

Exercice 1 [02650] [Correction]

On note V l'ensemble des matrices à coefficients entiers du type

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

et G l'ensemble des $M \in V$ inversibles dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et dont l'inverse est dans V .

- Quelle est la structure de G ?
- Soit $M \in V$. Montrer que $M \in G$ si, et seulement si, $\det M = \pm 1$.
- Donner un groupe standard isomorphe à G muni du produit.

Exercice 2 [02649] [Correction]

Soit (G, \cdot) un groupe fini tel que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

où e est le neutre de G . On suppose G non réduit à $\{e\}$.

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 3 [02648] [Correction]

Soit G un groupe, H un sous-groupe de G , A une partie non vide de G . On pose $AH = \{ah \mid a \in A, h \in H\}$. Montrer que $AH = H$ si, et seulement si, $A \subset H$.

Exercice 4 [02677] [Correction]

Soit \mathbb{K} un corps, E un espace vectoriel de dimension finie n sur \mathbb{K} et \mathbb{L} un sous-corps de \mathbb{K} tel que \mathbb{K} est un espace vectoriel de dimension finie p sur \mathbb{L} . Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie q sur \mathbb{L} . Relier n, p, q .

Exercice 5 [02662] [Correction]

Soit $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$.

- Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une \mathbb{Q} -base du \mathbb{Q} -espace vectoriel K .
- Montrer que K est un sous-corps de \mathbb{R} .

Exercice 6 [02658] [Correction]

- Pour $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge n = 1$, montrer que $a^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}$.
- Pour p premier et $k \in \{1, \dots, p-1\}$, montrer que p divise $\binom{p}{k}$.
- Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On suppose que $a^{n-1} = 1 \pmod{n}$. On suppose que pour tout x divisant $n-1$ et différent de $n-1$, on a $a^x \neq 1 \pmod{n}$. Montrer que n est premier.

Exercice 7 [02660] [Correction]

Si p est un nombre premier, quel est le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 8 [03929] [Correction]

- Déterminer l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. De quelle structure peut-on munir cet ensemble ?
- Y a-t-il, à isomorphisme près, d'autres groupes de cardinal 4 ?

Exercice 9 [02713] [Correction]

Trouver les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0 \text{ et } \operatorname{tr} A = 8$$

Exercice 10 [02703] [Correction]

Diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 [02702] [Correction]

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. La matrice $(a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 12 [01948] [Correction]

Trouver les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\operatorname{tr} M = 0 \text{ et } M^3 - 4M^2 + 4M = O_n$$

Exercice 13 [02696] [Correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont même valeurs propres.

Exercice 14 [02705] [Correction]

Soient a, b deux réels et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & \ddots & a & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & b & \cdots & b \end{pmatrix}$$

Réduire ces deux matrices.

Exercice 15 [02692] [Correction]

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 16 [02719] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

- (a) Montrer que f est nilpotent.
- (b) On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\text{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_e g = \text{diag}(\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1)$$

Exercice 17 [02707] [Correction]

Soient $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les éléments diagonaux valent a et les autres valent b . A est-elle diagonalisable ? Quelles sont les valeurs propres de A ? Quel est le polynôme minimal de A ? Sous quelles conditions sur a et b , A est-elle inversible ? Lorsque c'est le cas trouver l'inverse de A .

Exercice 18 [02706] [Correction]

On pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

pour tous a, b réels.

- (a) Ces matrices sont-elles simultanément diagonalisables ?
- (b) Étudier et représenter graphiquement l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(a, b)^n$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

Exercice 19 [02667] [Correction]

Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

Exercice 20 [02700] [Correction]

Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$ on pose

$$T(f) : x \in [0; 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

- (a) Vérifier que T est un endomorphisme de E .
- (b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T .

Exercice 21 [02729] [Correction]

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $A = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

- (a) Trouver une matrice triangulaire inférieure unité L et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.

(b) Exprimer A^{-1} à l'aide de

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que $\text{Sp } A^{-1} \subset [0; 4]$.

Exercice 22 [02718] [Correction]

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples de degré $n + 1$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B . Déterminer les éléments propres de Φ . L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 23 [03063] [Correction]

Soit E l'espace des fonctions f de classe \mathcal{C}^1 de $[0; +\infty[$ vers \mathbb{R} vérifiant $f(0) = 0$. Pour un élément f de E on pose $T(f)$ la fonction définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 24 [02697] [Correction]

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$$

Indice : Commencer par le cas où

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 25 [02714] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 + A^2 + A = 0$$

Montrer que la matrice A est de rang pair.

Exercice 26 [02698] [Correction]

- (a) Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire de degré n , existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique $P(X)$?
- (b) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

On suppose $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ le polynôme

$$P_q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^q)$$

appartient encore à $\mathbb{Z}[X]$.

- (c) Soit P dans $\mathbb{Z}[X]$ unitaire dont les racines complexes sont de modules ≤ 1 . Montrer que les racines non nulles de P sont des racines de l'unité.

Exercice 27 [02722] [Correction]

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Étudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme $u \mapsto fu - uf$ de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 28 [02726] [Correction]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^3 = \text{Id}$$

Décrire les sous-espaces stables de u .

Même question avec E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 29 [02681] [Correction]

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et a un élément non nul de \mathbb{K} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3af^2 + a^2f = 0$. Est-il vrai que $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires ?

Exercice 30 [03755] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

Montrer que A est triangulaire supérieure si, et seulement si, A^k l'est pour tout $k \geq 2$.

Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose plus la matrice A inversible.

Exercice 31 [02699] [Correction]

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

- Comparer $\text{Sp } B$ et $\text{Sp } {}^t B$.
- Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que s'il existe λ pour lequel $AC = \lambda C$, alors $\text{Im } C \subset \ker(A - \lambda I_n)$.
- Soit λ une valeur propre commune à A et B . Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \neq 0$, telle que $AC = CB = \lambda C$.
- On suppose l'existence de $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } C = r$ et $AC = CB$. Montrer que le PGCD des polynômes caractéristiques de A et B est de degré $\geq r$.
- Étudier la réciproque de d).

Exercice 32 [02708] [Correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$$

Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A) = 0$?

Exercice 33 [02897] [Correction]

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose, pour toute $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt$$

- L'opérateur T est-il un automorphisme de E ?
- Existe-t-il un sous-espace vectoriel de E de dimension finie impaire et stable par T ?

Exercice 34 [02723] [Correction]

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $T \in \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ par

$$T(g) = f \circ g - g \circ f$$

Montrer que si f est diagonalisable, alors T est diagonalisable; si f est nilpotente, alors T est nilpotente.

Exercice 35 [02727] [Correction]

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal Π_f .

Montrer l'existence de $x \in E$ tel que

$$\{P \in \mathbb{C}[X] / P(f)(x) = 0\}$$

soit l'ensemble des multiples de Π_f .

Exercice 36 [02690] [Correction]

Soient A et B des matrices complexes carrées d'ordre n . On suppose les matrices $A + 2^k B$ nilpotentes pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$. Montrer que les matrices A et B sont nilpotentes.

Exercice 37 [02720] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$. On suppose $u^3 = u$, $\text{tr } u = 0$ et $\text{tr } u^2 = 2n$. On note

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) \mid uv = vu\}$$

- Calculer la dimension $C(u)$.
- Quels sont les n tels que $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

Exercice 38 [02721] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f_A(M) = AM$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est diagonalisable.
- Montrer que f_A est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 39 [03763] [Correction]

Pour $n \geq 2$, on note H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant aucune matrice inversible.

- (a) Montrer que H contient toutes les matrices nilpotentes.
 (b) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 40 [00708] [Correction]

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que

$$C = A + B, C^2 = 2A + 3B \text{ et } C^3 = 5A + 6B$$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 41 [03291] [Correction]

- (a) Montrer que, pour $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \neq 0$, on a l'égalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

si, et seulement si, il existe $n - 1$ réels positifs $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall k \geq 2, z_k = \alpha_k z_1$$

- (b) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^n = I_n$ et $\text{tr } M = n$

Exercice 42 [02735] [Correction]

Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 43 [01332] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

- (a) Justifier la définition de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
 On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1, F)$. On note (P_0, \dots, P_n) l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, \dots, X^n)$.
 (b) Calculer $P_k(0)^2$.

- (c) Déterminer une base de F^\perp que l'on exprimera dans la base (P_0, \dots, P_n) . En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Exercice 44 [01330] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

- (a) Montrer que ${}^tAA = 0$.
 (b) En déduire que $A = 0$.

Exercice 45 [02753] [Correction]

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives.

Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^4 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 46 [02715] [Correction]

Trouver les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M^2$ et que M n'ait aucune valeur propre réelle.

Exercice 47 [03748] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$.

- (a) Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.
 (b) Montrer que si n est pair, $\det A \geq 0$. Sous quelle condition l'inégalité est-elle stricte ?

Exercice 48 [02744] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A .

- (a) Étudier la convergence de

$$\frac{1}{p+1}(I_n + A + \dots + A^p)$$

lorsque $p \rightarrow +\infty$.

(b) La suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente?

Exercice 49 [02730] [Correction]

Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de E tels que pour tout sous-espace vectoriel V de E

$$f(V^\perp) \subset (f(V))^\perp?$$

Exercice 50 [03749] [Correction]

Montrer que A antisymétrique réelle d'ordre n est semblable à

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où C est une matrice inversible d'ordre pair.

Exercice 51 [02731] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathcal{M} l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\varphi: (A, B) \in \mathcal{M}^2 \mapsto \text{tr} {}^t AB$$

- (a) Montrer que φ est un produit scalaire.
- (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}$ pour que $M \mapsto \Omega M$ soit φ -orthogonale.

Exercice 52 [02924] [Correction]

Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non nul, $g \in \mathcal{O}(E)$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan u^\perp . Décrire $g \circ \sigma \circ g^{-1}$.

Exercice 53 [02746] [Correction]

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Quelles sont les A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $J + A$ soit inversible?

Exercice 54 [02740] [Correction]

Dans un espace euclidien E , soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

- (i) f est une isométrie vectorielle;
- (ii) $f^2 = -\text{Id}$;
- (iii) $f(x)$ est orthogonal à x pour tout x .

Exercice 55 [02750] [Correction]

Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, que vaut M^2 ?

Exercice 56 [03752] [Correction]

Soient A une matrice symétrique réelle à valeurs propres positives et U une matrice orthogonale de même taille. Comparer $\text{tr}(AU)$ et $\text{tr}(UA)$ à $\text{tr} A$.

Exercice 57 [02751] [Correction]

Montrer que le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de ${}^t AA$.

Exercice 58 [02759] [Correction]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à valeurs propres positives.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AU) \leq \text{tr} A$.

- (a) Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- (b) Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- (c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- (d) Étudier la réciproque.
- (e) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = SU$.

Exercice 59 [02749] [Correction]

(Transformation de Cayley)

- (a) Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?

(b) Soit

$$\varphi: A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur

$$\{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(\Omega)\}$$

Exercice 60 [02748] [Correction]

On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n . Pour toute famille $u = (u_1, \dots, u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ on pose

$$M_u = ((u_i | u_j))_{1 \leq i, j \leq p}$$

(a) Montrer que la famille (u_1, \dots, u_p) est libre si, et seulement si, M_u est inversible.

(b) On suppose qu'il existe $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ telles que $M_u = M_v$.

Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(u_i) = f(v_i)$ pour tout i .

Exercice 61 [02757] [Correction]

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Trouver $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que ${}^t P J P = D$.

Exercice 62 [02716] [Correction]

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le système

$$\begin{cases} M^2 + M + I_n = 0 \\ {}^t M M = M^t M \end{cases}$$

Exercice 63 [03927] [Correction]

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{Sp } A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose

$$AB + BA = 0$$

Montrer $AB = BA = 0$.

Exercice 64 [03751] [Correction]

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t A = A^2$.

(a) Montrer que $A^3 = I_n$ et que A est orthogonale.

(b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A .

Montrer que le noyau de $f^2 + f + \text{Id}$ est de dimension paire et en déduire la forme de la matrice de f dans une base bien choisie.

Exercice 65 [03762] [Correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On pose

$$B = A^3 + A + I_n$$

Montrer que A est un polynôme en B .

Exercice 66 [03923] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 = A^t A$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{C} .

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

- (a) $G \subset \text{GL}_4(\mathbb{R})$, G est non vide, stable par passage à l'inverse et par produit car V l'est. Ainsi G est un sous-groupe de $\text{GL}_4(\mathbb{R})$ donc un groupe.
- (b) Si $M \in G$ alors $\det M, \det M^{-1} \in \mathbb{Z}$ et $\det M \times \det M^{-1} = \det I_4 = 1$ donc $\det M = \pm 1$.
Inversement si $\det M = \pm 1$ alors $M^{-1} = {}^t \text{Com } M \in V$ donc $M \in G$.
- (c)

$$\det M = ((a+c)^2 - (b+d)^2)((a-c)^2 + (b-d)^2)$$

donc

$$\det M = \pm 1 \iff \begin{cases} (a+c)^2 - (b+d)^2 = \pm 1 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = \pm 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système à coefficients entiers donne à l'ordre près :
 $a, b, c, d = \pm 1, 0, 0, 0$.

Posons J la matrice obtenue pour $a = c = d = 0$ et $b = 1$. On vérifie $J^4 = I_4$.
L'application $\varphi: U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow G$ définie par $\varphi(\varepsilon, n) = \varepsilon J^n$ est bien définie, c'est un morphisme de groupe, injectif et surjectif. Ainsi G est isomorphe à $U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou plus élégamment à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : [énoncé]

Le groupe (G, \cdot) est abélien. En effet, pour tout $x \in G$, on a $x^{-1} = x$ donc, pour $x, y \in G$, $(xy)^{-1} = xy$. Or $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$ donc $xy = yx$.
Pour $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $x \in G$, posons

$$\bar{0}.x = e \text{ et } \bar{1}.x = x$$

On vérifie qu'on définit alors un produit extérieur sur G munissant le groupe abélien (G, \cdot) d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel. En effet, pour $(x, y) \in G^2$ et $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ on a

$$(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x \text{ et } \bar{1}.x = x$$

De plus, cet espace est de dimension finie car $\text{Card } G < +\infty$, il est donc isomorphe à l'espace $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +, \cdot)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
En particulier, le groupe (G, \cdot) est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 3 : [énoncé]

Supposons $AH = H$.

$$\forall a \in A, a = ae \in AH = H$$

donc $A \subset H$.

Supposons $A \subset H$. Pour $x \in AH$, $x = ah$ avec $a \in A$, $h \in H$. Or $a, h \in H$ donc $x = ah \in H$.

Ainsi $AH \subset H$.

Inversement, pour $a \in A$ (il en existe car $A \neq \emptyset$) et pour tout $h \in H$, $h = a(a^{-1}h)$ avec $a^{-1}h \in H$ donc $h \in AH$. Ainsi $H \subset AH$ puis =.

Exercice 4 : [énoncé]

Il est facile de justifier que E est un \mathbb{L} -espace vectoriel sous réserve de bien connaître la définition des espaces vectoriels et de souligner que qui peut le plus, peut le moins...

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de \mathbb{K} -espace vectoriel E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ une base du \mathbb{L} -espace vectoriel \mathbb{K} .

Considérons la famille des $(\lambda_j \vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. Il est facile de justifier que celle-ci est une famille libre et génératrice du \mathbb{L} -espace vectoriel E . Par suite E est de dimension finie $q = np$.

Exercice 5 : [énoncé]

- (a) Il est clair que K est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} et que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est \mathbb{Q} -génératrice.

Montrons qu'elle est libre en raisonnant par l'absurde.

Supposons $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ non tous nuls.

Quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ non tous nuls.

Quitte à factoriser, on peut aussi supposer $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$.

On a $(a + b\sqrt{2})^2 = (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})^2$ donc

$$a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 3c^2 + 6cd\sqrt{2} + 6d^2.$$

Par l'irrationalité de $\sqrt{2}$ on parvient au système

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3c^2 + 6d^2 \\ ab = 3cd \end{cases}$$

Par suite $3 \mid ab$ et $3 \mid a^2 + 2b^2$ donc $3 \mid a$ et $3 \mid b$.

Ceci entraîne $3 \mid cd$ et $3 \mid c^2 + 2d^2$ donc $3 \mid c$ et $3 \mid d$.

Ceci contredit $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$.

Ainsi la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est \mathbb{Q} -libre et c'est donc une \mathbb{Q} -base de K .

- (b) Sans peine, on vérifie que \mathbb{K} est un sous-anneau de \mathbb{R} .
Soit $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{K}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ non tous nuls.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{(a + b\sqrt{2}) + (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})} \\ &= \frac{a + b\sqrt{2} - (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})}{(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2) + 2(ab - 3cd)\sqrt{2}} \\ &= \frac{a + b\sqrt{2} - (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})}{\alpha + \beta\sqrt{2}} \end{aligned}$$

puis

$$\frac{1}{x} = \frac{(a + b\sqrt{2} - (c\sqrt{3} + d\sqrt{6}))(\alpha - \beta\sqrt{2})}{\alpha^2 - 2\beta^2} \in K$$

et donc K est un sous-corps de \mathbb{R} .

Notons que les quantités conjuguées par lesquelles on a ci-dessus multiplié ne sont pas nuls car x est non nul et la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est \mathbb{Q} -libre.

Exercice 6 : [énoncé]

- (a) L'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de cardinal $\varphi(n)$.
(b) $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$ donc $p \mid k \binom{p}{k}$ or $p \wedge k = 1$ donc $p \mid \binom{p}{k}$.
(c) Posons $d = (n-1) \wedge \varphi(n)$. $d = (n-1)u + \varphi(n)v$ donc $a^d = 1 \pmod{n}$. Or $d \mid n-1$ donc nécessairement $d = n-1$. Par suite $n-1 \mid \varphi(n)$ puis $\varphi(n) = n-1$ ce qui entraîne que n est premier.

Exercice 7 : [énoncé]

Si $p = 2$: il y a deux carrés dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si $p \geq 3$, considérons l'application $\varphi : x \mapsto x^2$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $\varphi(x) = \varphi(y) \iff x = \pm y$.

Dans $\text{Im } \varphi$, seul 0 possède un seul antécédent, les autres éléments possèdent deux antécédents distincts. Par suite $\text{Card } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 1 + 2(\text{Card } \text{Im } \varphi - 1)$ donc il y a $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 8 : [énoncé]

- (a) Les inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont les \bar{k} avec $k \wedge 8 = 1$. Ce sont donc les éléments $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}$ et $\bar{7}$.
L'ensemble des inversibles d'un anneau est un groupe multiplicatif.

- (b) Le groupe $(\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}, \times)$ vérifie la propriété $x^2 = 1$ pour tout x élément de celui-ci. Ce groupe n'est donc pas isomorphe au groupe cyclique $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ qui constitue donc un autre exemple de groupe de cardinal 4. En fait le groupe $(\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 9 : [énoncé]

Si A est solution alors $P = X(X-2)^2$ est annulateur de A et les valeurs propres de A figurent parmi $\{0, 2\}$. Par la trace, on peut alors affirmer que 2 est valeur propre de multiplicité 4.

Par le lemme de décomposition des noyaux, $\ker(A - 2\text{Id})^2$ et $\ker A$ sont supplémentaires.

Par multiplicité des valeurs propres, leurs dimensions respectives sont 4 et $n-4$. Ainsi A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 2I_4 + M & 0 \\ 0 & O_{n-4} \end{pmatrix}$$

avec $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = 0$.

En raisonnant sur le rang, on montre que M est semblable à

$$O_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La réciproque est immédiate.

Exercice 10 : [énoncé]

Étudions la première matrice que nous noterons A .

Celle-ci est de rang 2 et on peut facilement déterminer une base de son noyau.

En posant le système $AX = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$, on obtient une solution non nulle sous réserve que

$$\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$$

En notant λ_1 et λ_2 les deux racines de cette équation, on obtient $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 1 & 1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0) & & 1 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

En reprenant la même démarche avec la seconde matrice que nous noterons B , on obtient $B = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & & (0) & 2 & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

où λ_1, λ_2 sont les deux racines de

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n-2) = 0$$

Exercice 11 : [énoncé]

En posant $M = (a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, on vérifie $M^2 = \lambda M$ avec $\lambda = \sum_{k=1}^n a_k^2$.
 Si $\lambda \neq 0$ alors M annule un polynôme scindé simple, elle est donc diagonalisable.
 Si $\lambda = 0$ alors $M^2 = 0$ et donc M est diagonalisable si, et seulement si, $M = 0$ ce qui revient à $(a_1, \dots, a_n) = 0$.
 Notons que la matrice M est symétrique mais pas nécessairement réelle : le théorème spectral ne s'applique pas.

Exercice 12 : [énoncé]

Le polynôme

$$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X-2)^2$$

est annulateur de M .

On en déduit $\text{Sp } M \subset \{0, 2\}$ et M trigonalisable (car M annule un polynôme scindé).

Par suite $\text{tr } M$ est la somme des valeurs propres de M comptées avec multiplicité et puisque $\text{tr } M = 0$, seule 0 est valeur propre de M .

On en déduit que la matrice $M - 2I_n$ est inversible et puisque

$$M(M - 2I_n)^2 = O_n$$

on obtient

$$M = O_n$$

Exercice 13 : [énoncé]

Il est classique d'établir $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ en commençant par établir le résultat pour A inversible et le prolongeant par un argument de continuité et de densité.

Exercice 14 : [énoncé]

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(a + (n-1)b, a-b, \dots, a-b)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & (0) \\ \vdots & -1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$$

$B = Q\Delta Q^{-1}$ avec

Si n est impair : $\Delta = \text{diag}(a + (n-1)b, b-a, \dots, b-a, a-b, \dots, a-b)$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & (0) & 1 & (0) \\ \vdots & & \ddots & & \ddots \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 1 & -1 & (0) & 1 & (0) \end{pmatrix}$$

Si n pair : $\Delta = \text{diag}(a + (n-1)b, b-a, \dots, b-a, a-b, \dots, a-b)$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & (0) & 1 & (0) \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & -1 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & -1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots & (0) \\ 1 & -1 & (0) & 1 & (0) \end{pmatrix}$$

Exercice 15 : [énoncé]

La colonne ${}^t(1 \ 1 \ 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 6.

Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique et celui-ci a pour racines

$$6, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

Ces deux matrices sont semblables à

$$\text{diag} \left(6, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \right)$$

et donc *a fortiori* semblables entre elles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais aussi, et c'est assez classique, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) On vérifie $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \neq 0$ alors l'endomorphisme $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ admet une infinité de valeurs propres.

Ceci étant impossible en dimension finie, on peut affirmer que f est nilpotent.

(b) $f^n = 0$ (car $\dim E = n$) et $f^{n-1} \neq 0$. Pour $x \notin \ker f^{n-1}$ et $e' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$, on montre classiquement que e' est une base de E dans laquelle la matrice de f est telle que voulue.

$f(g(f^{n-1}(x))) = 0$ donc $g(f^{n-1}(x)) = \lambda f^{n-1}(x)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$

Aussi $f^k(g(f^{n-1-k}(x))) = (\lambda + k)f^{n-1}(x)$ et donc la matrice de g dans e' et triangulaire supérieure avec sur la diagonale $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1$. Ainsi

$$\text{Sp}(g) = \{\lambda, \dots, \lambda + n - 1\}$$

Soit y vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda + n - 1$.

Si $y \in \ker f^{n-1}$ alors puisque $\ker f^{n-1}$ est stable par g , $\lambda + n - 1$ est valeur propre de l'endomorphisme induit par g sur $\ker f^{n-1}$. Cela n'étant par le cas $y \notin \ker f^{n-1}$. On vérifie alors facilement que la famille $e = (f^{n-1}(y), \dots, f(y), y)$ résout notre problème.

Exercice 17 : [énoncé]

A est symétrique donc diagonalisable.

$$\chi_A = (X - (a + (n - 1)b))(X - (a - b))^{n-1}$$

$$\text{Sp}(A) = \{a + (n - 1)b, a - b\} \text{ (si } n \geq 2)$$

$$\pi_A = (X - (a + (n - 1)b))(X - (a - b))$$

A est inversible si, et seulement si, $0 \notin \text{Sp}(A)$ i.e. $a + (n - 1)b \neq 0$ et $a \neq b$.

$$\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & & (y) \\ & \ddots & \\ (y) & & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = ax + (n - 1)by \\ \beta = ay + bx + (n - 2)by \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre le système

$$\begin{cases} ax + (n - 1)by = 1 \\ bx + (a + (n - 2)b)y = 0 \end{cases}$$

pour expliciter A^{-1} .

Exercice 18 : [énoncé]

(a) $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$ avec $D(a, b) = \text{diag}((a + b)^2, (a - b)^2, a^2 - b^2, a^2 - b^2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $M(a, b)^n \rightarrow 0$ si, et seulement si, $|a + b| < 1$, $|a - b| < 1$ et $|a^2 - b^2| < 1$.
Or $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.
L'étude graphique est alors simple.

Exercice 19 : [énoncé]

Considérons $T: P(X) \mapsto P(X + 1)$. T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est annulé par son polynôme caractéristique de la forme

$$\chi_T = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Cela fournit directement la propriété voulue.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) On peut écrire

$$T(f)(x) = \int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$$

L'application $T(f)$ apparaît alors comme continue (et même dérivable).

Ainsi, l'application T opère de E dans E , elle de surcroît évidemment linéaire.

(b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant

$$T(f) = \lambda f$$

Cas $\lambda = 0$

On a $T(f) = 0$ donc

$$\int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt = 0$$

En dérivant, on obtient

$$xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt = 0$$

En dérivant à nouveau, on obtient $f = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T .

Cas $\lambda \neq 0$

On a $T(f) = \lambda f$

$$\int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt = \lambda f$$

En particulier, on peut affirmer que $f(0) = 0$ car $T(f)(0) = 0$.

Le premier membre de l'équation $T(f) = \lambda f$ est dérivable donc la fonction f est également dérivable et, en dérivant, on obtient la relation

$$\int_x^1 f(t) dt = \lambda f'(x)$$

En particulier $f'(1) = 0$.

Le premier membre de cette nouvelle équation étant dérivable, la fonction f est deux fois dérivable et on obtient en dérivant l'équation différentielle

$$\lambda f''(x) + f(x) = 0$$

Sous cas $\lambda < 0$

Sachant $f(0) = 0$, la résolution de l'équation différentielle donne

$$f(x) = A \operatorname{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right)$$

La condition $f'(1) = 0$ entraîne toujours $f = 0$ et donc un tel λ n'est pas valeur propre de T .

Sous cas $\lambda > 0$

Sachant $f(0) = 0$, on obtient par résolution de l'équation différentielle

$$f(x) = A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

La condition $f'(1) = 0$ n'entraînera pas $f = 0$ que si

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\lambda = \frac{4}{((2k+1)\pi)^2} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*$$

Notons qu'alors il est possible de remonter les précédents calculs et d'affirmer que

$$f: x \mapsto \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 4/((2k+1)\pi)^2$.

Exercice 21 : [énoncé]

(a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = {}^tL$$

(b) $U = I + N + \cdots + N^{n-1}$, $(I - N)U = I$ donc $U^{-1} = I - N$,
 $L^{-1} = {}^t(U^{-1}) = I - {}^tN$ donc $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = I - N - {}^tN + N^tN$.

(c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & 1 \\ (0) & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons χ_n le polynôme caractéristique de $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$.

On a $\chi_{n+2}(\lambda) = (2 - \lambda)\chi_{n+1}(\lambda) - \chi_n(\lambda)$ avec $\chi_0(\lambda) = 1$ et $\chi_1(\lambda) = 1 - \lambda$.

En écrivant $\lambda = 2 + 2 \cos \theta$ avec $\theta \in [0; \pi]$ et en posant $f_n(\theta) = \chi_n(2 + 2 \cos \theta)$ on a la relation :

$f_{n+2}(\theta) + 2 \cos \theta f_{n+1}(\theta) + f_n(\theta) = 0$, $f_0(\theta) = 1$ et $f_1(\theta) = 2 \cos \theta - 1$.

La résolution de cette récurrence linéaire d'ordre 2 donne

$$f_n(\theta) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

Ainsi, χ_n admet n racines dans $[0; 4]$ et puisque ce polynôme est de degré n il n'y en a pas ailleurs : $\operatorname{Sp} A^{-1} \subset [0; 4]$.

Exercice 22 : [énoncé]

On écrit

$$B = \alpha(X - x_0) \dots (X - x_n)$$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ alors $B \mid (A - \lambda)P$. Pour des raisons de degré, B et $A - \lambda$ ne peuvent être premiers entre eux, ces polynômes ont donc une racine commune. Ainsi il existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\lambda = A(x_i)$. Inversement pour $\lambda = A(x_i)$, $P = \prod_{j=0, j \neq i}^n (X - x_j)$, $\Phi(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$. Ainsi,

$$\text{Sp } \Phi = \{A(x_i) \mid i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}.$$

Précisons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = A(x_i)$.

Quitte à réindexer, on peut supposer que $\lambda = A(x_0)$.

S'il existe d'autres x_i tels que $\lambda = A(x_i)$ on réindexe encore les x_1, \dots, x_n de sorte que $\lambda = A(x_0) = \dots = A(x_p)$ et $\lambda \neq A(x_{p+1}), \dots, A(x_n)$. Ainsi x_0, \dots, x_p sont racines de $A - \lambda$ alors que x_{p+1}, \dots, x_n ne le sont pas.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Phi(P) = \lambda P$ si, et seulement si, $B \mid (A - \lambda)P$. Or $A - \lambda = (X - x_0) \dots (X - x_p) \tilde{A}$ avec x_{p+1}, \dots, x_n non racines de \tilde{A} . Puisque $(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \wedge \tilde{A} = 1$,

$$B \mid (A - \lambda)P \iff (X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \mid P.$$

Ainsi

$$E_\lambda(\Phi) = \{(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n)Q \mid Q \in \mathbb{R}_p[X]\}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à la dimension de l'espace, Φ est diagonalisable.

Exercice 23 : [énoncé]

Puisque f est de classe \mathcal{C}^1 et que $f(0) = 0$, on peut écrire

$$f(t) =_{t \rightarrow 0} f'(0)t + o(t)$$

Ainsi la fonction $\varphi: t \mapsto f(t)/t$ peut être prolongée par continuité en 0 et donc l'intégrale définissant $T(f)(x)$ a un sens en tant qu'intégrale d'une fonction continue. De plus, la fonction $T(f)$ apparaît alors comme la primitive s'annulant en 0 de cette fonction continue φ , c'est donc une fonction élément de E . Enfin, la linéarité de l'application T étant immédiate, on peut affirmer que T est un endomorphisme de E .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $T(f) = \lambda f$ alors pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$T(f)(x) = \lambda f(x)$$

En dérivant cette relation, on obtient pour tout $x \in]0; +\infty[$

$$f(x) = \lambda x f'(x)$$

Si $\lambda = 0$ alors f est la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda \neq 0$, f est solution de l'équation différentielle $\lambda x y' = y$.

Cette dernière est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont la solution générale sur $]0; +\infty[$ est

$$y(x) = Cx^{1/\lambda}$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = Cx^{1/\lambda}$$

Or pour qu'une telle fonction puisse être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$, il faut $C = 0$ ou $1/\lambda \geq 1$. Ainsi les valeurs propres de T sont les éléments de l'intervalle $]0; 1]$.

Inversement, soient $\lambda \in]0; 1]$ et la fonction $f_\lambda: x \mapsto x^{1/\lambda}$ prolongée par continuité en 0.

La fonction f_λ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$, s'annule en 0 et vérifie $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ sans être la fonction nulle.

Finalement, les valeurs propres de T sont exactement les éléments de l'intervalle $]0; 1]$.

Exercice 24 : [énoncé]

Dans le cas où

$$A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la propriété est immédiate en écrivant

$$B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$$

avec C bloc carré de taille r .

Dans le cas général, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec $r = \text{rg } A$ et P, Q inversibles.

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^q \chi_{Q^{-1}ABQ}(X) = X^q \chi_{J_rPBQ}(X)$$

donc

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{PBQJ_r}(X) = X^p \chi_{BQJ_rP}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$$

Exercice 25 : [énoncé]

Le polynôme

$$X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$$

annule la matrice A . Ce polynôme étant scindé à racines simples dans \mathbb{C} , la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus

$$\text{Sp } A \subset \{0, j, j^2\}$$

Puisque la matrice A est réelle, les valeurs propres j et j^2 ont même multiplicité $p \in \mathbb{N}$. La diagonalisation complexe de A comporte alors p nombres j et p nombres j^2 sur la diagonale, les éventuels autres coefficients diagonaux étant nuls. La matrice A est alors de même rang que cette matrice diagonale, c'est-à-dire $2p$.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Oui, un tel polynôme existe, il suffit de se référer aux matrices compagnons !

Pour $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, la matrice compagnon associée est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & 0 \\ (0) & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & (0) & a_0 \\ -1 & \ddots & a_1 \\ & \ddots & X \\ (0) & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Il peut se calculer par la succession d'opérations élémentaires

$$L_i \leftarrow L_i + XL_{i+1} \text{ avec } i \text{ allant de } n-1 \text{ à } 1 \text{ dans cet ordre}$$

On obtient alors

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 0 & (0) & \alpha \\ -1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 \\ (0) & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \vdots \\ 0 \\ X + a_{n-1}X \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha = (a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n)$$

En développant selon la première ligne, on obtient

$$\chi_M(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

Ainsi, pour $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n , on peut construire une matrice à coefficients entiers dont le polynôme caractéristique est $(-1)^n P(X)$.

(b) Il existe une matrice A dont le polynôme caractéristique est P . Puisque toute matrice complexe est trigonalisable, la matrice A est en particulier semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice A^q est alors semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^q & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A^q est alors P_q . Or A^q est une matrice à coefficients entiers et donc son polynôme caractéristique P_q est aussi à coefficients entiers.

(c) Compte tenu des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on peut majorer les coefficients de P et affirmer que, pour un degré fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes P possibles car les coefficients de P sont entiers et bornés. Considérons un tel polynôme. L'application $q \in \mathbb{N}^* \mapsto P_q$ n'est pas injective compte tenu à cause de l'argument de cardinalité précédent. Il existe donc $q < r$ tel que $P_q = P_r$. Ainsi, il existe une permutation σ de \mathbb{N}_n vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \lambda_i^q = \lambda_{\sigma(i)}^r$$

À l'aide d'une décomposition en cycles de σ , on peut affirmer qu'il existe une puissance de σ égale à l'identité et donc conclure que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ il existe $q' > q$ tel que $\lambda_i^q = \lambda_i^{q'}$. On peut alors affirmer que λ_i est nul ou bien racine de l'unité.

Exercice 27 : [énoncé]

Posons ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ étudié. On observe que $\phi^3 = \phi$. Par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que ϕ est diagonalisable de seules valeurs propres possibles 0, 1 et -1 .

En introduisant une base adaptée à la projection f , la matrice de cet endomorphisme est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En notant $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de u dans cette base, on obtient :

$$\phi(u) = 0 \iff B = 0 \text{ et } C = 0.$$

$$\phi(u) = u \iff A = 0, C = 0 \text{ et } D = 0.$$

$$\phi(u) = -u \iff A = 0, B = 0 \text{ et } D = 0.$$

Exercice 28 : [énoncé]

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

u annule un polynôme scindé simple, l'endomorphisme u est donc diagonalisable. Tout sous-espace vectoriel possédant une base de vecteurs propres est stable et inversement.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id})$$

Si F est un sous-espace vectoriel stable alors posons

$$F_1 = F \cap \ker(u - \text{Id})$$

et

$$F_2 = F \cap \ker(u^2 + u + \text{Id})$$

Montrons $F = F_1 \oplus F_2$.

Tout $x \in F$ peut s'écrire $x = a + b$ avec $a \in \ker(u - \text{Id})$ et $b \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$.

Puisque $u(x) = a + u(b) \in F$ et $u^2(x) = a + u^2(b) \in F$, on a

$$a = \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)) \in F \text{ puis } b = x - a \in F.$$

Ainsi $a \in F_1$, $b \in F_2$ et on a donc $F \subset F_1 + F_2$.

Il est alors immédiat qu'on peut alors conclure $F = F_1 \oplus F_2$.

Puisque $F_2 \subset \ker(u^2 + u + \text{Id})$, pour $x \in F_2$ non nul $(x, u(x))$ est libre et

$\text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u . Cela permet d'établir que F_2 est la somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme $\text{Vect}(x, u(x))$ avec $x \neq 0$,

$x \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$. Quant à F_1 , il n'y a pas de condition à souligner puisque tout sous-espace vectoriel de $\ker(u - \text{Id})$ est stable par u .

Exercice 29 : [énoncé]

$P = X(X^2 - 3aX + a^2)$ est annulateur de f donc par le théorème de décomposition des noyaux, $E = \ker f \oplus \ker(f^2 - 3af + a^2 \text{Id})$ car X et $X^2 - 3aX + a^2$ sont premiers entre eux. Or a étant non nul, on montre élémentairement $\ker(f^2 - 3af + a^2 \text{Id}) \subset \text{Im } f$ tandis que l'inclusion réciproque provient de ce que $(f^2 - 3af + a^2 \text{Id}) \circ f = 0$. Il est donc vrai que $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

Exercice 30 : [énoncé]

L'implication directe est immédiate : elle découle de la stabilité par produit de l'espace des matrices triangulaires supérieures. Inversement, supposons A^k triangulaire supérieure pour tout $k \geq 2$. Introduisons le polynôme caractéristique de A

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + \det(A)$$

Puisque celui-ci est annulateur de A , on peut écrire

$$a_n A^n + \dots + a_1 A + \det(A) I_n = O_n$$

En multipliant la relation par A et en réorganisant

$$A = \frac{-1}{\det A} (a_1 A^2 + \dots + a_n A^{n+1})$$

et la matrice A est donc triangulaire supérieure.

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

nous obtenons un contre-exemple où $A^k = O_2$ pour tout $k \geq 2$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) $\text{Sp } B = \text{Sp } {}^t B$ car $\chi_B = \chi_{{}^t B}$.

(b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A(CX) = \lambda(CX)$ donc $CX \in \ker(A - \lambda I_n)$.

(c) Soit X et Y des vecteurs propres de A et ${}^t B$ associé à la valeur propre λ . La matrice $C = X {}^t Y$ est solution.

(d) On peut écrire $C = Q J_r P$ avec P, Q inversibles. La relation $AC = CB$ donne $Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$.

En écrivant les matrices $Q^{-1} A Q$ et $P B P^{-1}$ par blocs, l'égalité $Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$ impose une décomposition en blocs triangulaire puis permet d'observer que $\chi_A = \chi_{Q^{-1} A Q}$ et $\chi_B = \chi_{P B P^{-1}}$ ont un facteur commun de degré $\geq r$, à savoir le polynôme caractéristique du bloc commun en position $(1,1)$.

- (e) La réciproque est assurément fautive en toute généralité. Pour $r = n$, deux matrices ayant même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables.

Exercice 32 : [énoncé]

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(a + b, \dots, a + b, a - b, \dots, a - b)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & (0) & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (0) & & & 1 & 0 & (0) & -1 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 1 & & (0) & 0 & -1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\pi_A = (X - (a + b))(X - (a - b))$$

et les polynômes annulateurs de A sont les multiples de π_A .

Exercice 33 : [énoncé]

- (a) L'application T est évidemment linéaire et est à valeurs dans E .
 Soit $g \in E$. Montrons que l'équation $Tf = g$ admet une solution unique.
 Unicité : Si $Tf = g$ alors $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire $y' + y = g$ vérifiant $y(0) = 0$. Par le théorème de Cauchy ceci détermine $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ de façon unique et donc f aussi.
 Existence : La dérivée de la fonction solution $y' + y = g$ vérifiant $y(0) = 0$ est solution.
 (b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie stable par T . Notons I l'endomorphisme de E défini par $I(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Puisque F est stable par T , F est aussi stable par I . L'endomorphisme induit par I sur le sous-espace vectoriel de dimension finie F admet un polynôme minimal $\pi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. On a alors pour tout $f \in F$ l'égalité $y + a_{n-1}y' + \dots + a_n y^{(n)} = 0$ en notant $y = I^n(f)$. De plus, on a les conditions initiales $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ ce qui donne $y = 0$ puis $f = 0$. Ainsi $F = \{0\}$. Finalement, l'espace nul est le seul espace de dimension finie stable par T . Quel intérêt au « impair » ?

Exercice 34 : [énoncé]

Supposons f diagonalisable et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f .

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on pose $g_{i,j}$ l'endomorphisme de E déterminé par

$$g_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$$

La famille $(g_{i,j})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ et on observe

$$T(g_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)g_{i,j}$$

donc T est diagonalisable.

Supposons f nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$.

Puisque $T^p(g)$ est combinaison linéaire de termes de la forme $f^k \circ g \circ f^{p-k}$, il est assuré que $T^{2n} = 0$ et donc que T est nilpotente.

Exercice 35 : [énoncé]

On peut écrire

$$\Pi_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$$

et

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$$

décomposition en somme de sous-espaces vectoriels stables par f .

Pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(f)$,

$$\ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1} \neq \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$$

par minimalité de Π_f et donc il existe $x_\lambda \in \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda} \setminus \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1}$.

On peut alors établir que la famille $((f - \lambda \text{Id})^k(x_\lambda))_{0 \leq k < \alpha_\lambda - 1}$ est libre.

Considérons maintenant $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$.

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f)(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} P(f)(x_\lambda)$ avec $P(f)(x_\lambda) \in \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$ par stabilité.

Par décomposition en somme directe,

$$P(f)(x) = 0 \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f), P(f)(x_\lambda) = 0$$

Par division euclidienne $P = (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} Q + R$ avec $\deg R < \alpha_\lambda$ de sorte qu'on puisse écrire $R = \sum_{k=0}^{\alpha_\lambda - 1} a_k (X - \lambda)^k$. On alors

$$P(f)(x_\lambda) = 0 \iff \forall 0 \leq k < \alpha_\lambda, a_k = 0$$

Ainsi

$$P(f)(x) = 0 \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f), (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} \mid P$$

Enfin puisque les termes $(X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ sont premiers entre eux, on peut conclure

$$P(f)(x) = 0 \iff \Pi_f \mid P$$

Exercice 36 : [énoncé]

Rappelons qu'une matrice M carrée de taille n qui est nilpotente vérifie $M^n = O_n$ (l'ordre de nilpotence est au plus égal à la taille de la matrice). On a

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, (A + 2^k B)^n = O_n$$

Considérons alors la matrice

$$(A + XB)^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$$

Celle-ci est à coefficients polynomiaux de degrés inférieurs à n . Puisque $1, 2, \dots, 2^n$ sont $n + 1$ racines distinctes de ces coefficients, ceux-ci sont tous nuls. On en déduit

$$A^n = O_n$$

car les coefficients constants sont nuls, et

$$B^n = O_n$$

car les coefficients des termes X^n sont aussi nuls.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) Puisque $u^3 = u$, par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que u est diagonalisable de valeurs propres possibles $0, 1, -1$. Par les égalités $\text{tr } u = 0$ et $\text{tr } u^2 = 2n$ on peut affirmer qu'il existe une base de \mathbb{R}^{2n+1} dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices commutant avec A étant celle de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer

$$\dim C(u) = 2n^2 + 1$$

(b) $\Pi_u = X^3 - X$ donc $\dim \mathbb{R}[u] = 3$ et par suite $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si, et seulement si, $n = 1$.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Si $A^2 = A$ alors $f_A^2 = f_A$. f_A est une projection donc diagonalisable.

(b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on observe $P(f_A): M \mapsto P(A)M$ de sorte que

$$P(f_A) = 0 \iff P(A) = 0$$

Tout endomorphisme étant diagonalisable si, et seulement si, il annule un polynôme scindé simple, on peut conclure.

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Puisque H est un hyperplan et que $I_n \notin H$, on a

$$H \oplus \text{Vect}(I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Soit A une matrice nilpotente. On peut l'écrire $A = B + \lambda I_n$ avec $B \in H$. La matrice B n'étant pas inversible, il existe une colonne X non nulle telle que $BX = O$ et alors $AX = \lambda X$. Le scalaire λ est une valeur propre de la matrice A . Or les seules valeurs propres d'une matrice nilpotente sont nulles. On en déduit $\lambda = 0$ puis $A = B \in H$.

(b) Les matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ sont nilpotentes car de carrées nulles; elles sont donc toutes éléments de H et par combinaison linéaire la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à H . Cependant celle-ci est notoirement inversible.

Exercice 40 : [énoncé]

On remarque

$$C^3 - C^2 = 3A + 3B = 3C$$

La matrice C annule donc le polynôme

$$X^3 - X^2 - 3X$$

On vérifie aisément que ce polynôme est scindé à racines simples et on peut donc affirmer que C est diagonalisable. Or

$$A = C^3 - 2C^2 \text{ et } B = C + 2C^2 - C^3$$

donc A et B sont diagonalisables.

Exercice 41 : [énoncé]

- (a) L'implication (\Leftarrow) est immédiate
 (\Rightarrow) Par récurrence sur $n \geq 2$.
 Cas $n = 2$
 Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

En posant $u = z_2/z_1$, on a alors (car $z_1 \neq 0$)

$$|1 + u| = 1 + |u|$$

En écrivant $u = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et en élevant au carré l'identité précédente, on obtient

$$(1 + a)^2 + b^2 = 1 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$$

et cette identité est vérifiée si, et seulement si, $a \in \mathbb{R}_+$ et $b = 0$ ce qui permet d'écrire $z_2 = \alpha_2 z_1$ avec $\alpha_2 = a \in \mathbb{R}_+$.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.

Soient $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \neq 0$ tels que

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

et puisque les termes extrémaux sont égaux on a

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

donc par hypothèse de récurrence on peut écrire pour tout $k \geq 2$

$$z_k = \alpha_k z_1 \text{ avec } \alpha_k \geq 0$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^n z_k = (1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) z_1 \neq 0$$

et puisque

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}|$$

l'étude du cas $n = 2$ permet d'écrire

$$z_{n+1} = a \sum_{k=1}^n z_k = \alpha_{n+1} z_1 \text{ avec } \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}_+$$

Récurrence établie.

- (b) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $M^n = I_n$ et $\text{tr } M = n$ alors cette matrice est diagonalisable (car annule le polynôme scindé à racines simples $X^n - 1$) et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$$

Or les valeurs propres vérifient aussi

$$\forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k^n = 1$$

et elles sont donc de module 1. Nous sommes donc dans la situation où

$$|\lambda_1 + \dots + \lambda_n| = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

Puisque $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $\lambda_k = \alpha_k \lambda_1$ pour tout $k \geq 2$ avec $\alpha_k \geq 0$. Or tous les λ_k sont de module 1 donc les α_k sont égaux à 1 et par suite

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n$$

Enfin puisque la somme des valeurs propres vaut n , on peut conclure

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$$

et finalement $M = I_n$ car la matrice M est semblable à I_n .

La réciproque est immédiate.

Exercice 42 : [énoncé]

En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0; 1]$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t) dt$$

la quantité cherchée est : $m = d(f, F)^2$ avec $f: t \mapsto \ln t$ et $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$ où $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$.

$m = \|f - p(f)\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F .

$p(f)(t) = a + bt$ avec $(p(f)|f_0) = (f|f_0)$ et $(p(f)|f_1) = (f|f_1)$.

La résolution du système ainsi obtenu donne $a = 5/3$ et $b = -19/12$.

$m = \|f - p(f)\|^2 = (f - p(f)|f) = 1/432$.

Exercice 43 : [énoncé]

- (a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ et vérifie

$$t^2 P(t)Q(t)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0; +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de \langle, \rangle .

On vérifie aisément que \langle, \rangle est une forme bilinéaire symétrique positive.

Si $\langle P, P \rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

$$\forall t \in [0; +\infty[, P(t)^2 e^{-t} = 0$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.

- (b) Pour $k \geq 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P'_k sont orthogonaux car

$$P'_k \in \text{Vect}(P_1, \dots, P_{k-1})$$

Par une intégration par parties

$$0 = \int_0^{+\infty} P'_k(t)P_k(t)e^{-t} dt = \frac{1}{2} [P_k(t)^2 e^{-t}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} P_k(t)^2 e^{-t} dt$$

On en déduit

$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$

- (c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire

$$Q = \sum_{k=0}^n \langle P_k, Q \rangle P_k$$

Or

$$\langle P_k, Q \rangle = \langle P_k - P_k(0), Q \rangle + P_k(0) \langle 1, Q \rangle$$

Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est élément de F , il est orthogonal à Q et l'on obtient

$$\langle P_k, Q \rangle = P_k(0) \langle 1, Q \rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q = \lambda \sum_{k=0}^n P_k(0)P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q \rangle \neq 0$$

On en déduit

$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q \rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^n P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2 = d(1, F)^2 + d(1, F^\perp)^2$$

et l'on obtient

$$d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice 44 : [énoncé]

- (a) Puisque A et ${}^t A$ commutent, on a $({}^t AA)^p = ({}^t A)^p A^p = 0$ et donc ${}^t AA$ est nilpotente.

D'autre part, la matrice ${}^t AA$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Étant nilpotente, sa seule valeur propre possible est 0 et donc ${}^t AA$ est nulle car semblable à la matrice nulle.

- (b) En exploitant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|A\|^2 = (AA|) = \text{tr}({}^t AA) = 0$$

et donc $A = 0$

Exercice 45 : [énoncé]

Puisque les valeurs propres de u sont strictement positives, on montre par orthodiagonalisation

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x \rangle > 0$$

Soit $x \in E$.

Si $x = 0_E$, l'inégalité demandée est évidente et c'est même une égalité.

Si $x \neq 0_E$, considérons $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\langle u(x + \lambda u^{-1}(x)) \mid x + \lambda u^{-1}(x) \rangle \geq 0$$

donc en développant

$$\lambda^2 \langle x, u^{-1}(x) \rangle + 2\lambda \langle x, x \rangle + \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

Or $\langle x, u^{-1}(x) \rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u^{-1}(x) \rangle > 0$, par suite, le discriminant

$$\Delta = 4 \|x\|^4 - 4 \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$$

est négatif ou nul car sinon le trinôme en λ précédent posséderait deux racines et ne serait donc pas de signe constant.

On en déduit l'inégalité proposée.

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $x + \lambda u^{-1}(x) = 0_E$ i.e. si, et seulement si, x est vecteur propre de u .

Exercice 46 : [énoncé]

Soit M solution. $M^4 = {}^t(M^2) = M$ donc $X^4 - X$ est annulateur de M et puisque 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de M , $X^3 - 1$ puis $X^2 + X + 1$ sont annulateurs de M .

Ainsi, on peut affirmer $M^3 = {}^tMM = I$ (ainsi $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$) et $M^2 + M + I = 0$. Pour $X \neq 0$, $P = \text{Vect}(X, MX)$ est un plan (car il n'y a pas de valeurs propres réelles) stable par M (car $M^2 = -M - I$). La restriction de M à ce plan est un automorphisme orthogonal sans valeur propre, c'est donc une rotation et celle-ci est d'angle $\pm 2\pi/3$ car $M^3 = I_n$. De plus ce plan est aussi stable par $M^2 = {}^tM$ donc P^\perp est stable par M ce qui permet de reprendre le raisonnement à partir d'un $X' \in P^\perp \setminus \{0\}$. Au final, M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs et aux blocs diagonaux égaux à

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La réciproque est immédiate.

Exercice 47 : [énoncé]

- (a) ${}^tA = -A$ donne $\det A = (-1)^n \det A$ donc $\det A = 0$ si n est impair.
 (b) Si λ est valeur propre réelle de A alors on peut écrire $AX = \lambda X$ pour une certaine colonne X non nulle. On a alors ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$ mais aussi ${}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda {}^tXX$. On en déduit que la seule valeur propre réelle de A possible est la valeur nulle.

Par l'absurde, si $\det A < 0$ alors le théorème des valeurs intermédiaires assure que le polynôme caractéristique de A s'annule ailleurs qu'en 0. C'est contraire à l'affirmation qui précède.

Ainsi $\det A \geq 0$ avec inégalité stricte si, et seulement si, A est inversible.

Exercice 48 : [énoncé]

- (a) Posons

$$U_p = \frac{1}{p+1}(I_n + A + \dots + A^p)$$

On a

$$(I - A)U_p = \frac{1}{p+1}(I_n - A^{p+1}) \rightarrow 0$$

car pour la norme euclidienne

$$\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{n}$$

Puisque $1 \notin \text{Sp } A$, $U_p \rightarrow 0$.

- (b) Par l'absurde si A^p converge vers B alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^{p+1}X = AA^pX$ donne à la limite $BX = ABX$. Or $1 \notin \text{Sp } A$ donc $BX = 0$ et puisque ceci vaut pour tout X , $B = 0$. Or $\|A^p\| = \sqrt{n} \not\rightarrow 0$. Absurde.
 La suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 49 : [énoncé]

Un tel endomorphisme conserve l'orthogonalité. Pour tout x, y vérifiant $\|x\| = \|y\|$, on a $x + y$ et $x - y$ orthogonaux donc $f(x) + f(y)$ et $f(x) - f(y)$ aussi. Par suite $\|f(x)\| = \|f(y)\|$. Ainsi un tel endomorphisme transforme une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) en une famille orthogonale aux vecteurs isométriques. Par suite $f = \lambda g$ avec $g \in \mathcal{O}(E)$. La réciproque est immédiate.

Exercice 50 : [énoncé]

Soit $Y \in \ker A \cap \text{Im } A$. On peut écrire $Y = AX$ pour une certaine colonne X .

On a

$${}^tYY = {}^t(AX)Y = -{}^tXAY = 0$$

et donc $Y = 0$.

En sus,

$$\text{rg } A + \dim \ker A = n$$

et donc les espaces $\text{Im } A$ et $\ker A$ sont supplémentaires.

Puisque l'espace $\text{Im } A$ est évidemment stable, on obtient que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice A est égale par similitude au rang de la matrice C mais aussi par construction à la taille de C . On en déduit que la matrice C est inversible.

Enfin, si λ est valeur propre réelle de A de vecteur propre $X \neq 0$ on a

$${}^tXAX = \lambda X \text{ et } {}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda {}^tXX$$

On en déduit que seule 0 peut être valeur propre réelle de A . La matrice C n'a donc pas d'autre valeur propre que 0, or elle est inversible, elle n'admet donc pas de valeur propre. Elle est alors nécessairement de taille paire.

Exercice 51 : [énoncé]

(a) On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Posons $f: M \mapsto \Omega M$. $(f(M) | f(N)) = \text{tr}({}^tM\Omega\Omega N)$.

f est φ -orthogonale si, et seulement si, pour tout $M, N \in \mathcal{M}$,

$(M | {}^t\Omega\Omega N) = (M | N)$ i.e. pour tout $N \in \mathcal{M}$, ${}^t\Omega\Omega N = N$ i.e. ${}^t\Omega\Omega = I_n$.

Ainsi f est φ -orthogonale si, et seulement si, Ω l'est.

Exercice 52 : [énoncé]

On a

$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(u)) = -g(u)$$

et pour $g(v) \perp g(u)$,

$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(v)) = g(v)$$

Ainsi $g \circ \sigma \circ g^{-1}$ est la réflexion par rapport à $g(u)^\perp$.

Exercice 53 : [énoncé]

$J + A$ n'est pas inversible si, et seulement si, il existe une colonne non nulle vérifiant $AX = -JX$.

On a alors ${}^tAJX = -X$ et donc $-1 \in \text{Sp}({}^tAJ) = \text{Sp}(JA)$ avec une réciproque immédiate.

Le polynôme caractéristique de JA étant

$$X^{n-1}(X - \sum_{i,j} a_{i,j})$$

on obtient le critère

$$J + A \text{ est inversible si, et seulement si, } \sum_{i,j} a_{i,j} \neq -1$$

Exercice 54 : [énoncé]

Supposons (i) et (ii).

Pour $x \in E$, on a

$$(f(x) | x) = -(f(x) | f^2(x)) = -(x | f(x))$$

et donc

$$(f(x) | x) = 0$$

Supposons (ii) et (iii)

Le vecteur $x + f(x)$ et son image par f sont orthogonaux donc

$$(x + f(x) | f(x + f(x))) = (x + f(x) | f(x) - x) = 0$$

puis $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$. Ainsi f est une isométrie.

Supposons (i) et (iii)

Pour tous vecteurs x et y

$$(f^2(x) + x | f(y)) = (f(x) | y) + (x | f(y))$$

Or

$$(f(x + y) | x + y) = (f(x) | y) + (f(y) | x) = 0$$

donc

$$(f^2(x) + x | f(y)) = 0$$

Puisque f est surjective, $f^2(x) + x = 0_E$.

Exercice 55 : [énoncé]

M est diagonalisable et ses valeurs propres sont racines de $X^p - 1$, elles ne peuvent donc qu'être 1 ou -1 . Par suite $M^2 = I_n$.

Exercice 56 : [énoncé]

Si A est diagonale égale à $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ alors

$$\text{tr}(AU) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{i,i}$$

Or les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent à $[-1; 1]$ donc

$$\text{tr}(AU) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$$

Plus généralement, si A est symétrique réelle à valeurs propres positives, on peut écrire $A = {}^tVDV$ avec V orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$. On a alors

$$\text{tr}(AU) = \text{tr}({}^tVDVU) = \text{tr}(DW)$$

avec $W = VU^tV$ orthogonale. On a alors

$$\text{tr}(AU) \leq \text{tr} D = \text{tr} A$$

L'étude de $\text{tr}(UA)$ est analogue.

Exercice 57 : [énoncé]

Par comparaison de noyau, il est facile d'obtenir : $\text{rg} A = \text{rg} {}^tAA$.

La matrice tAA étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc son rang est égal au nombre de ses valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité.

Exercice 58 : [énoncé]

Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donné par

$$(A|B) = \text{tr}({}^tAB)$$

- (a) L'espace solution est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En effet, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux car pour $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ on a

$$(A|B) = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

et

$$(A|B) = (B|A) = \text{tr}({}^tBA) = -\text{tr}(BA)$$

donc $(A|B) = 0$.

Les espaces étant orthogonaux, ils sont donc en somme directe. Puisque de plus on peut écrire n'importe quelle matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M = A + B$ avec

$$A = \frac{M + {}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B = \frac{M - {}^tM}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux et donc chacun est l'orthogonale de l'autre.

car ces espaces sont évidemment orthogonaux et supplémentaires.

- (b) On a

$${}^t \exp(xB) \exp(xB) = \exp({}^t(xB)) \exp(xB) = \exp(-xB) \exp(xB)$$

Or $-xB$ et xB commutent donc

$${}^t \exp(xB) \exp(xB) = \exp(-xB + xB) = \exp(0) = I_n$$

- (c) La fonction dérivable $f: x \mapsto \text{tr}(A \exp(xB))$ admet un maximum en 0 donc $f'(0) = 0$ ce qui donne $\text{tr}(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi A est une matrice symétrique car dans l'orthogonal de l'espace des matrices antisymétrique.

Par le théorème spectrale, on peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Posons $V = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\varepsilon_i \lambda_i = |\lambda_i|$.

Considérons alors $U = {}^tPVP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{tr}(AU) = \text{tr}(A {}^tPVP) = \text{tr}(P A {}^tPV) = \text{tr}(DV) = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

et

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

La propriété $\text{tr}(AU) \leq \text{tr} A$ entraîne $\lambda_i \geq 0$ pour tout i .

La matrice A est alors symétrique positive.

- (d) Supposons $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AU) = \text{tr}(DV)$ avec $V = (v_{i,j}) = {}^tPUP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

On a alors

$$\text{tr}(DV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$$

car $v_{i,i} \leq 1$.

- (e) L'application réelle $f: V \rightarrow \text{tr}(MV)$ est continue sur le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, elle y admet donc un maximum en un certain $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a alors pour tout $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(MV) \leq \text{tr}(MU)$$

Posons alors $A = MU$. Pour tout $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(AW) \leq \text{tr} A$$

donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ainsi $M = AU^{-1}$ avec $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 59 : [énoncé]

- (a) Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne propre associée.
 D'une part ${}^t\bar{X}AX = \lambda{}^t\bar{X}X$, d'autre part ${}^t\bar{X}AX = {}^t\bar{A}\bar{X}X = -\bar{\lambda}{}^t\bar{X}X$.
 Puisque ${}^t\bar{X}X \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $\bar{\lambda} = -\lambda$ donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.
- (b) Pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\Omega = \varphi(A)$ est bien définie car $-1 \notin \text{Sp} A$.
 ${}^t\Omega\Omega = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ or $I_n + A$ et $I_n - A$ commutent donc ${}^t\Omega\Omega = I_n$.
 De plus, si $\Omega X = -X$ alors $(I_n - A)X = -(I_n + A)X$ (car $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent) et donc $X = 0$.
 Ainsi l'application $\varphi: \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(\Omega)\}$ est bien définie.
 Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $(I_n - A)(I_n + B) = (I_n + A)(I_n - B)$. En développant et en simplifiant on obtient $A = B$ et donc l'application φ est injective.
 Enfin soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin \text{Sp}(\Omega)$.
 Posons $A = (\Omega + I_n)^{-1}(I_n - \Omega)$ qui est bien définie car $-1 \notin \text{Sp} \Omega$.
 On a ${}^tA = (I_n - \Omega^{-1})(\Omega^{-1} + I_n)^{-1} = (\Omega - I_n)\Omega^{-1}\Omega(I_n + \Omega)^{-1} = (\Omega - I_n)(I_n + \Omega)^{-1} = -A$ et $\varphi(A) = \Omega$.
 Finalement φ est bijective.

Exercice 60 : [énoncé]

- (a) Notons C_1, \dots, C_p les colonnes de M_u .
 Si (u_1, \dots, u_p) est liée alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$$

On a alors

$$\forall 1 \leq i \leq p, (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p | u_i) = 0$$

et donc

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0$$

La matrice M_u n'est alors pas inversible.
 Inversement, supposons la matrice M_u non inversible.
 Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0$$

et donc

$$\forall 1 \leq i \leq p, (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p | u_i) = 0$$

Ainsi

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$$

or

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

donc

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$$

et la famille (u_1, \dots, u_p) est liée.

- (b) Posons $r = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ et quitte à permuter les vecteurs (u_1, \dots, u_p) , supposons que les r premiers vecteurs de la famille u sont indépendants. On permute de la même façon les vecteurs (v_1, \dots, v_p) et ainsi l'hypothèse $M_u = M_v$ est conservée. Par l'étude qui précède, on peut affirmer que les r premiers vecteurs de la famille v sont indépendants et que les autres en sont combinaisons linéaires.
 Considérons alors l'application linéaire $h: \text{Vect}(u_1, \dots, u_r) \rightarrow \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ déterminée par

$$\forall 1 \leq k \leq r, h(u_k) = v_k$$

Pour tout $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r$, on a par construction

$$h(x) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r.$$

Or

$$\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i \lambda_j (u_i | u_j) \text{ et } \|h(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i \lambda_j (v_i | v_j)$$

et puisque $(u_i | u_j) = (v_i | v_j)$, on obtient

$$\|x\|^2 = \|h(x)\|^2$$

L'application h conserve donc la norme

Pour tout $k \in \{r+1, \dots, p\}$, u_k est combinaison linéaire des u_1, \dots, u_r ce qui permet d'écrire

$$u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r$$

On a alors pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$(u_k - (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r) | u_i) = 0$$

et donc

$$(v_k - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \mid v_i) = 0$$

On en déduit $v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ puis $v_k = h(u_k)$.

Enfin, on prolonge h en un automorphisme orthogonal solution défini sur \mathbb{R}^n en introduisant une application linéaire transformant une base orthonormée de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)^\perp$ en une base orthonormée de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_r)^\perp$

Exercice 61 : [énoncé]

$\text{Sp}(J) = \{0, n\}$, $E_0(J): x_1 + \dots + x_n = 0$ et $E_n(J): x_1 = \dots = x_n$.

Les matrices

$$D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & & 1/\sqrt{n^2-n} \\ \vdots & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & -2/\sqrt{6} & \ddots & \vdots \\ 1/\sqrt{n} & (0) & & & -1/\sqrt{n^2-n} \end{pmatrix}$$

conviennent.

Les colonnes d'indices 2 à n de la matrice P sont formées de coefficients de $a, \dots, a, b, 0, \dots, 0$ de somme nulle et de somme de carrés égale à 1.

Exercice 62 : [énoncé]

Soit M solution, M est diagonalisable sur \mathbb{C} avec pour valeurs propres j et j^2 .

Puisque $\text{tr } M$ est réel, les valeurs propres j et j^2 ont même multiplicité. Par suite n est pair, $n = 2p$.

Nous allons montrer, en raisonnant par récurrence sur p qu'il existe une matrice orthogonale P tel que

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} J & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J \end{pmatrix}$$

avec

$$J = R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } J = R_{-2\pi/3}$$

Pour $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$${}^tMM = M^tM \iff \begin{cases} ab + cd = ac + db \\ b^2 = c^2 \end{cases}$$

Si $b = c$ alors M est symétrique donc diagonalisable sur \mathbb{R} ce qui n'est pas le cas. Il reste $b = -c$ et donc $a = d$.

Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et la relation $M^2 + M + I = 0$ donne

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a + 1 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

ce qui permet de conclure (car le cas $b = 0$ est à exclure).

Supposons la propriété établie au rang $n = 2p$ et étudions le rang $n = 2p + 2$.

Soit M une matrice solution.

La matrice $S = {}^tM + M$ est symétrique et donc il existe $X \neq 0$ tel que $SX = \lambda X$.

On observe alors que l'espace $F = \text{Vect}(X, MX)$ est stable par M et par tM . Par

suite F^\perp est aussi stable par M et tM . On peut alors appliquer l'étude menée

pour $n = 2$ à l'action de M sur F et l'hypothèse de récurrence à celle sur F^\perp .

Cela établit la récurrence. Il ne reste plus qu'à souligner que les matrices ainsi

obtenues sont bien solutions.

Exercice 63 : [énoncé]

Cas A diagonale :

On écrit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$. On a

$$AB + BA = ((\lambda_i + \lambda_j)b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

et donc

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, (\lambda_i + \lambda_j)b_{i,j} = 0$$

Si $\lambda_i \neq 0$ alors $\lambda_i + \lambda_j > 0$ et donc $b_{i,j} = 0$ puis $\lambda_i b_{i,j} = 0$.

Sinon, on a encore $\lambda_i b_{i,j} = 0$.

Ainsi $AB = 0$ puis aussi $BA = 0$.

Cas général :

Par le théorème spectral, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale à coefficients diagonaux positifs et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

La relation $AB + BA = 0$ donne alors $DM + MD = 0$ avec $M = P^{-1}BP$. Comme au dessus, on obtient $DM = 0$ puis

$$AB = PDP^{-1}PMP^{-1} = 0$$

Exercice 64 : [énoncé]

- (a) ${}^tA = A^2$ donne aussi $A = {}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = A^4$. Or A est inversible donc $A^3 = I_n$.
Enfin ${}^tAA = A^3 = I_n$ et donc A est orthogonale.
- (b) L'endomorphisme induit par f sur le noyau de $f^2 + f + \text{Id}$ est représentable par une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + I_p = O_p$. Cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ avec les deux valeurs propres complexes j et $j^2 = \bar{j}$. Celles-ci ont même multiplicité m et donc $p = \dim \ker(f^2 + f + \text{Id}) = 2m$ est un entier pair. De plus M est alors semblable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale avec des blocs diagonaux $\text{diag}(j, j^2)$. Or la matrice de rotation

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}$$

est aussi semblable à la matrice $\text{diag}(j, j^2)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

En raisonnant par blocs, on obtient que la matrice M est semblable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux Ω . Or ces deux matrices sont réelles et il est « bien connu » que deux matrices réelles semblables sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ le sont aussi sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Enfin, par le lemme de décomposition des noyaux

$$\mathbb{R}^n = \ker(f - \text{Id}) \oplus \ker(f^2 + f + \text{Id})$$

et dans une base adaptée à cette décomposition, on obtient que f peut être représenté par une matrice de la forme

$$\text{diag}(1, \dots, 1, \Omega, \dots, \Omega)$$

Exercice 65 : [énoncé]

La matrice A est diagonalisable semblable à

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Posons $C = D^3 + D + I_n$. En montrant que D est un polynôme en C i.e.

$D = P(C)$ on vérifie par similitude que A est un polynôme en B à savoir

$A = P(B)$.

On a

$$C = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ avec } \mu_i = \lambda_i^3 + \lambda_i + 1$$

On vérifie aisément que la fonction $x \mapsto x^3 + x + 1$ est injective sur \mathbb{R} . Ainsi les μ_i égaux correspondent aux λ_i égaux et inversement ce qui permet de considérer un polynôme interpolateur construit de sorte que

$$\forall 1 \leq i \leq n, P(\mu_i) = \lambda_i$$

On vérifie alors $P(C) = D$ et l'on conclut.

Exercice 66 : [énoncé]

On a

$$A^7 = A^4 \times (A^tA) = A^{5t}A$$

puis

$$A^7 = A^3 ({}^tA)^2 = A ({}^tA)^3 = A^t (A^tA) = A^{2t}A = A^4$$

Ainsi $X^7 - X^4 = X^4(X^3 - 1)$ annule A .

Ce polynôme n'est pas à racines simples, mais en montrant

$$\ker A^4 = \ker A$$

on pourra affirmer que le polynôme $X(X^3 - 1)$ annule aussi A et, ce dernier étant scindé à racines simples sur \mathbb{C} , cela sera décisif pour conclure.

Evidemment $\ker A \subset \ker A^4$. Inversement, soit $X \in \ker A^4$. On a

$$A^tAAX = A^4X = 0$$

donc

$$\|{}^tAAX\|^2 = {}^tX^tAA^tAAX = 0$$

et par conséquent ${}^tAAX = 0$. Alors

$$\|AX\|^2 = {}^tX^tAAX = 0$$

et donc $AX = 0$. Ainsi $\ker A^4 \subset \ker A$ puis l'égalité.