alors la relation proposée.

**Exercice 68 :** [énoncé]
Posons

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2}$$

On vérifie aisément la convergence de cette intégrale et la fonction $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

Pour $|x| < 1$,

$$f'(x) = \frac{1 - x}{1 - x^3} = (1 - x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_{3n} = 1, a_{3n+1} = -1 \text{ et } a_{3n+2} = 0$$

En intégrant,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

avec

$$f(0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2}$$

Pour calculer cette intégrale, on écrit

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan \frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{0}$$

Après calculs

$$f(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

**Exercice 69 :** [énoncé]

(a) En posant $Y = X - 1$,

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{1}{Y^n(Y+2)^m}$$

Pour $Y \in \left]-1/2\,;1/2\right[$,

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \frac{1}{2^m}\frac{1}{(1+\frac{Y}{2})^m} = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-m(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!}\frac{Y^k}{2^k}$$

Après simplifications

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}Y^k$$

On en déduit que la partie polaire relative au pôle 1 est

$$\frac{a_0}{(X-1)^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{X-1} = \frac{a_0}{Y^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y}$$

avec

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}$$

De même, en posant $Z = X + 1$, la partie polaire relative au pôle $-1$ est

$$\frac{b_0}{(X+1)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{X+1} = \frac{b_0}{Z^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{Z}$$

avec

$$b_k = \frac{(-1)^n}{2^{n+k}}\binom{n+k-1}{k}$$

Enfin, puisque de partie entière nulle, la fraction rationnelle étudiée est la somme des deux parties polaires proposées.

(b) En réduisant chaque partie polaire au même dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k(X-1)^k}{(X-1)^n} + \frac{\sum_{k=0}^{m-1}b_k(X+1)^k}{(X+1)^m}$$

Par conséquent, on posant

$$U(X) = \sum_{k=0}^{n-1}a_k(X-1)^k \text{ et } V(X) = \sum_{k=0}^{m-1}b_k(X+1)^k$$

la poursuite de la réduction au même dénominateur du calcul précédent donne

$$(X+1)^mU(X) + (X-1)^nV(X) = 1$$

**Exercice 70 :** [énoncé]

La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 avec

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}f(x)$$

et

$$f''(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)^{3/2}}f(x) + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}f'(x)$$

La fonction $f$ est donc solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$.

Analyse :

Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme $S$ est solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

La relation $(1+x^2)S''(x) + xS'(x) - S(x)/4 = 0$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1/4)a_n\right]x^n = 0$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

En adjoignant les conditions initiales $S(0) = 1$ et $S'(0) = 1/2$, on parvient à

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{4p-1}}\frac{(4p-2)!}{((2p)!)((2p-1)!)} \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{4p}}\frac{(4p-1)!}{(2p+1)!(2p-1)!}$$

Synthèse :

Considérons la série entière déterminée au terme de l'analyse. Celle-ci se comprend comme la somme de deux séries entières $\sum a_{2p}x^{2p}$ et $\sum a_{2p+1}x^{2p+1}$ chacune de rayon de convergence 1 car

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right| = \frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)} \to 1$$

Cette série entière est donc de rayon de convergence $R \geq 1$ et, compte tenu des calculs de l'analyse, sa somme est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0$$

Elle vérifie de plus les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$. Puisque la fonction $f$ est aussi solution de ce problème de Cauchy et que ce dernier possède une solution unique, on peut identifier $f$ et la somme de la série entière.

**Exercice 71 :** [énoncé]

(a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) La convergence de l'intégrale définissant $F$ provient de la convergence supposée de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k f(t)}{k!}\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

et

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$

compte tenu des hypothèses.
On peut alors affirmer

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

avec convergence sur $\mathbb{R}$ de la série entière considérée.

**Exercice 72 :** [énoncé]

(a) $f$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
Puisque $\ln(1+1/n) \sim 1/n$, la série n'est pas définie pour $x = 1$. En revanche, on vérifie aisément la convergence de la série en $x = -1$ en vertu du critère spécial des séries alternées. Finalement $f$ est définie sur $[-1\,;1[$.

(b) Calculons la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \sum_{p=1}^{N} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) = \ln\left(\frac{(2N+1)\left[(2N)!\right]^2}{\left[2^N N!\right]^4}\right)$$

Par la formule de Stirling

$$f(1) = \ln\frac{2}{\pi}$$

Par le changement de variable $u = 1/x$ $\mathcal{C}^1$ bijectif, on ne modifie par la nature de l'intégrale et on a

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Puisque

$$\left|\int_{E(x)}^{x} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_{E(x)}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{u} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

la nature de l'intégrale et sa valeur sont données par la limite de

$$\int_1^{n+1} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^k}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

On peut conclure

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{2}{\pi}$$

(c) On peut écrire

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{n} \varepsilon_n x^n$$

D'une part

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$$

et d'autre part

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n| < +\infty$$

On peut donc conclure

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

**Exercice 73 :** [énoncé]
Par développement en série entière

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \int_{[0;1[} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}\,\mathrm{d}t$$

Pour $n \geq 1$, il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues donc on peut donc intégrer terme à terme par le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

On a alors

$$n\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$

donc

$$n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Exercice 74 :** [énoncé]
Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

somme de série entière définie sur $]-1\,;1[$.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)\times 3^n} = \sqrt[3]{9}S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{9}\int_0^{1/\sqrt[3]{3}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1-t^3}$$

ce qui donne un résultat assez monstrueux :

$$9^{(1/3)}(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\mathrm{arctan}((\frac{2}{9}3^{(2/3)}+\frac{1}{3})\sqrt{3})+\frac{1}{6}\ln(3)+\frac{1}{6}\ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)})-\frac{1}{3}\ln(-3^{(2/3)}+3)+\frac{1}{18}$$

fourni par Maple.

**Exercice 75 :** [énoncé]

(a) Posons $a_n = \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} \neq 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2}$. $R = 2$.

(b) On sait que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2^n n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Par convergence uniforme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin t}{2-x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(2-x)+x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(2-x)+xu^2}$$

puis

si $x > 0$ alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}} \arctan \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$
Si $x < 0$ alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \operatorname{argth} \sqrt{\frac{-x}{2-x}}$$

**Exercice 76 :** [énoncé]
La suite $(a_n)$ est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).
Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable $x^n$.
En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car $(a_n)$ ne tend par 0.
On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même pour $x = -1$.
On conclut que l'intervalle cherché est
$$]-1\,;1[$$

**Exercice 77 :** [énoncé]
Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$. Après calculs
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi x^2$$
donc $R = 1/\sqrt{\pi}$.

**Exercice 78 :** [énoncé]
Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Étudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geq 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

**Exercice 79 :** [énoncé]

(a) Pour $t > 1$, $\mathrm{e}^{-t^n} \to 0$ avec $0 \leq \mathrm{e}^{-t^n} \leq \mathrm{e}^{-t}$. Par convergence dominée $I_n \to 0$.

(b) Par le changement de variable $u = t^n$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,
$$I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u$$
Par convergence dominée,
$$\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u$$
donc
$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u$$

(c) Par l'équivalent précédent $R = 1$ et la série entière diverge en 1. Par application du critère spécial des séries alternées, la série entière converge en $-1$.

**Exercice 80 :** [énoncé]
Posons
$$u(x,t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x$$
définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R} \times ]0\,;1[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Puisque
$$u(x,t) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{t^x}{\ln t} \text{ et } u(x,t) \xrightarrow[t\to1^-]{} 1$$
la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1[$ si, et seulement si, $x > -1$.
De plus, cette fonction est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction intégrande.
On en déduit que la fonction $f$ est définie sur $]-1\,;+\infty[$.
La fonction $u$ admet une dérivée partielle
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x$$
Cette dérivée partielle est continue en $x$ et continue par morceaux en $t$.
Pour $[a\,;b] \subset ]-1\,;+\infty[$, on a
$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times ]0\,;1[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-t)t^a$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On en déduit

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1} + C$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$$

est continue sur $]0\,;1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1, elle est donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$|f(x)| \leq \int_0^1 M t^x \,\mathrm{d}t = \frac{M}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On en déduit $C = 0$ puis finalement

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1}$$

**Exercice 81 :** [énoncé]

(a) Pour $t \in ]0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}$$

Posons

$$S_n \colon t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1}\frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)b}}{1+t^b}$$

Les fonctions $S_n$ sont continues par morceaux et la suite $(S_n)$ converge simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction

$$S \colon t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$$

elle-même continue par morceaux.
De plus

$$|S_n(t)| \leq \frac{2t^{a-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ intégrable sur $]0\,;1[$.
Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de l'intégrale introduite.
Or

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite..

(b) Après calculs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

**Exercice 82 :** [énoncé]

La fonction $u(x,t) = \mathrm{e}^{(ix-1)t}/\sqrt{t}$ définie sur $\mathbb{R} \times ]0\,;+\infty[$.
$t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$u(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } t^2u(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que la fonction donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = f(x) + ig(x)$$

est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t \in ]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}\mathrm{e}^{(ix-1)t}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t \in ]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par domination, on peut affirmer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{(ix-1)t}\,\mathrm{d}t$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{2(x+i)}F(x)$$

La résolution de cette équation différentielle donne

$$F(x) = F(0)\frac{\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Enfin, sachant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on parvient à

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

d'où les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right)$$

On peut encore éventuellement « simplifier » en exploitant

$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}} \text{ pou } x \in [-\pi/2\,;\pi/2]$$

ce qui donne

$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

et aussi

$$\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \mathrm{signe}(x)\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

**Exercice 83 :** [énoncé]
Pour $x > 0$,

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_{]0;1]}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(x\ln x)^n}{n!}$$

Les fonctions $f_n$ sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Les fonctions $f_n$ sont intégrables et

$$\int_{]0;1]}|f_n| = \int_{]0;1[}\frac{(-1)^n x^n(\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

donc quand $\varepsilon \to 0$

$$\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1}\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum\int_0^1 |f_n|$
Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0;1]} x^x\,\mathrm{d}x$ est définie et

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

**Exercice 84 :** [énoncé]
On a
$$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right| \leq \frac{1\times 2}{(x+1)(x+2)}\times 1 = \varphi(x)$$
avec $\varphi$ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Quand $n\to+\infty$,
$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\to-\infty$$
car $\ln(1+x/k)\sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.
Par suite
$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\to 0$$
puis par le théorème de convergence dominée
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\,\mathrm{d}x = 0$$

**Exercice 85 :** [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$
$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$
Par convergence dominée, sachant
$$|f(u/n)| \leq \|f\|_\infty\,\mathrm{e}^{-u} = \varphi(u)$$
avec $\varphi$ intégrable, on obtient
$$I_n \to \int_0^{+\infty} f(0)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)$$

**Exercice 86 :** [énoncé]

(a) Pour $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$,
$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}\underset{t\to 0}{=}\mathrm{O}(1)\text{ et }\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(b) Posons $g(x,t) = \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$.
$g$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\cos(xt)$$
$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}=\varphi(t)$ avec $\varphi$ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, *a fortiori* continue et dérivable.

(c) La décomposition
$$\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}$$
permet d'écrire
$$f(1) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$
Par la majoration $|\sin(u)|\leq|u|$, on obtient
$$\int_0^{+\infty}\left|\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\right|\leq\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$
La série $\sum\int_{[0;+\infty[}\left|\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\right|\mathrm{d}t$ converge, on peut intégrer terme à terme
$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$
On calcule l'intégrale sommée en considérant la partie imaginaire de
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{it}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$
On obtient à terme
$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

**Exercice 87 :** [énoncé]

(a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq a\}$.
$t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0\,;1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur $\Omega$ et pour $z \in \Omega_a$,

$$\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ intégrable sur $]0\,;1]$ car $\varphi(t) \sim t^a$ quand $t \to 0^+$.
Par domination, on peut affirmer que $f$ est définie et continue sur $\Omega_a$.
Ceci valant pour tout $a > -1$, on peut encore affirmer que $f$ est définie et continue sur $\Omega$.

(b) On observe

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} f(0)$$

donc

$$f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{x+1}$$

(c) Par intégration par parties

$$(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|t^{z+1}\right|\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|t^{z+1}\right| = |\exp((z+1)\ln t| = \exp\left((\mathrm{Re}(z)+1)\ln t\right) = t^{\mathrm{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1.
On a alors

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+2} \underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi

$$(z+1)f(z) \underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

puis

$$f(z) \underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2z}$$

**Exercice 88 :** [énoncé]
Posons

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Pour $|x| > 1$, l'intégrale ne peut pas être définie.
Pour $|x| \leq 1$
En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.
Pour $x = -1$ :
Quand $t \to 0^+$, $\ln(1-\cos t) \sim 2\ln t$
Quand $t \to 2\pi^-$, $t = 2\pi - h$, $\ln(1-\cos t) = \ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$
Pour $x = 1$, quand $t \to \pi$,$t = \pi + h$, $\ln(1+\cos t) = \ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$.
Finalement $f$ est définie sur $[-1\,;1]$.
Pour des raisons de symétrie,

$$f(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Par domination sur $[-a\,;a]$ avec $a < 1$, $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$ et

$$f'(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos t}$$

Par le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$,

$$f'(x) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)+x(1-u^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = 2\pi\arcsin x$.

**Exercice 89 :** [énoncé]
Étudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$$

Notons $u(x,t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times ]0\,;+\infty[$
$t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur$]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$
$x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t \in ]0\,;+\infty[$ et

$$|u(x,t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ fonction intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que la fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
$x \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour chaque $t \in ]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour chaque $t \in ]0\,;+\infty[$
$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2x}\frac{1}{(1+t^2)}$$

car $2tx \leq x^2+t^2$.
Soit $[a\,;b] \subset ]0\,;+\infty[$

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times ]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2a}\frac{1}{(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec $\psi$ fonction intégrable.
Par domination sur tout segment, on obtient $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{(x^2-1)}$$

Cette identité se prolonge en $x=1$ par un argument de continuité.
On a alors

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x)-f(\varepsilon)$$

Or $f(0)=0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = f(x)$$

**Exercice 90 :** [énoncé]
La fonction $f$ est bien définie sur $]0\,;+\infty[$ et

$$xf(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Posons

$$u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

définie sur $]0\,;+\infty[ \times [0\,;+\infty[$.
$u$ admet deux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2}\mathrm{e}^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-tx}$$

Pour chaque $x>0$, les fonctions $u$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables et pour tout $[a\,;b] \subset ]0\,;+\infty[$, on a la domination

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ intégrable. On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$. Il en est de même pour $f$ par opérations sur de telles fonctions.
Quand $x \to +\infty$,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc $xf(x) \to \frac{\pi}{2}$ puis

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

Étudions maintenant $f(x)$ quand $x \to 0^+$.
Par le changement de variable $u = tx$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x^2+u^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\varphi\colon u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}$$

Par intégration par parties,

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\varphi(u)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln(x^2+u^2)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Pour $x \in \left]0\,;1\right]$,

$$\left|\ln(x^2+u^2)\right| \leq \left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|$$

et la fonction

$$u \mapsto \left(\left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|\right)\varphi'(u)$$

est intégrable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ car $\varphi'$ peut être prolongée par continuité en 0 et

$$\varphi'(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$$

On en déduit

$$f(x) = -\ln x + \mathrm{O}(1) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$$

**Exercice 91 :** [énoncé]

$t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\left[0\,;+\infty\right[$,
$x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [-a\,;a]$

$$\left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\left|\ln(a^2+t^2)\right| + \left|\ln(t^2)\right|}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ intégrable. Par suite $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est immédiat que $f$ est paire. Poursuivons, en étudiant $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right) = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

$t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $\left[0\,;+\infty\right[$,
$x \mapsto t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec $\psi$ intégrable. Par suite $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)$$

donc

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{x+1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 1$ par continuité.
En procédant au changement de variable $u = 1/t$, on obtient $f(0) = 0$ et donc on peut conclure

$$f(x) = \pi\ln(x+1)$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$ en exploitant un argument de continuité.

**Exercice 92 :** [énoncé]

(a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

En posant $u_n$ le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.

(b) $S_{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permuter et obtenir

$$S_{-1} = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}\binom{2n}{n}$$

on observe

$$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1}\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \qquad (*)$$

En sommant pour $n$ allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$4\left(S_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(S_{-1} - \frac{1}{2}\right) = S_0$$

puis

$$S_0 = \frac{1+2S_{-1}}{3}$$

(c) On multiplie la relation$(*)$ par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des $S_q$ avec $q < p$.

**Exercice 93 :** [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, $t^2 \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-tx} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-tx}$.
Pour $x = 0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$ est convergente bien que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.

(b) Pour $x \in [a\,; b] \subset \left]0\,; +\infty\right[$,

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-tx} \right) \right| \le \mathrm{e}^{-ax} = \varphi(x)$$

avec $\varphi$ intégrable. Par domination sur tout segment $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0\,; +\infty\right[$.

(c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t) \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}t = \mathrm{Im} \left( -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+i)t} \,\mathrm{d}t \right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

donc $f(x) = C - \arctan x$.
Or

$$|f(x)| \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2}$$

(d) En découpant l'intégrale, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}t$$

Posons

$$u_n(t) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}t$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établir que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,; 1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction $f$, est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 94 :** [énoncé]

(a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$.
$\Delta_\lambda \colon \left]0; +\infty\right[$.

(b)

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right)$$

Or

$$\left| 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|\lambda|}$$

donc $F_\lambda(s) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0$.

(c) Puisque

$$\left| \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right| \le \frac{\lambda^n}{n!}$$

il y a converge normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série des fonctions continues $s \mapsto \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}$. Ceci permet d'affirmer

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \xrightarrow[s \to 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^\lambda$$

et donc

$$F_\lambda(s) \underset{s \to 0^+}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\lambda}{s}$$

(d) Par intégrations par parties successives :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n \,\mathrm{d}y = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

(e)

$$F_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n \,\mathrm{d}y$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :

$$F_\lambda(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda y} (1-y)^{s-1} \,\mathrm{d}y$$

**Exercice 95 :** [énoncé]
Pour $t \in ]0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t \,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(2n+1)^2}$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

**Exercice 96 :** [énoncé]
La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left|a_p \frac{t^p}{p!}\right| \le \|(a_n)\|_\infty \frac{t^p}{p!}$$

De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.
Enfin

$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right| \le \|(a_n)\|_\infty \,\mathrm{e}^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.
Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!} \mathrm{e}^{-2t}$$

La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.
Les fonctions $f_p$ et $\sum_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.
Les fonctions $f_p$ sont intégrables sur $[0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_p(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|a_p|}{2^{p+1}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme générale d'une série convergente.

Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

**Exercice 97 :** [énoncé]
Par la série exponentielle, on peut écrire pour $t > 0$,

$$t^{-t} = \exp(-t\ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t\ln t)^n}{n!}$$

Pour procéder à une intégration terme à terme, posons $u_n(t) = (-1)^n (t\ln t)^n/n!$ pour $t \in ]0\,;1]$.
Les fonctions $u_n$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction $t \mapsto t^{-t}$ elle-même continue par morceaux.
Les fonctions $u_n$ sont intégrables sur $]0\,;1]$ car on peut les prolonger par continuité en 0 et

$$\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 t^n (\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

En itérant le procédé on obtient

$$\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et ainsi

$$\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \int_0^1 |u_n|$ étant convergente, on peut intégrer terme à terme et l'on obtient

$$\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

avec existence de l'intégrale en premier membre.

**Exercice 98 :** [énoncé]
On sait que la fonction $\zeta$ est continue.

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}x$$

avec

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{n^x} = \frac{1}{n^2 \ln n}$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

**Exercice 99 :** [énoncé]

(a) Posons

$$f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n$$

Les fonctions $f_n$ sont continues par morceaux et la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0\,;\pi/2[$, elle-même continue par morceaux. Enfin, on a la domination

$$|f_n(x)| \leq 1 = \varphi(x)$$

avec $\varphi$ évidemment intégrable sur $[0\,;\pi/2[$. Par convergence dominée, on obtient

$$u_n \to 0$$

(b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum f_n$. En effet, les fonctions $f_n$ sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;\pi/2[$ vers la fonction

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}$$

elle-même continue par morceaux. Enfin les fonctions $f_n$ sont intégrables sur $[0\,;\pi/2[$ et l'hypothèse de travail absurde signifie la convergence de la série $\sum \int_{[0;\pi/2[} |f_n|$.
Par théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\,\mathrm{d}x$$

avec convergence de l'intégrale. Or, quand $x \to 0^+$

$$\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)} \sim \frac{8}{\pi^2 x^2}$$

et donc l'intégrale introduite diverge. C'est absurde.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

**Exercice 100 :** [énoncé]
On a $u_n \geq v_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$.
Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0\,;\pi/2]$ de la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\cos^2 t} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t}$$

Or quand $t \to 0^+$

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t} \sim \frac{1}{t^2}$$

qui n'est pas intégrable sur $]0\,;\pi/2]$.
C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

**Exercice 101 :** [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = A\cos x + B\sin x$.
Méthode de variation des constantes

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \cot x \end{cases}$$

Après résolution et intégration

$$y(x) = -\frac{1}{2}\sin x \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + A\cos x + B\sin x$$

**Exercice 102 :** [énoncé]

(a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 à coefficients constants de solution homogène

$$y = A\cos x + B\sin x$$

La méthode de variation des constantes propose une solution particulière de la forme

$$y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$$

avec $A$ et $B$ fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 1/x \end{cases}$$

En faisant $\cos(x)\times(1) - \sin(x)\times(2)$, on détermine $A'(x)$ et $B'(x)$ s'obtient de façon analogue

$$\begin{cases} A'(x) = -\sin x/x \\ B'(x) = \cos x/x \end{cases}$$

On peut alors proposer

$$A(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } B(x) = -\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

où les intégrales introduites ont le bon goût de converger...
La solution générale de l'équation différentielle est alors

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(b) Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-tx}/(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}_+\times[0\,;+\infty[$.
$x\mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t\in[0\,;+\infty[$
$t\mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x\in\mathbb{R}_+$ et

$$|u(x,t)| \le \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ intégrable sur $[0\,;+\infty[$. Par domination $f$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, $x\mapsto u(x,t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t\in[0\,;+\infty[$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
La dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est continue en $x$ et continue par morceaux en $t$.
Soit $[a\,;b]\subset\,]0\,;+\infty[$. On a

$$\forall (x,t)\in[a\,;b]\times[0\,;+\infty[,\ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \le \frac{t^2\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} \le \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ intégrable. Par domination sur tout segment, $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On vérifie alors

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

de sorte que $f$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Ainsi, il existe $A, B\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On observe

$$0 \le f(x) \le \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc par encadrement $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ce qui entraîne $A = B = 0$.

Ainsi
$$\forall x>0, f(x)=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$
Séparément, on calcule $f(0)$
$$f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=[\arctan t]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

(c) Par convergence de l'intégrale, quand $x\to 0^+$
$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
De plus
$$\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t+\int_x^{1}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t=C^{te}+\int_x^{1}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$
avec
$$\left|\int_x^{1}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=-\ln x$$
donc
$$\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\to 0$$
Ainsi en passant à la limite en 0 l'expression précédente de $f(x)$, on obtient
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=f(0)=\frac{\pi}{2}$$

**Exercice 103 :** [énoncé]
Les solutions de l'équation différentielle $y''+y=f$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $f$ l'est.
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y''+y=f$ est
$$y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$
Cette solution est $2\pi$-périodique si, et seulement si,
$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{x+2\pi}f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$
*i.e.* $\int_x^{x+2\pi}f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille $(\sin,\cos)$ ainsi que la $2\pi$-périodicité de $f$, cela équivaut à la condition
$$\int_0^{2\pi}f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}f(t)\cos t\,\mathrm{d}t=0$$

**Exercice 104 :** [énoncé]
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y''+y=f$ est
$$y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$
Pour conclure, il suffit de justifier que $x\mapsto\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.
Par intégration par parties,
$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(0)\cos x-\int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$
Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer $f$ croissante et donc $f'(t)\geq 0$.
Puisque $-1\leq\cos(x-t)\leq 1$,
$$f(0)-f(x)\leq\int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t\leq f(x)-f(0)$$
puis
$$f(0)(1-\cos x)\leq\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t\leq 2f(x)-f(0)(1+\cos x)$$
La fonction $f$ étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x\mapsto\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 105 :** [énoncé]
Remarquons
$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t=\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$
Si $f$ est solution alors
$$f(x)=1+2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $f(0) = 1$.
$f$ est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = -2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + 2f(x)$$

et $f'(0) = 2$.
$f$ est alors deux fois dérivable et

$$f''(x) = 1 - f(x) + 2f'(x)$$

Ainsi $f$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 1$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x + 1$$

Cela conduit à $f(x) = 2x\mathrm{e}^x + 1$.
Inversement, soit par calculs, soit en remontant le raisonnement, on peut affirmer que la fonction proposée est solution.

**Exercice 106 :** [énoncé]
Soit $f$ une fonction solution. $f$ est dérivable et

$$f'(x) = f(1/x)$$

donc $f'$ est encore dérivable. La fonction $f$ est donc deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'(1/x) = -\frac{1}{x^2}f(x)$$

La fonction $f$ apparaît alors comme étant solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$E\colon x^2y'' + y = 0$$

$E$ est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t = \ln x$.
Soient $y\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$z(t) = y(\mathrm{e}^t)$$

$z$ est deux fois dérivable et

$$y(x) = z(\ln x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x)$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)$$

$y$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $E$ si, et seulement si, $z$ est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$F\colon z'' - z' + z = 0$$

$F$ est un équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale

$$z(x) = \left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\mathrm{e}^{x/2}$$

La solution générale de $E$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc

$$y(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

Revenons à la fonction $f$. Il existe $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\lambda + \mu\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + (\mu - \lambda\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

et donc

$$f'(x) = f(1/x) \iff \begin{cases}\lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda\\ \lambda\sqrt{3} - \mu = 2\mu\end{cases} \iff \lambda = \mu\sqrt{3}$$

Finalement, les solutions sont les fonctions $f$ données par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

**Exercice 107 :** [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0\,;+\infty[$.

Sur $]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$,

$$\int \frac{3\ln x+1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = 3\ln x + \ln|\ln x| + C^{te}$$

Solution générale sur $]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3\,|\ln x|$$

Solution sur $]0\,;+\infty[$.
Soient $y\colon ]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
Il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ vérifiant $y(x)=\lambda x^3\ln x$ sur $]0\,;1[$ et $y(x)=\mu x^3\ln x$ sur $]1\,;+\infty[$.
La continuité en 1 donne $y(1)=0$ sans conditions sur $\lambda$ et $\mu$.
La dérivabilité en 1 donne $\lambda=\mu$.
Ainsi $y(x)=\lambda x^3\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ qui est évidement solution.

**Exercice 108 :** [énoncé]
Par convergence absolue, on peut écrire

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k)!}I_n + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+1)!}A + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+2)!}A^2 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+3)!}A^3$$

ce qui donne

$$\exp(A) = \frac{\cos(1)+\mathrm{ch}(1)}{2}I_n + \frac{\sin(1)+\mathrm{sh}(1)}{2}A + \frac{\mathrm{ch}(1)-\cos(1)}{2}A^2 + \frac{\mathrm{sh}(1)-\sin(1)}{2}A^3$$

**Exercice 109 :** [énoncé]
On a

$${}^t\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}A^k\right) = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left({}^tA\right)^k$$

En passant à la limite et par continuité de l'application de transposition, on a

$${}^t(\exp A) = \exp({}^tA)$$

Puisque les matrices $A$ et $-A$ commutent, on a

$${}^t(\exp A)\exp A = \exp(-A)\exp(A) = \exp(-A+A) = \exp(O_n) = I_n$$

Ainsi la matrice $\exp A$ est orthogonale.

**Exercice 110 :** [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X'=AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A)=\{-1,2,0\}$,

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

On a $A=PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix}-1&2&0\\1&1&1\\0&3&-1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

En posant $Y=P^{-1}X$, on obtient

$$X'=AX \iff Y'=DY$$

or

$$Y'=DY \iff Y(t) = \begin{pmatrix}\lambda\mathrm{e}^{-t}\\\mu\mathrm{e}^{2t}\\\nu\end{pmatrix} \text{ avec } \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{K}$$

donc

$$X'=AX \iff X(t) = \lambda\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-t}\\\mathrm{e}^{-t}\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\\3\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ avec } \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{K}$$

**Exercice 111 :** [énoncé]
$\chi_A = X^3-2X$, $\pi_A=\chi_A$. On a donc

$$A^3 = 2A, A^{2k+1} = 2^kA \text{ et } A^{2k+2} = 2^kA^2 \text{ pour } k>0$$

avec

$$A^2 = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!}A + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k-1}}{(2k)!}A^2 = I_3 + \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}A + \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(\sqrt{2})-1)A^2$$

**Exercice 112 :** [énoncé]

(a) $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$,

$$E_2(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice $A$ est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$.

(b) Ci-dessus.

(c) Par division euclidienne $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$$

puis

$$\mathrm{e}^A = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}}{3} A + \frac{2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2}{3} I_3$$

**Exercice 113 :** [énoncé]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-2)(X^2 - X + 1)$.

La résolution complexe est alors facile puisque la matrice $A$ est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de $A$, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\operatorname{Sp}({}^tA) = \operatorname{Sp} A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \operatorname{Vect}{}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation $2x + y - z = 0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.
Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :
$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} y_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} \\ y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$
Et on peut conclure via $X = PY$.

**Exercice 114 :** [énoncé]

$\chi_A = X(X^2+1)$, $\pi_A = X(X^2+1)$, $\exp(A)\exp({}^tA) = \exp(A)\exp(-A) = I_3$.
En calculant $A^2, A^3, \ldots$ on obtient

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 115 :** [énoncé]

$A^2 = O$ donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$.
Puisque $A \neq 0$, $A$ n'est pas diagonalisable. $\pi_A = X^2$ et $\chi_A = -X^3$.

$$\exp(A) = I + A$$

L'étude se généralise pour $n \geq 3$ avec $A = (\omega^{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\omega \in U_n \setminus \{1\}$.

**Exercice 116 :** [énoncé]

(a) Cas $|x| < 1$ :

$$|u_n(x,y)| = o(x^n)$$

donc la série $\sum u_n(x,y)$ est absolument convergente.
Cas $|x| > 1$ :
Si la série $\sum u_n(x,y)$ converge alors $u_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\cos(ny) = u_n(x,y)\frac{\sqrt{n}}{x^n} \to 0$$

par croissance comparée.
Mais alors

$$\cos(2ny) = 2\cos^2(ny) - 1 \to -1$$

ce qui est incohérent avec l'affirmation qui précède.
Ainsi la série $\sum u_n(x,y)$ diverge.
Cas $x = 1$ :
Si $y = 0 \quad [2\pi]$ alors $u_n(1,y) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n(1,y)$ diverge.
Si $y \neq 0 \quad [2\pi]$ alors par une transformation d'Abel, on obtient la convergence de la série $\sum u_n(1,y)$.
Cas $x = -1$ :
On remarque

$$u_n(-1,y) = u_n(1,y+\pi)$$

Ainsi $\sum u_n(-1,y)$ converge si, et seulement si, $y \neq \pi \quad [2\pi]$.
Finalement

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\right\} \cup \{(1,y)/y \neq 0 \quad [2\pi]\} \cup \{(-1,y)/y \neq \pi \quad [2\pi]\}$$

(b) L'intérieur de $D$ est alors

$$D^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\right\}$$

Soient $a \in [0\,;1[$ et $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < a\right\}$.
$u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D_a$ et la série de fonctions $\sum u_n(x,y)$ converge simplement sur $D_a$.
La série de fonctions $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)$ converge normalement sur $D_a$ via

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq \sqrt{n}a^{n-1}$$

Enfin, la série de fonctions $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)$ converge normalement sur $D_a$ via

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq \sqrt{n}a^{n}$$

On peut alors appliquer les théorèmes usuels qui affirment que

$$(x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,y)$$

admet deux dérivées partielles continues sur $D_a$. C'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D_a$. Enfin, ceci valant pour tout $a \in [0\,;1[$, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de $D$.

**Exercice 117 :** [énoncé]
En passant en coordonnées polaires, on écrit

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta \text{ avec } r = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

On a alors

$$f(x,y) = r^2\cos\theta\sin\theta\cos(2\theta) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

On prolonge $f$ par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$.
Par opérations sur les fonctions, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right) = 0$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
L'étude pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique puisque

$$f(x,y) = -f(y,x)$$

Ainsi $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Cependant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1$$

alors que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$$

La fonction $f$ ne peut donc être de classe $\mathcal{C}^2$.

**Exercice 118 :** [énoncé]

(a) Puisque la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire

$$g(x) = g(y) + \int_y^x g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $t = y + u(x-y)$, on obtient

$$g(x) = g(y) + (x-y)\int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

Ainsi

$$f(x,y) = \int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

et cette relation vaut pour $x \neq y$ et aussi pour $x = y$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.
L'application $\varphi\colon (x,u) \mapsto g'(y+u(x-y))$ admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u) = ug''(y+u(x-y))$$

Cette dérivée partielle est continue en $x$ et continue par morceaux en $u$
Pour $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$ assez grand pour que $y$ en soit élément, on a

$$\forall x \in [a\,;b], \forall u \in [0\,;1], y+u(x-y) \in [x\,;y] \subset [a\,;b]$$

La fonction $g''$ est continue donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ sur le segment $[a\,;b]$. On a alors

$$\forall (x,u) \in [a\,;b] \times [0\,;1], \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\right| \leq M = \psi(u)$$

La fonction $\psi$ est évidemment intégrable sur $[0\,;1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer que l'application $x \mapsto \int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u$$

Ainsi $f$ admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 ug''(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

De plus, la fonction $(x,y,u) \mapsto ug''(y+u(x-y))$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times [0\,;1]$ et par une domination sur $[a\,;b] \times [a\,;b]$, on obtient la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$.
De même, on montre que la deuxième dérivée partielle de $f$ existe et est continue.

**Exercice 119 :** [énoncé]

(a) On passe en coordonnées polaires avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan(x/y)$ de sorte que $x = r\sin\theta$ et $y = r\cos\theta$.
On parvient à

$$f(x,y) = C(x/y)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$

avec $C$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Idem, on parvient à

$$f(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3} + C\,(x/y)$$

avec $C$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 120 :** [énoncé]
La fonction $f\colon (x,y) \mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
Après résolution ses points critiques sont : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
En $(0,0)$ : $f(0,0) = 0$, $f(1/n,0) \sim -2/n^2 < 0$ et $f(1/n,1/n) \sim 2/n^4 > 0$.
Pas d'extremum local en $(0,0)$
En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ : $r = 20$, $t = 20$ et $s = 4$. $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$.
Il y a un minimum local en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

$$f(\sqrt{2}+u,-\sqrt{2}+v) = -8+10(u^2+v^2)+4uv+4\sqrt{2}(u^3-v^3)+u^4+v^4$$

On exploite

$$2(u^2+v^2)+4uv = 2(u+v)^2 \text{ et } 8u^2+4\sqrt{2}u^3+u^4 = u^2(u+2\sqrt{2})^2$$

pour affirmer

$$f(\sqrt{2}+u,-\sqrt{2}+v) = f(\sqrt{2},-\sqrt{2})+2(u+v)^2+u^2(u+2\sqrt{2})^2+v^2(v+2\sqrt{2})^2$$

Ainsi $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ est un minimum global.
En $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ : l'étude est identique puisque $f(x,y) = f(y,x)$.

**Exercice 121 :** [énoncé]

(a) L'application $\phi$ est clairement un endomorphisme de $E$.
Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $(r,\theta) \in V = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$
Pour $f \in E$, on considère $g \in \mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R})$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

On remarque

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Ainsi

$$\Phi(f) = 0 \iff r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

pour tout $(r,\theta) \in V$.
La résolution de cette équation aux dérivées partielles donne $g(r,\theta) = C(\theta)$ avec $C$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$.
Par suite on obtient la solution générale $f(x,y) = C(\arctan(y/x)) = D(y/x)$ avec $D$ fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Si $f$ est homogène de degré $\alpha$ alors en dérivant la relation $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ par rapport à $t$ puis en évaluant le résultat en $t=1$ on obtient l'égalité $\Phi(f) = \alpha f$.
Inversement si $\Phi(f) = \alpha f$ alors en introduisant $g$ comme ci-dessus, on obtient

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \alpha g(r,\theta)$$

ce qui donne $g(r,\theta) = C(\theta)r^\alpha$ puis

$$f(x,y) = D(y/x)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$

avec $D$ fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que $f$ est homogène de degré $\alpha$.

(c) La fonction $h$ est homogène de degré 5, donc $h/5$ est solution particulière de l'équation linéaire $\Phi(f) = h$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors le sous-espace affine $h/5 + \ker\Phi$.

**Exercice 122 :** [énoncé]
Notons $A,B,C$ les points définissant notre triangle et $O$ le centre du cercle circonscrit.
En introduisant les mesures $\alpha,\beta,\gamma$ des angles $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, on vérifie

$$\alpha+\beta+\gamma = 0 \quad [2\pi]$$

et on peut calculer l'aire algébrique des triangles $(OAB)$, $(OBC)$ et $(OCA)$ qui sont respectivement

$$\frac{1}{2}r^2\sin\alpha, \frac{1}{2}r^2\sin\beta \text{ et } \frac{1}{2}r^2\sin\gamma = -\frac{1}{2}r^2\sin(\alpha+\beta)$$

L'aire algébrique du triangle $(ABC)$ est alors

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}r^2(\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta))$$

L'étude des points critiques de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;2\pi[^2$ conduit à résoudre le système

$$\begin{cases}\cos\alpha = \cos(\alpha+\beta)\\ \cos\beta = \cos(\alpha+\beta)\end{cases}$$

dont les seules solutions dans $]0\,;2\pi[^2$ sont

$$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$$

Ce sont les situations des triangles équilatéraux resp. direct et indirect.
L'extremum trouvé vaut

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

**Exercice 123 :** [énoncé]
Soit $x>0$ fixé.
L'application $y \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $2y - \frac{a}{xy^2}$, elle donc minimale pour $y = \sqrt[3]{\frac{a}{2x}}$.
Considérons

$$g\colon x \mapsto f(x,\sqrt[3]{\frac{a}{2x}}) = x^2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{x^2}}$$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 2x - \frac{\sqrt[3]{2a^2}}{x^{5/3}}$,
$g'(x) = 0 \iff 2x^{8/3} = 2^{1/3}a^{2/3} \iff x = \sqrt[4]{\frac{a}{2}}$.
$g$ est minimale pour $x = \sqrt[4]{a/2}$, puis $f$ admet un minimum en $(\sqrt[4]{a/2},\sqrt[4]{a/2})$ de valeur $2\sqrt{2a}$.

**Exercice 124 :** [énoncé]
Par dérivation de fonctions composées

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+th_1,\dots,x_n+th_n)$$

**Exercice 125 :** [énoncé]

(a) En polaires, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$f_p(x,y) = (\cos\theta + \sin\theta)^p r^p \sin\frac{1}{r}$$

Si $p \geq 1$ alors $|f_p(x,y)| \leq 2^p r^p \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et on peut prolonger $f$ par continuité en $(0,0)$.
Si $p = 0$ alors $f_0(x,y) = \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ diverge car le sinus diverge en $+\infty$.

(b) On suppose $p \geq 1$.
Pour $p = 2$ :

$$f_2(x,y) = (x+y)^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{O}(\|(x,y)\|^2)$$

ce qui s'apparente à un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$.
La fonction $f_2$ est donc différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle.
Pour $p > 2$ :

$$f_p(x,y) = (x+y)^{p-2} f_2(x,y)$$

La fonction $f_p$ est différentiable par produit de fonctions différentiables.
Pour $p = 1$ :
Quand $h \to 0^+$,

$$\frac{1}{h}\left(f_1(h,0) - f_1(0,0)\right) = \sin\frac{1}{h}$$

diverge. Ainsi $f$ n'est pas dérivable en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,0)$, elle ne peut donc y être différentiable.