Limite et continuité

Généralités sur les fonctions

Exercice 1 [00501] [Correction]
Soit f une fonction croissante de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$.

(a) Montrer que s'il existe $x \in [0\,;1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^k(x) = x$ alors x est un point fixe pour f.

(b) Montrer que f admet un point fixe.

Calcul de limites

Exercice 2 [01784] [Correction]
Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$

(c) $\lim_{x\to 0+} x^x$

(d) $\lim_{x\to 1+} \ln x.\ln(\ln x)$

(e) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$

(f) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\arccos x}$

Exercice 3 [01785] [Correction]
Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

(a) $\lim_{x\to 0} x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos \mathrm{e}^x}{x^2+1}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-\sin x}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\arctan x}{x}$

(e) $\lim_{x\to 0} x\lfloor 1/x\rfloor$

(f) $\lim_{x\to+\infty} x\lfloor 1/x\rfloor$

Exercice 4 [01786] [Correction]
Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0+} \lfloor 1/x\rfloor$

(b) $\lim_{x\to 0} x\lfloor 1/x\rfloor$

(c) $\lim_{x\to 0} x^2\lfloor 1/x\rfloor$

Propriétés des limites

Exercice 5 [01789] [Correction]

(a) Soit $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique convergeant en $+\infty$. Montrer que g est constante.

(b) Soient $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que f converge en $+\infty$, g périodique et $f+g$ croissante.
Montrer que g est constante.

Exercice 6 [01787] [Correction]
Soient $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f\colon]a\,;b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
Montrer que l'application $x \mapsto \lim_{x^+} f$ est croissante.

Étude de continuité

Exercice 7 [01793] [Correction]
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'application

$$f\colon x \mapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$$

Exercice 8 [01795] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que f est totalement discontinue.

Exercice 9 [00240] [Correction]
Étudier la continuité de la fonction

$$f\colon x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

définie sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème des valeurs intérmédiaires

Exercice 10 [01803] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{-\infty} f = -1$ et $\lim_{+\infty} f = 1$. Montrer que f s'annule.

Exercice 11 [01800] [Correction]
Soit $f\colon[0\,;1]\to[0\,;1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 12 [01806] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et décroissante.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 13 [01807] [Correction]
Soit $f\colon[0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ continue, positive et telle que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell<1$$

Montrer qu'il existe $\alpha\in[0\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

Exercice 14 [01801] [Correction]
Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 15 [01804] [Correction]
Soient $f\colon I\to\mathbb{R}$ et $g\colon I\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\forall x\in I,|f(x)|=|g(x)|\neq 0$$

Montrer que $f=g$ ou $f=-g$.

Exercice 16 [01809] [Correction]
Soit $f\colon[0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ continue. On suppose que $|f|\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$. Montrer que $f\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$ ou $f\xrightarrow[+\infty]{}-\infty$.

Exercice 17 [01802] [Correction]
Soient $f\colon[a\,;b]\to\mathbb{R}$ continue et $p,q\in\mathbb{R}_+$.
Montrer qu'il existe $c\in[a\,;b]$ tel que

$$p.f(a)+q.f(b)=(p+q).f(c)$$

Exercice 18 [01808] [Correction]
Notre objectif dans cet exercice est d'établir la proposition :
Toute fonction $f\colon I\to\mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone.
Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose :

$$\exists(x_1,y_1)\in I^2,x_1<y_1\text{ et }f(x_1)\geq f(y_1)\text{ et }\exists(x_2,y_2)\in I^2,x_2<y_2\text{ et }f(x_2)\leq f(y_2)$$

Montrer que la fonction $\varphi\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t)=f((1-t)x_1+tx_2)-f((1-t)y_1+ty_2)$$

s'annule. Conclure.

Exercice 19 [03350] [Correction]
Montrer la surjectivité de l'application

$$z\in\mathbb{C}\mapsto z\exp(z)\in\mathbb{C}$$

Théorème des bornes atteintes

Exercice 20 [01813] [Correction]
Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 21 [01812] [Correction]
Soient $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bornée et $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue.
Montrer que $g\circ f$ et $f\circ g$ sont bornées.

Exercice 22 [01810] [Correction]
Soient $f,g\colon[a\,;b]\to\mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x\in[a\,;b],f(x)<g(x)$$

Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que

$$\forall x\in[a\,;b],f(x)\leq g(x)-\alpha$$

Exercice 23 [01811] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$$

Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 24 [01815] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On suppose que chaque $y\in\mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f.
Montrer qu'il existe un $y\in\mathbb{R}$ possédant exactement un antécédent.

Bijection continue

Exercice 25 [01816] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$$

(a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1\,;1[$.
(b) Déterminer, pour $y\in\,]-1\,;1[$ une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Exercice 26 [01817] [Correction]
Soient $a<b\in\mathbb{R}$ et $f\colon\,]a\,;b[\,\to\mathbb{R}$ une fonction strictement croissante.
Montrer que f est continue si, et seulement si, $f(]a\,;b[)=\,]\lim_a f\,;\lim_b f[$.

Exercice 27 [03105] [Correction]
Soit α un réel compris au sens large entre 0 et $1/\mathrm{e}$.
(a) Démontrer l'existence d'une fonction $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\alpha f(x+1)$$

(b) Si $\alpha=1/\mathrm{e}$, déterminer deux fonctions linéairement indépendantes vérifiant la relation précédente.

Exercice 28 [03401] [Correction]
Soit $f\colon[0\,;+\infty[\,\to[0\,;+\infty[$ continue vérifiant

$$f\circ f=\mathrm{Id}$$

Déterminer f.

Continuité et équation fonctionnelle

Exercice 29 [01791] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x^2)$$

Montrer que f est constante.

Exercice 30 [00244] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=f(x)$$

Montrer que f est constante.

Exercice 31 [01792] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et prenant la valeur 1 en 0.
On suppose que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(2x)=f(x)\cos x$$

Déterminer f.

Exercice 32 [01798] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y)$$

(a) Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=-f(x)$.
(b) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=nf(x)$.
(c) Établir que pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $f(r)=ar$ avec $a=f(1)$.
(d) Conclure que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$.

Exercice 33 [00243] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$,

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

On suppose en outre que la fonction f est continue en un point $x_0\in\mathbb{R}$.
Déterminer la fonction f.

Exercice 34 [01799] [Correction]
On cherche les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

(a) On suppose f solution et $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer que f est périodique et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(2x)$$

En déduire que f est nulle.

(b) Déterminer toutes les fonctions f solutions.

Exercice 35 [03721] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

(a) On suppose $f(0) = 0$. Vérifier

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(x + y\right) = f(x) + f(y)$$

(b) On revient au cas général, déterminer f.

Fonctions lipshitziennes

Exercice 36 [01781] [Correction]
On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \leq |x|$.
Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ est 1 lipschitzienne.

Exercice 37 [01782] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k lipschitzienne (avec $k \in [0\,;1[$) telle que $f(0) = 0$.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 38 [01814] [Correction]
Soient $f, g\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue.
On pose

$$\varphi(t) = \sup_{x\in[0;1]} \left(f(x) + tg(x)\right)$$

Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est lipschitzienne.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Si $f(x) > x$ alors par croissance de f,

$$f^k(x) \geq f^{k-1}(x) \geq \ldots \geq f(x) > x$$

ce qui est absurde. Une étude analogue contredit $f(x) < x$.

(b) On a $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. Par dichotomie, on peut construire deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant

$$f(a_n) \geq a_n \text{ et } f(b_n) \leq b_n$$

On initie les suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Une fois les termes a_n et b_n déterminés, on introduit $m = (a_n + b_n)/2$.
Si $f(m) \geq m$ on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.
Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.
Les suites (a_n) et (b_n) ainsi déterminées sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune c. Puisque $a_n \leq c \leq b_n$, on a par croissance

$$f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n)$$

et donc

$$a_n \leq f(c) \leq b_n$$

Or (a_n) et (b_n) convergent vers c donc par encadrement

$$f(c) = c$$

On peut aussi décrire un point fixe de f en considérant

$$c = \sup\{x \in [0\,;1], f(x) \geq x\}$$

Les deux questions de cet oral ne semblent pas être liées.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Quand $x \to 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \to 1$$

(b) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x} = \frac{1-1/\sqrt{x}}{\frac{\ln x}{x}+1} \to 1$$

(c) Quand $x \to 0^+$,

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^X$$

avec $X = x\ln x \to 0$ donc $x^x \to 1$.

(d) Quand $x \to 1^+$,

$$\ln x.\ln(\ln x) = X\ln X$$

avec $X = \ln x \to 0$ donc $\ln x.\ln(\ln x) \to 0$

(e) Quand $x \to 0$,

$$(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \mathrm{e}^X$$

avec $X = \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ donc $(1+x)^{1/x} \to \mathrm{e}$.

(f) Quand $x \to 1$,

$$\frac{1-x}{\arccos x} = \frac{1-\cos y}{y} = \frac{2\sin^2(y/2)}{y} = \sin(y/2)\frac{\sin(y/2)}{y/2}$$

avec $y = \arccos x \to 0$ donc $\sin y/2 \to 0$ et $\frac{\sin y/2}{y/2} \to 1$ puis $\frac{1-x}{\arccos x} \to 0$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Quand $x \to 0$,

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$$

(b) Quand $x \to +\infty$,

$$\left|\frac{x\cos \mathrm{e}^x}{x^2+1}\right| \leq \frac{x}{x^2+1} \to 0$$

(c) Quand $x \to +\infty$,

$$\mathrm{e}^{x-\sin x} \geq \mathrm{e}^{x-1} \to +\infty$$

(d) Quand $x \to +\infty$,

$$\left|\frac{x+\arctan x}{x} - 1\right| \leq \frac{\arctan x}{x} \leq \frac{\pi}{2x} \to 0$$

(e) Quand $x \to 0$,

$$1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$

donc

$$|\lfloor 1/x \rfloor - 1/x| \leq 1$$

puis

$$|x\lfloor 1/x \rfloor - 1| \leq |x| \to 0$$

(f) Quand $x \to +\infty$, $1/x \to 0$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ puis $x\lfloor 1/x \rfloor = 0 \to 0$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Quand $x \to 0^+$,
$$E\lfloor 1/x \rfloor \geq \frac{1}{x} - 1 \to +\infty$$

(b) Quand $x \to 0^+$,
$$1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$
donne
$$1 - x \leq x\lfloor 1/x \rfloor \leq 1$$
puis $x\lfloor 1/x \rfloor \to 1$.
Quand $x \to 0^-$,
$$1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$
donne
$$1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1 - x$$
puis à nouveau $x\lfloor 1/x \rfloor \to 1$.

(c) Quand $x \to 0^+$,
$$\left|x^2\lfloor 1/x \rfloor\right| \leq \frac{x^2}{x} \to 0$$
via
$$0 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$
et quand $x \to 0^-$,
$$\left|x^2\lfloor 1/x \rfloor\right| \leq x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \to 0$$
via
$$\frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 0$$

Exercice 5 : [énoncé]
Notons T une période strictement positive de g.

(a) Notons ℓ la limite de g en $+\infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(x + nT) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc par unicité de la limite : $g(x) = \ell$.
Ainsi g est constante.

(b) Notons ℓ la limite de f en $+\infty$.
Puisque $f + g$ est croissante $f + g \xrightarrow[+\infty]{} \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si $\ell' = +\infty$ alors $g \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. La démarche du a., montre l'impossibilité de ceci.
Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors la démarche du a., permet de conclure.

Exercice 6 : [énoncé]
L'application $x \mapsto \lim_{x^+} f$ est bien définie car f est croissante ce qui assure l'existence de $\lim_{x^+} f$.
Soient $x, y \in \left]a\,;b\right[$ tels que $x < y$.
Pour $t \in \left]x\,;y\right[$, on a $f(t) \leq f(y)$. Quand $t \to x^+$, on obtient $\lim_{x^+} f \leq f(y)$ or $f(y) \leq \lim_{y^+} f$ donc $\lim_{x^+} f \leq \lim_{y^+} f$.

Exercice 7 : [énoncé]
Par opération f est continue sur chaque $I_k = \left]k\,;k+1\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Il reste à étudier la continuité en $a \in \mathbb{Z}$.
Quand $x \to a^+$: $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \to a = f(a)$ car $E(x) \to a$.
Quand $x \to a^-$: $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \to a - 1 + 1 = a = f(a)$ car $\lfloor x \rfloor \to a - 1$.
Par continuité à droite et à gauche, f est continue en a.
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : [énoncé]
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Il existe une suite (u_n) de nombre rationnels et une suite (v_n) de nombres irrationnels telles que $u_n, v_n \to a$.
On a $f(u_n) = 1 \to 1$ et $f(v_n) = 0 \to 0$ donc f n'a pas de limite en a et est donc discontinue en a.

Exercice 9 : [énoncé]
La suite (u_n) avec $u_n = \frac{x^n}{n!}$ converge vers 0 donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ existe dans $\mathbb{R}$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$
Pour $n \geq \lfloor x \rfloor$ on a $n + 1 \geq x$ donc $u_{n+1} \leq u_n$.
Pour $n < \lfloor x \rfloor$ on a $n + 1 \leq x$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.

Par suite

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!}$$

f est clairement continue en tout $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ et continue à droite en tout $a \in \mathbb{N}$.
Reste à étudier la continuité à gauche en $a \in \mathbb{N}^*$.
Quand $x \to a^-$:

$$f(x) = \frac{x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!} = \frac{x^{a-1}}{(a-1)!} \to \frac{a^{a-1}}{(a-1)!} = \frac{a^a}{a!} = f(a)$$

Finalement f est continue.

Exercice 10 : [énoncé]
Puisque $\lim_{-\infty} f = -1$, f prend des valeurs négatives, puisque $\lim_{+\infty} f = 1$, f prend des valeurs positives.
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre celles-ci, f s'annule.

Exercice 11 : [énoncé]
Soit $\varphi\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$. Un point fixe de f est une valeur d'annulation de φ.
φ est continue, $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule.

Exercice 12 : [énoncé]
Unicité : Soit $g\colon x \mapsto f(x) - x$. g est strictement décroissante donc injective et ne peut donc s'annuler qu'au plus une fois.
Existence : Par l'absurde, puisque g est continue, si elle ne s'annule pas elle est strictement positive ou négative.
Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ alors $f(x) > x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim_{+\infty} f = \inf_{\mathbb{R}} f$.
Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$ alors $f(x) < x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim_{-\infty} f = \sup_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 13 : [énoncé]
Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ convient.
Sinon, considérons

$$g\colon x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Puisque $f(0) > 0$, par opérations sur les limites $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.
De plus $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.
Puisque g est continue et qu'elle prend des valeurs inférieures et supérieures à 1, on peut affirmer par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 1$ d'où $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 14 : [énoncé]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue.
Par l'absurde : Si f n'est pas constante alors il existe $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$.
Soit y un nombre non entier compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et donc f n'est pas à valeurs entière. Absurde.

Exercice 15 : [énoncé]
Posons $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(x)/g(x)$$

φ est continue et

$$\forall x \in I, |\varphi(x)| = 1$$

Montrons que φ est constante égale à 1 ou -1 ce qui permet de conclure.
Par l'absurde, si φ n'est pas constante égale à 1 ni à -1 alors il existe $a, b \in I$ tel que $\varphi(a) = 1 \geq 0$ et $\varphi(b) = -1 \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule. Absurde.

Exercice 16 : [énoncé]
Pour a assez grand, $|f(x)| \geq 1$ sur $[a\,;+\infty[$ donc f ne s'annule pas sur $[a\,;+\infty[$.
Étant continue, f est alors de signe constant sur $[a\,;+\infty[$ et la relation $f = \pm|f|$ permet alors de conclure.

Exercice 17 : [énoncé]
Si $p = q = 0$, n'importe quel c fait l'affaire.
Sinon posons

$$y = \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q}$$

Si $f(a) \leq f(b)$ alors

$$f(a) = \frac{pf(a) + qf(a)}{p+q} \leq y \leq \frac{pf(b) + qf(b)}{p+q} = f(b)$$

Si $f(b) \leq f(a)$ alors, comme ci-dessus $f(b) \leq y \leq f(a)$.
Dans les deux cas, y est une valeur intermédiaire à $f(a)$ et $f(b)$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $y = f(c)$.

Exercice 18 : [énoncé]
La fonction φ est continue, $\varphi(0) = f(x_1) - f(y_1) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(x_2) - f(y_2) \leq 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule en un certain t.
Posons $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ et $y_0 = (1-t)y_1 + ty_2$.
$\varphi(t) = 0$ donne $f(x_0) = f(y_0)$ or $x_0 < y_0$ donc f n'est pas injective. Absurde.

Exercice 19 : [énoncé]
Notons f l'application étudiée. Pour $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, on a

$$f(z) = \rho \mathrm{e}^{\rho \cos \alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha + \rho \sin \alpha)}$$

Soit $Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$ avec $r \geq 0$.
Si $r = 0$ alors $Z = 0 = f(0)$.
Si $r > 0$, pour que $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ vérifie $f(z) = Z$, il suffit de trouver (ρ, α) solution du système

$$\begin{cases} \rho \mathrm{e}^{\rho \cos \alpha} = r \\ \alpha + \rho \sin \alpha = \theta \end{cases}$$

Nous alors chercher un couple (ρ, α) solution avec $\rho > 0$ et $\alpha \in \,]0\,;\pi[$.
Quitte à considérer un nouvel argument θ pour le complexe Z, nous supposons $\theta > \pi$.
On a alors

$$\begin{cases} \rho \mathrm{e}^{\rho \cos \alpha} = r \\ \alpha + \rho \sin \alpha = \theta \end{cases} \iff \begin{cases} g(\alpha) = r \\ \rho = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

avec

$$g(\alpha) = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} \mathrm{e}^{\frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha}$$

La fonction g est définie et continue sur $]0\,;\pi[$.
Quand $\alpha \to 0^+$, $g(\alpha) \to +\infty$ et quand $\alpha \to \pi^-$, $g(\alpha) \to 0^+$.
Par suite, il existe $\alpha \in \,]0\,;\pi[$ tel que $g(\alpha) = r$ et alors, pour $\rho = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha}$, on obtient

$$f(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = Z$$

Finalement f est surjective.

Exercice 20 : [énoncé]
Soit $T > 0$ une période de f.
Sur $[0\,;T]$, f est bornée par un certain M car f est continue sur un segment.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - nT \in [0\,;T]$ pour $n = E(x/T)$ donc
$|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M$.
Ainsi f est bornée par M sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 : [énoncé]
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(g(x))| \leq M$ donc $f \circ g$ est bornée.
Puisque la fonction g est continue sur le segment $[-M\,;M]$, elle y est bornée par un certain M'.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(f(x))| \leq M'$ car $f(x) \in [-M\,;M]$ ainsi $g \circ f$ est bornée.

Exercice 22 : [énoncé]
Posons $\varphi\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = g(x) - f(x)$$

φ est continue sur le segment $[a\,;b]$ donc y admet un minimum en un certain $c \in [a\,;b]$.
Posons $\alpha = \varphi(c) = g(c) - f(c) > 0$. Pour tout $x \in [a\,;b]$, $\varphi(x) \geq \alpha$ donc $f(x) \leq g(x) - \alpha$.

Exercice 23 : [énoncé]
Posons $M = f(0) + 1$.
Puisque $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \leq A, f(x) \geq M \text{ et } \forall x \geq B, f(x) \geq M$$

On a $A \leq 0 \leq B$ car $f(0) < M$.
Sur $[A\,;B]$, f admet un minimum en un point $a \in [A\,;B]$ car continue sur un segment.
On a $f(a) \leq f(0)$ car $0 \in [A\,;B]$ donc $f(a) \leq M$.
Pour tout $x \in [A\,;B]$, on a $f(x) \geq f(a)$ et pour tout $x \in \,]-\infty\,;A] \cup [B\,;+\infty[$, $f(x) \geq M \geq f(a)$.
Ainsi f admet un minimum absolu en a.

Exercice 24 : [énoncé]
Soit y une valeur prise par f. Si celle-ci n'a qu'un antécédent, c'est fini.
Sinon, soit $a < b$ les deux seuls antécédents de y.
f est continue sur $[a\,;b]$ donc y admet un minimum en c et un maximum en d, l'un au moins n'étant pas en une extrémité de $[a\,;b]$. Supposons que cela soit c.
Si $f(c)$ possède un autre antécédent c' que c.
Si $c' \in [a\,;b]$ alors f ne peut être constante entre c et c' et une valeur strictement comprise entre $f(c) = f(c')$ et $\max_{[c;c']} f$ possède au moins 3 antécédents.
Si $c' \notin [a\,;b]$ alors une valeur strictement intermédiaire à y et $f(c)$ possède au moins 3 antécédents. Impossible.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Sur $[0\,;+\infty[$,
$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$
est continue et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 1$.
Ainsi f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ vers $[0\,;1[$.
Sur $]-\infty\,;0[$,
$$f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$
est continue et strictement croissante, $\lim_0 f = 0$ et $\lim_{-\infty} f = -1$.
Ainsi f réalise une bijection de $]-\infty\,;0[$ vers $]-1\,;0[$.
Finalement, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1\,;1[$.

(b) Pour $y \in [0\,;1[$, son antécédent $x = f^{-1}(y)$ appartient à $[0\,;+\infty[$.
$$y = f(x) \iff y = \frac{x}{1+x} \iff x = \frac{y}{1-y}$$
Pour $y \in]-1\,;0[$, son antécédent $x = f^{-1}(y)$ appartient à $]-\infty\,;0[$.
$$y = f(x) \iff y = \frac{x}{1-x} \iff x = \frac{y}{1+y}$$
Finalement,
$$\forall y \in]-1\,;1[, f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

Exercice 26 : [énoncé]
Notons que $\lim_a f$ et $\lim_b f$ existent car f est croissante.
$(\Longrightarrow)$ Supposons f continue.
Puisque f est continue et strictement croissante, f réalise une bijection de $]a\,;b[$ sur $]\lim_a f\,;\lim_b f[$ d'où le résultat.
$(\Longleftarrow)$ Supposons $f(]a\,;b[) =]\lim_a f\,;\lim_b f[$.
Soit $x_0 \in]a\,;b[$. On a $\lim_a f < f(x_0) < \lim_b f$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $y^+ \in]f(x_0)\,;f(x_0)+\varepsilon] \cap]\lim_a f\,;\lim_b f[$. Il existe $x^+ \in]a\,;b[$ tel que $f(x^+) = y^+$.
Soit $y^- \in [f(x_0)-\varepsilon\,;f(x_0)[\cap]\lim_a f\,;\lim_b f[$. Il existe $x^- \in]a\,;b[$ tel que $f(x^-) = y^-$.
Puisque f est croissante, $x^- < x_0 < x^+$. Posons $\alpha = \min(x^+ - x_0, x_0 - x^-) > 0$.
Pour tout $x \in]a\,;b[$, si $|x - x_0| \leq \alpha$ alors $x^- \leq x \leq x^+$ donc $y^- \leq f(x) \leq y^+$ d'où $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
Ainsi f est continue en x_0 puis f continue sur $]a\,;b[$.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Cherchons f de la forme
$$f(x) = \mathrm{e}^{\beta x}$$
Après calculs, si $\alpha = \beta\mathrm{e}^{-\beta}$ alors f est solution.
En étudiant les variations de la fonction $\beta \mapsto \beta\mathrm{e}^{-\beta}$, on peut affirmer que pour tout $\alpha \in [0\,;1/\mathrm{e}]$, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\beta\mathrm{e}^{-\beta} = \alpha$ et donc il existe une fonction f vérifiant la relation précédente.

(b) Pour $\alpha = 1/\mathrm{e}$, les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ sont solutions.
Notons que pour $\alpha \in]0\,;1/\mathrm{e}[$ il existe aussi deux solutions linéairement indépendantes car l'équation $\beta\mathrm{e}^{-\beta} = \alpha$ admet deux solutions, une inférieure à 1 et l'autre supérieure à 1

Exercice 28 : [énoncé]
La fonction f est bijective et continue donc strictement monotone. Elle ne peut être décroissante car alors elle ne serait pas surjective sur $[0\,;+\infty[$, elle est donc strictement croissante.
S'il existe un $x \in [0\,;1]$ tel que $f(x) < x$ alors, par stricte croissance
$$f(f(x)) < f(x)$$
et donc $f(f(x)) < x$ ce qui contredit $f \circ f = \mathrm{Id}$. De même $f(x) > x$ est impossible et donc $f = \mathrm{Id}$.

Exercice 29 : [énoncé]

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$$

donc f est paire.
Pour tout $x > 0$, $x^{1/2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $f(x^{1/2^n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(1)$ par continuité de f en 1.
Or

$$f(x^{1/2^n}) = f(x^{1/2^{n-1}}) = \dots = f(x)$$

donc $f(x) = f(1)$ pour tout $x > 0$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par parité.
De plus $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)$$

Exercice 30 : [énoncé]
Soient $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

Si $x \geq 1$ alors on montre par récurrence que (u_n) est décroissante et supérieure à 1.
Si $x \leq 1$ alors on montre par récurrence que (u_n) est croissante et inférieure à 1.
Dans les deux cas la suite (u_n) converge vers 1.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(u_n)$ donc à la limite $f(x) = f(1)$.

Exercice 31 : [énoncé]
Soit f solution.

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\dots\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\dots\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\sin x$$

donc

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)f(x) = \frac{\sin x}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Pour $x \neq 0$, quand $n \to +\infty$, on a $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$ puis

$$f(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \to \frac{\sin x}{x} f(0)$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

(avec prolongement par continuité par 1 en 0).
Vérification : ok.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) Pour $x = y = 0$, la relation donne $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.
Pour $y = -x$, la relation donne $f(0) = f(x) + f(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$.

(b) Par récurrence, on montre pour $n \in \mathbb{N}$: $f(nx) = nf(x)$.
Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on écrit $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$.
On a alors $f(nx) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$.

(c) Soit $r \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
$f(r) = pf(1/q) = \frac{p}{q}qf(1/q) = \frac{p}{q}f(1) = ar$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite (u_n) telle que $u_n \to x$ et $u_n \in \mathbb{Q}$.
Par continuité $f(u_n) \to f(x)$ or puisque $u_n \in \mathbb{Q}$ $f(u_n) = au_n \to ax$ donc par unicité de la limite $f(x) = ax$.

Exercice 33 : [énoncé]
La relation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$ permet d'établir

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$$

Pour cela on commence par établir

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(na) = nf(a)$$

On commence par établir le résultat pour $n = 0$ en exploitant

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

ce qui entraîne $f(0) = 0$.
On étend ensuite le résultat à $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence et en exploitant

$$f((n+1)a) = f(na) + f(a)$$

On étend enfin le résultat à $n \in \mathbb{Z}$ en exploitant la propriété de symétrie $f(-x) = -f(x)$ issu de

$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0$$

Considérons alors $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$f(r) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) \text{ et } f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$$

donc

$$f(r) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1)$$

Nous allons étendre cette propriété à $x \in \mathbb{R}$ par un argument de continuité.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut affirmer qu'il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$.
Pour celle-ci, on a $x_n + x_0 - x \to x_0$ et donc par continuité de f en x_0

$$f(x_n + x_0 - x) \to f(x_0)$$

Or on a aussi

$$f(x_n + x_0 - x) = f(x_0) + (f(x_n) - f(x))$$

donc

$$f(x_n) - f(x) \to 0$$

Ainsi

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = xf(1)$$

Finalement, la fonction f est linéaire.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) $f(2 - x) + f(x) = 0$ et $f(-x) + f(x) = 0$ donc $f(x) = f(x + 2)$ donc f est périodique.
$f(x/2) = f(x)/2$ donc $f(2x) = 2f(x)$.
Puisque f est continue et périodique, f est bornée. Or la relation $f(2x) = 2f(x)$ implique que f n'est pas bornée dès qu'elle prend une valeur non nulle. Par suite f est nulle.

(b) Pour $a = f(1) - f(0)$ et $b = f(0)$, on observe que $g(x) = f(x) - (ax + b)$ est solution du problème posé et s'annule en 0 et 1 donc g est nulle et f affine.
La réciproque est immédiate.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x + 0}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(0)) = \frac{1}{2}f(x)$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x + y)$$

On en déduit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(b) Sachant f continue, on peut alors classiquement conclure que dans le cas précédent f est de la forme $x \mapsto ax$.
Dans le cas général, il suffit de considérer $x \mapsto f(x) - f(0)$ et de vérifier que cette nouvelle fonction satisfait toujours la propriété initiale tout en s'annulant en 0.
On peut donc conclure que dans le cas général f est affine : $x \mapsto ax + b$

Exercice 36 : [énoncé]
Par formule de factorisation

$$|\sin x - \sin y| = \left|2\sin\frac{x - y}{2}\cos\frac{x + y}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x - y}{2}\right| \leq 2\frac{|x - y|}{2} = |x - y|$$

donc sin est 1 lipschitzienne.

Exercice 37 : [énoncé]
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $|u_n| \leq k^n |a|$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$|u_{n+1}| = |f(u_n) - f(0)| \leq k|u_n - 0| = k|u_n| \underset{HR}{\leq} k^{n+1}|a|$$

Récurrence établie.
Puisque $k \in [0\,;1[$, $k^n \to 0$ et donc $u_n \to 0$.

Exercice 38 : [énoncé]
L'application $x \mapsto f(x) + tg(x)$ est définie et continue sur le segment $[0\,;1]$ elle y est donc bornée et atteint ses bornes. Par suite $\varphi(t)$ est bien définie et plus précisément, il existe $x_t \in [0\,;1]$ tel que $\varphi(t) = f(x_t) + tg(x_t)$.
Puisque g est continue sur $[0\,;1]$ elle y est bornée par un certain M :
On a

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = f(x_t) + tg(x_t) - (f(x_\tau) + \tau g(x_\tau))$$

or

$$f(x_t) + \tau g(x_t) \leq f(x_\tau) + \tau g(x_\tau)$$

donc

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) \leq tg(x_t) - \tau g(x_t) = (t - \tau)g(x_t) \leq M\,|t - \tau|$$

De même

$$\varphi(\tau) - \varphi(t) \leq M\,|t - \tau|$$

et finalement φ est M lipschitzienne.