Les fractions rationnelles

Généralités

Exercice 1 [02007] [Correction]
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q.
Montrer que F est paire si, et seulement si, les polynômes P et Q sont tous deux pairs.

Exercice 2 [02008] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $P(\omega X) = P(X)$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.

(b) En déduire la réduction au même dénominateur de la fraction rationnelle

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}$$

Exercice 3 [00539] [Correction]
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle de F, $F(n) \in \mathbb{Q}$.
Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

Exercice 4 [04203] [Correction]
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des complexes deux à deux distincts et $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$.
Exprimer en fonction de P et de ses dérivées les fractions

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \lambda_k}, \qquad G = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X - \lambda_k)^2} \quad \text{et} \quad H = \sum_{\substack{1 \le k, \ell \le n \\ k \ne \ell}} \frac{1}{(X - \lambda_k)(X - \lambda_\ell)}.$$

Degré

Exercice 5 [02004] [Correction]
Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 6 [02006] [Correction]
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que $\deg F' < \deg F - 1 \implies \deg F = 0$.

Exercice 7 [02005] [Correction]
Déterminer un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Racines et pôles

Exercice 8 [02009] [Correction]
Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
Déterminer les racines et les pôles de

$$F = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}$$

en précisant les multiplicités respectives.

Exercice 9 [02010] [Correction]
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

(a) Soit a un zéro d'ordre $\alpha \ge 1$ de F. Montrer que a est zéro d'ordre $\alpha - 1$ de F'.

(b) Comparer les pôles de F et de F', ainsi que leur ordre de multiplicité.

Exercice 10 [02011] [Correction]
Montrer qu'il n'existe pas de $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que

$$F' = \frac{1}{X}$$

Décomposition en éléments simples

Exercice 11 [02013] [Correction]
Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

(a) $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$
(b) $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
(c) $\frac{1}{X(X-1)^2}$
(d) $\frac{2X}{X^2+1}$
(e) $\frac{1}{X^2+X+1}$
(f) $\frac{4}{(X^2+1)^2}$
(g) $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$
(h) $\frac{1}{X^4+X^2+1}$
(i) $\frac{3}{(X^3-1)^2}$

Exercice 12 [02676] [Correction]
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}$$

Applications de la décomposition en éléments simples

Exercice 13 [02015] [Correction]
Soit la fraction

$$F = \frac{1}{X(X+1)}$$

(a) Réaliser la décomposition en éléments simples de F.
(b) En déduire une simplification pour $n \geq 1$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
(c) Procéder de même pour calculer : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 14 [02016] [Correction]
Exprimer la dérivée d'ordre n de

$$\frac{1}{X(X^2+1)}$$

Exercice 15 [02017] [Correction]
Soit

$$F = \frac{1}{X^2+1} \in \mathbb{C}(X)$$

(a) En réalisant la décomposition en éléments simples de F, exprimer $F^{(n)}$.
(b) Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}}$$

(c) Déterminer les zéros de P_n.

Exercice 16 [02018] [Correction]
Soit

$$F = \frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$$

(a) Quelle relation existe entre la partie polaire de F en 1 et celle en -1.
(b) Former la décomposition en éléments simples de la fraction F.
(c) En déduire un couple $(U,V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$(X+1)^3U + (X-1)^3V = 1$$

Exercice 17 [02019] [Correction]
On pose $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ avec $k \in \{0,\dots,n-1\}$ et $n \geq 2$.
Réduire au même dénominateur

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X-\omega_k}$$

Exercice 18 [02020] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in \{0,1,\dots,n-1\}$. On pose pour $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.
Mettre sous forme irréductible la fraction

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X-\omega_k}$$

Exercice 19 [02021] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. On pose

$$Q = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$$

(a) Pour $p \in \{0,1,\dots,n-1\}$, exprimer la décomposition en éléments simples de X^p/Q à l'aide des $Q'(z_k)$.

(b) En déduire, pour $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^p}{Q'(z_k)}$$

Exercice 20 [02022] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, \dots, x_n$.

(a) Former la décomposition en éléments simples de la fraction $1/P$.

(b) On suppose $P(0) \neq 0$. Observer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Exercice 21 [02023] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples : $x_1, \dots, x_n$.

(a) Former la décomposition en éléments simples de P''/P.

(b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$$

Exercice 22 [02372] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples $(x_1, \dots, x_n)$. Montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$$

Exercice 23 [02024] [Correction]
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, tels que

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_i + \alpha_j \neq 0$$

Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1+\alpha_1} + \frac{x_2}{a_2+\alpha_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n+\alpha_1} = 1 \\ \frac{x_1}{a_1+\alpha_2} + \frac{x_2}{a_2+\alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n+\alpha_2} = 1 \\ \qquad \vdots \\ \frac{x_1}{a_1+\alpha_n} + \frac{x_2}{a_2+\alpha_n} + \dots + \frac{x_n}{a_n+\alpha_n} = 1 \end{cases}$$

Exercice 24 [03335] [Correction]
Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ un polynôme réel dont toutes les racines sont réelles.

(a) Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P'^2 - PP'')(x) \geq 0$$

(b) En déduire

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$$

Exercice 25 [04204] [Correction]
Soit p et n deux entiers avec $0 \leq p < n$. Former la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de

$$\frac{X^p}{X^n - 1}.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Si F est paire alors $F(-X) = F(X)$ donc $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$. Le polynôme $Q(X)$ divise $P(X)Q(-X)$ et $P \wedge Q = 1$ donc $Q(X)$ divide $Q(-X)$. De même $Q(-X)$ divise $Q(X)$ Or coeff$(Q(X)) = 1$ et coeff$(Q(-X)) = (-1)^n$ avec $n = \deg Q$.
Si n est pair alors $Q(-X) = Q(X)$ puis $P(-X) = P(X)$. Les deux polynômes sont pairs
Si n est impair alors $Q(-X) = -Q(X)$ puis $P(-X) = -P(X)$. Les deux polynômes sont impairs mais alors non premiers entre eux ce qui est exclu.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Écrivons

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

avec (a_k) suite de complexe nulle au-delà d'un certain rang.
La relation $P(\omega X) = P(X)$ donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \omega^k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

puis

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \omega^k = a_k$$

Par suite $a_k = 0$ pour tout $k \neq 0 \quad [n]$. En posant $b_\ell = a_{n\ell}$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell X^\ell$ on obtient

$$P(X) = Q(X^n)$$

(b) La réduction au même dénominateur de la fraction

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}$$

donne

$$F = \frac{P}{X^n - 1} \text{ avec } \deg P = n$$

Comme $F(\omega X) = F(X)$ on obtient

$$\frac{P(\omega X)}{X^n - 1} = \frac{P(X)}{X^n - 1}$$

puis $P(\omega X) = P(X)$.
Par suite P est de la forme $P = aX^n + b$.
En étudiant la partie entière de F on obtient $a = n$.
En étudiant la valeur de F en 0 on obtient $b = n$.
Par suite

$$F = n\frac{X^n + 1}{X^n - 1}$$

Exercice 3 : [énoncé]
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $F = P/Q$.
Le cas où $P = 0$ étant immédiat, supposons-le désormais exclu.
Posons $p = \deg P$ et $q = \deg Q$ et écrivons

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell, a_k, b_\ell \in \mathbb{C}$$

Considérons $p + q + 1$ naturels n n'annulant pas Q. Pour chacun, la relation

$$P(n) - y_n Q(n) = 0 \text{ avec } F(n) = y_n \in \mathbb{Q}$$

définit une équation

$$a_0 + na_1 + \cdots + n^p a_p - y_n b_0 - \cdots - y_n n^q b_q = 0$$

Le système formé par ses équations est compatible (dans $\mathbb{C}$) et à coefficients rationnels. Par application de la méthode de Gauss (par exemple), on peut affirmer que ce système possède une solution rationnelle. Il existe donc

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{Q}$$

tels que pour

$$R = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k \in \mathbb{Q}[X] \text{ et } S = \sum_{\ell=0}^{q} \beta_\ell X^\ell \in \mathbb{Q}[X]$$

on ait

$$R(n) - y_n S(n) = 0$$

pour chacun de $p + q + 1$ naturels n initialement considéré. On a alors pour ces n,

$$P(n)S(n) = Q(n)R(n)$$

et donc le polynôme

$$PS - QR$$

admet au moins $p+q+1$ racines.
Or
$$\deg(PS-QR)\leq p+q$$
donc
$$PS=QR$$
puis
$$F=\frac{R}{S}\in\mathbb{Q}(X)$$

Exercice 4 : [énoncé]
La dérivée d'un produit est la somme des produits obtenus en ne dérivant qu'un facteur :
$$P'=\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}(X-\lambda_j).$$
En divisant par P, on fait apparaître F :
$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_k}=F.$$
G et H se déduisent par dérivation et élévation au carré.
En dérivant F on fait apparaître $-G$:
$$G=-\left(\frac{P'}{P}\right)'=\frac{P'^2-PP''}{P^2}.$$
En développant F^2, on fait apparaître G et H :
$$F^2=G+H\quad\text{donc}\quad H=F^2-G=\frac{P''}{P}.$$
Cette dernière formule aurait aussi pu être découverte par un calcul direct.

Exercice 5 : [énoncé]
Si F est solution alors $\deg F^2=2\deg F=1$ avec $\deg F\in\mathbb{Z}$. C'est impossible.

Exercice 6 : [énoncé]
Supposons $\deg F'<\deg F-1$. $F=\frac{A}{B}$ et $F'=\frac{A'B-AB'}{B^2}$.
Si A ou B sont constants : c'est assez rapide
Sinon : $\deg F'<\deg F-1\implies\deg(A'B-AB')<\deg A'B=\deg AB'$ donc $\operatorname{coeff}(A'B)=\operatorname{coeff}(AB')$ d'où $\deg A=\deg B$ puis $\deg F=0$.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit $V=\{F\in\mathbb{K}(X)\mid\deg F<0\}$. $V\subset\mathbb{K}(X)$, $0\in V$ et $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\forall F,G\in V$, $\deg(\lambda F+\mu G)\leq\max(\deg F,\deg G)<0$ donc $\lambda F+\mu G\in V$. V est un sous-espace vectoriel.
Clairement $V\cap\mathbb{K}[X]=\{0\}$.
De plus $\forall F\in\mathbb{K}(X)$, $F=P+G$ avec $P=\operatorname{Ent}(F)\in\mathbb{K}[X]$ et $G\in V$.

Exercice 8 : [énoncé]
Déterminons les racines communes à X^p-1 et X^q-1. Soit ω un telle racines.
On a $\omega^p=\omega^q=1$. Puisque p et q sont premiers entre eux, il existe $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que $pu+qv=1$.
On a alors $\omega=\omega^{pu+qv}=(\omega^p)^u(\omega^q)^v=1$. Inversement, 1 est racine commune.
De plus, notons que toutes les racines de X^p-1 et X^q-1 sont simples.
Les racines de F sont les racines p ème de l'unité autres que 1. Elles sont simples.
Les pôles de F sont les racines q ème de l'unité autres que 1. Ils sont simples.
1 n'est ni pôle, ni racine.

Exercice 9 : [énoncé]
Notons P/Q le représentant irréductible de F.

(a) Soit a zéro de multiplicité $\alpha\geq 1$. On a $P=(X-a)^\alpha\hat{P}$ avec $\hat{P}(a)\neq 0$ et $Q(a)\neq 0$.
$$F'=\frac{(X-a)^{\alpha-1}(\alpha\hat{P}Q+(X-a)\hat{P}'Q-(X-a)\hat{P}Q')}{Q^2}$$
a n'est pas racine de $\alpha\hat{P}Q+(X-a)\hat{P}'Q-(X-a)\hat{P}Q'$, donc a est racine de multiplicité $\alpha-1$ de F'.

(b) Soit a pôle de F de multiplicité α. On a $P(a)\neq 0$ et $Q=(X-a)^\alpha\hat{Q}$ avec $\hat{Q}(a)\neq 0$.
$$F'=\frac{(X-a)P'\hat{Q}-\alpha P\hat{Q}-(X-a)P\hat{Q}'}{(X-a)^{\alpha+1}\hat{Q}^2}$$
a n'est pas racine de $(X-a)P'\hat{Q}-\alpha P\hat{Q}-(X-a)P\hat{Q}'$, donc a est pôle de multiplicité $\alpha+1$ de F'.

Exercice 10 : [énoncé]
Par l'absurde supposons qu'une telle fraction F existe et considérons P/Q son représentant irréductible :
$$\frac{P'Q-PQ'}{Q^2}=\frac{1}{X}.$$

On étudie la multiplicité[1] de 0 en tant que pôle de F'.
On a $X(P'Q - PQ') = Q^2$ et donc 0 est racine du polynôme Q d'une certaine multiplicité $\alpha \geq 1$. 0 est alors racine de Q' de multiplicité $\alpha - 1$ mais n'est pas racine de P car P et Q sont premiers entre eux. On en déduit que 0 est racine de multiplicité exactement $\alpha - 1$ de $P'Q - PQ'$. Or 0 est aussi racine de Q^2 de multiplicité $2\alpha > \alpha - 1$ et donc 0 est pôle de F' de multiplicité
$2\alpha - (\alpha - 1) = \alpha + 1 > 1$. C'est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$

(b) $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}$

(c) $\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1}$

(d) $\frac{2X}{X^2+1} = \frac{1}{X-\mathrm{i}} + \frac{1}{X+\mathrm{i}}$

(e) $\frac{1}{X^2+X+1} = -\frac{\mathrm{i}/\sqrt{3}}{X-j} + \frac{\mathrm{i}/\sqrt{3}}{X-j^2}$

(f) $\frac{4}{(X^2+1)^2} = -\frac{1}{(X-\mathrm{i})^2} - \frac{\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}} - \frac{1}{(X+\mathrm{i})^2} + \frac{\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}}$

(g) $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = -\frac{1}{X^2} + \frac{5}{X} - \frac{4}{(X+1)^2} - \frac{5}{(X+1)}$

(h) $\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{(1-j)/6}{X-j} + \frac{(1-j^2)/6}{X-j^2} - \frac{(1-j)/6}{X+j} - \frac{(1-j^2)/6}{X+j^2}$.

(i) En exploitant l'astuce $F(j^2X) = F(jX) = F(X)$:
$\frac{3}{(X^3-1)^2} = \frac{1/3}{(X-1)^2} - \frac{2/3}{(X-1)} + \frac{j^2/3}{(X-j)^2} - \frac{2j/3}{(X-j)} + \frac{j/3}{(X-j^2)^2} - \frac{2j^2/3}{(X-j^2)}$.

Exercice 12 : [énoncé]
Les pôles de cette fraction rationnelles sont simples et sont les racines n-ième de l'unité $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$. Sachant que la fraction rationnelle est de degré strictement négatif, sa partie entière est nulle et sa décomposition en éléments simples cherchée s'écrit

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega_k}$$

La partie polaire

$$\frac{\lambda}{X - a}$$

d'un pôle simple a d'une fraction rationnelle P/Q s'obtient par la relation

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

En effet, si $Q(X) = (X - a)R(X)$ on a $Q'(a) = R(a)$
Ici

$$\alpha_k = \left(\frac{X^{n-1}}{(X^n - 1)'}\right)(\omega_k) = \frac{1}{n}$$

et donc

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) On obtient

$$F = \frac{X + 1 - X}{X(X + 1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X + 1}$$

(b) Par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} = 1 - \frac{1}{n + 1} = \frac{n}{n + 1}$$

(c) On a

$$\frac{1}{X(X + 1)(X + 2)} = \frac{1/2}{X} - \frac{1}{X + 1} + \frac{1/2}{X + 2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n + 2} + \frac{1}{2n + 4}$$

Exercice 14 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X^2 + 1)} = \frac{1}{X} - \frac{1/2}{X - \mathrm{i}} - \frac{1/2}{(X + \mathrm{i})}$$

et on sait

$$\left(\frac{1}{X - a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(X - a)^{n+1}}$$

1. Par ce raisonnement, on voit que les multiplicités des pôles d'une fraction dérivée sont au moins égales à 2.

donc

$$\left(\frac{1}{X(X^2+1)}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{1}{X^{n+1}} - \frac{1/2}{(X-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1/2}{(X+\mathrm{i})^{n+1}}\right)$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) La décomposition en éléments simples est

$$F = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{X-\mathrm{i}} - \frac{1}{X+\mathrm{i}}\right)$$

donc

$$F^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(X-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(X+\mathrm{i})^{n+1}}\right)$$

(b) $F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}}$ avec

$$P_n = \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\left((X+\mathrm{i})^{n+1} - (X-\mathrm{i})^{n+1}\right) \in \mathbb{C}_n[X]$$

Mais $\overline{P_n} = P_n$ donc $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) = 0 \iff (x+\mathrm{i})^{n+1} = (x-\mathrm{i})^{n+1}$$
$$\iff \exists k \in \{1,\dots,n\}, x = \cot\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Cela fournit n racines réelles et il n'en peut y en avoir d'autres complexes.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) On remarque que $F(-X) = F(X)$.
Si $\frac{P(X)}{(X-1)^3}$ est la partie polaire de F en 1, alors $\frac{-P(-X)}{(X+1)^3}$ est sa partie polaire en -1.

(b) On obtient

$$\frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3} = \frac{1/8}{(X-1)^3} - \frac{3/16}{(X-1)^2} + \frac{3/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^3} - \frac{3/16}{(X+1)^2} - \frac{3/16}{X+1}$$

(c) En réduisant au même dénominateur

$$U = \frac{1}{16}(2 - 3(X-1) + 3(X-1)^2) \text{ et } V = -\frac{1}{16}(2 + 3(X+1) + 3(X+1)^2)$$

Exercice 17 : [énoncé]

La réduction au même dénominateur de F s'écrit

$$F = \frac{P}{X^n - 1}$$

avec $\deg P < n$.
$\forall k \in \{0,\dots n-1\}$,

$$\left(\frac{P(X)}{nX^{n-1}}\right)(\omega_k) = 1$$

donc

$$P(\omega_k) - n\omega_k^{n-1} = 0$$

Puisque $P - nX^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et possède n racines, c'est le polynôme nul.
Finalement

$$F = \frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$$

Exercice 18 : [énoncé]

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k} = \frac{P}{X^n - 1} \text{ avec } \deg P < n$$

De plus, par décomposition en éléments simples

$$\frac{P(\omega_k)}{(X^n-1)'(\omega_k)} = \omega_k^p$$

Par suite on a

$$P(\omega_k) = n\omega_k^{n-1}\omega_k^p = n\omega_k^{p-1}$$

Ces n relations permettent de reconnaître P puisqu'on sait $\deg P < n$
On obtient :

$$P = nX^{p-1} \text{ si } p \geq 1 \text{ ou } P = nX^{n-1} \text{ si } p = 0$$

Exercice 19 : [énoncé]

(a) On a

$$\frac{X^p}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - z_k}$$

avec

$$\lambda_k = \frac{z_k^p}{Q'(z_k)}$$

(b) En multipliant par X,
$$\frac{X^{p+1}}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k X}{X - z_k}$$
puis en remplaçant X par un réel de limite $+\infty$, on obtient d'un côté $\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^p}{Q'(z_k)}$ et de l'autre 1 si $p+1 = n$ et 0 sinon.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) On a
$$\frac{1}{P} = \frac{1}{\lambda(X-x_1)\dots(X-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - x_i}$$
avec
$$\lambda_i = \frac{1}{P'(x_i)}$$
(b) En évaluant en 0
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) On a
$$\frac{P''}{P} = \frac{P''}{\lambda(X-x_1)\dots(X-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - x_i}$$
avec $\lambda_i = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$.

(b) Puisque $\deg \frac{XP''}{P} < 0$ on a
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

Exercice 22 : [énoncé]

On a
$$\frac{P''}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - x_k} \text{ avec } \alpha_k = \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$$
Sachant que
$$\frac{xP''(x)}{P(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$$

Exercice 23 : [énoncé]

Considérons la fraction rationnelle
$$F(X) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i + X}$$
La satisfaction du système équivaut aux équations
$$F(\alpha_1) = \dots = F(\alpha_n) = 0$$
En réduisant F au même dénominateur
$$F = \frac{P}{Q} \text{ avec } P \text{ unitaire, } \deg P = n \text{ et } Q = \prod_{i=1}^{n}(X + a_i)$$
Les équations $F(\alpha_1) = \dots = F(\alpha_n) = 0$ signifient alors
$$P = (X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_n)$$
La décomposition en éléments simples F donne alors
$$x_i = \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^{n}(\alpha_k + a_i)}{\prod_{k=1, k\neq i}^{n}(a_k - a_i)}$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) En notant $x_1, \dots, x_n$ les racines réelles de P, on a
$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}$$
En dérivant, on obtient
$$\frac{P(x)P''(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - x_k)^2}$$
ce qui permet de conclure.

(b) Notons $x_1 < \ldots < x_p$ les racines réelles de P de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$. Puisque P ne possède pas de racines complexes, on a

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = \deg P$$

Par application du théorème de Rolle, P' possède une racine dans chacun des intervalles $]x_1\,;x_2[, \ldots,]x_{p-1}\,;x_p[$ et de plus $x_1, \ldots, x_p$ sont racines de P' de multiplicités $\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_p - 1$ (en acceptant de dire qu'une racine de multiplicité 0, n'est pas racine). Puisque

$$p - 1 + (\alpha_1 - 1) + \cdots + (\alpha_p - 1) = \deg P - 1 = \deg P'$$

le polynôme P' ne possède pas de racines complexes. Il en est de même de P'',$P^{(3)}$,...
En appliquant le résultat du a) à $P^{(k-1)}$ en $x = 0$, on obtient

$$((k)!a_k)^2 - ((k-1)!a_{k-1})\,((k+1)!a_{k+1}) \geq 0$$

puis l'inégalité voulue que le produit $a_{k+1}a_{k-1}$ soit positif ou non.

Exercice 25 : [énoncé]
La fraction est exprimée sous forme irréductible et sa partie entière est nulle. En introduisant les racines n-ième de l'unité $\omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$ avec $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, le dénominateur peut être factorisé dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k).$$

La décomposition en éléments simples de la fraction s'écrit alors

$$\frac{X^p}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k} \quad \text{avec} \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

On calcule a_k en multipliant par $X - \omega_k$ puis en évaluant en ω_k :

$$a_k = \left.\frac{X^p}{\prod_{j\neq k}(X - \omega_j)}\right|_{X=\omega_k} = \frac{\omega_k^p}{\prod_{j\neq k}(\omega_k - \omega_j)}.$$

Le dénominateur du quotient précédent correspond à $\left(X^n - 1\right)'(\omega_k)$.

En effet, par dérivation d'un produit en la somme des produits obtenus où l'on dérive un seul facteur :

$$\left(X^n - 1\right)' = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)\right)' = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{0\leq j\leq n-1\\ j\neq k}} (X - \omega_j).$$

En évaluant en ω_k, tous les produits s'annulent sauf celui d'indice k :

$$\left.\left(X^n - 1\right)'\right|_{X=\omega_k} = \prod_{\substack{0\leq j\leq n-1\\ j\neq k}} (\omega_k - \omega_j).$$

On peut alors proposer une expression simple des coefficients de la décomposition

$$a_k = \frac{\omega_k^p}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k^{p+1}}{n}.$$