

# Intégration sur un intervalle quelconque

## Intégrabilité

### Exercice 1 [02349] [Correction]

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

- (a)  $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$       (c)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$       (e)  $\int_0^{+\infty} e^{-t \arctan t} dt$   
 (b)  $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$       (d)  $\int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2} dt$       (f)  $\int_0^{+\infty} t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 4} dt$

### Exercice 2 [03385] [Correction]

(a) Étudier l'intégrabilité sur  $]1; +\infty[$  de

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$$

(b) Montrer

$$\int_2^3 f(x) dx \leq \frac{\ln 3}{2}$$

### Exercice 3 [03221] [Correction]

Étudier l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} t) dt$$

### Exercice 4 [00661] [Correction]

Montrer que les fonctions  $t \mapsto \sin t$  et  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  ne sont pas intégrables sur  $[0; +\infty[$ .

### Exercice 5 [03206] [Correction]

Soit  $f: [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant

$$\forall x, a \geq 1, 0 \leq f(x) \leq \frac{a}{x^2} + \frac{1}{a^2}$$

La fonction  $f$  est-elle intégrable sur  $[1; +\infty[$ ?

### Exercice 6 [03441] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, positive et décroissante.

On pose  $g: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$g(x) = f(x) \sin x$$

Montrer que les intégrabilités de  $f$  et de  $g$  sont équivalentes.

### Exercice 7 [03627] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et positive. On suppose

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in [0; 1[$$

Déterminer la nature de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

### Exercice 8 [03442] [Correction]

Soit  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$f(x) = x^2 \cos(1/x^2) \text{ si } x \in ]0; 1] \text{ et } f(0) = 0$$

Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0; 1]$  mais que sa dérivée  $f'$  n'est pas intégrable sur  $]0; 1]$ .

### Exercice 9 [01770] [Correction]

Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

où  $f$  est continue, de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

- (a) Étudier le prolongement par continuité de  $g$  en 0.  
 (b) Exprimer  $g'(x)$  en fonction de  $f(x)$  et de  $g(x)$  pour  $x > 0$ .  
 (c) Pour  $0 < a < b$ , montrer que

$$\int_a^b g^2(t) dt = 2 \int_a^b f(t)g(t) dt + ag^2(a) - bg^2(b)$$

puis montrer que

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t) dt}$$

(d) Étudier la nature de

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt$$

## Intégrabilité dépendant de paramètres

### Exercice 10 [00660] [Correction]

Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$$

### Exercice 11 [03705] [Correction]

(a)  $a$  désigne un réel strictement supérieur à  $-1$ . En posant  $x = \tan t$ , montrer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

(b) Donner en fonction de  $\alpha > 0$ , la nature de la série

$$\sum \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

(c) Même question pour

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$$

(d) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$$

## Intégrabilité et comportement asymptotique

### Exercice 12 [03440] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On suppose que  $f^2$  et  $f'^2$  sont intégrables. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

### Exercice 13 [03231] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux.

On suppose que  $f$  est intégrable. Montrer

$$\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

### Exercice 14 [00663] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, décroissante et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Montrer que  $f$  tend vers zéro en  $+\infty$ .
- Montrer que  $xf(x)$  tend vers zéro quand  $x \rightarrow +\infty$ .
- Si on supprime l'hypothèse décroissante, déterminer un exemple de fonction  $f$  continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $f$  ne tend pas vers zéro en  $+\infty$ .

### Exercice 15 [03238] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable.

Montrer qu'il existe une suite  $(x_n)$  de réels positifs vérifiant

$$x_n \rightarrow +\infty \text{ et } x_n f(x_n) \rightarrow 0$$

### Exercice 16 [02829] [Correction]

Donner un exemple de  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  intégrable et non bornée.

### Exercice 17 [00572] [Correction]

Soit  $f \in \mathcal{C}^2([0; +\infty[, \mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  et  $f''$  sont intégrables.

- Montrer que  $f'(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .
- Montrer que  $f.f'$  est intégrable.

### Exercice 18 [00693] [Correction]

Soit  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et intégrable.

(a) Justifier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \left| \int_0^{+\infty} |g(t)| dt - \int_0^M |g(t)| dt \right| \leq \varepsilon$$

(b) En déduire que toute primitive de  $g$  est uniformément continue.

### Exercice 19 [02538] [Correction]

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; +\infty[$  telle que  $f''$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$  et telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  soit convergente.

(a) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(b) Étudier les séries

$$\sum f(n) \text{ et } \sum f'(n)$$

## Calcul d'intégrales

### Exercice 20 [00666] [Correction]

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} & \text{(c)} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt & \text{(d)} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt \\ \text{(b)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} & & \text{(e)} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \end{array}$$

### Exercice 21 [02350] [Correction]

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} & \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} dt & \text{(e)} \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt \\ \text{(b)} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} & \text{(d)} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{1+t^2}} & \end{array}$$

### Exercice 22 [00667] [Correction]

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt & \text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}} & \text{(g)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} \\ \text{(b)} \int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x) dx & \text{(e)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)} dx & \text{(h)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3\cos^2(x)+1} dx \\ \text{(c)} \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt & \text{(f)} \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}} dx & \text{(i)} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x-x^2}} \end{array}$$

### Exercice 23 [00670] [Correction]

(a) Calculer

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}$$

(b) Établir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$$

(c) En factorisant  $1+t^4$  déterminer la valeur de  $I$ .

### Exercice 24 [03237] [Correction]

Justifier et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)}$$

### Exercice 25 [00676] [Correction]

(a) Justifier l'existence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$$

Pour  $x > 0$ , on pose

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$$

(b) On rappelle  $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$ . Établir que

$$I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

(c) En déduire la valeur de  $I$ .

### Exercice 26 [01334] [Correction]

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  admettant une limite finie  $\ell$  en  $-\infty$  et telle que  $\int_0^{+\infty} f$  existe.

Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx$$

### Exercice 27 [00677] [Correction]

Existence et valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x} dx$$

### Exercice 28 [01333] [Correction]

Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4+x^8}$$

**Exercice 29** [ 03375 ] [Correction]

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1 + t^2}$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Établir l'existence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$$

puis établir

$$I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$$

(c) On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

Établir

$$I_n = W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1} = W_{2n}$$

(d) Trouver une relation de récurrence entre  $W_n$  et  $W_{n+2}$ .  
En déduire la constance de la suite de terme général

$$u_n = (n + 1)W_n W_{n+1}$$

(e) Donner un équivalent de  $W_n$  et en déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 30** [ 00525 ] [Correction]

Justifier l'existence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} t [1/t] dt$$

**Exercice 31** [ 03630 ] [Correction]

Soit  $f: ]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, décroissante et positive. On pose pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$  si, et seulement si, la suite  $(S_n)$  est convergente et que si tel est le cas

$$\int_{]0;1]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

## Calcul d'intégrales comportant un paramètre

**Exercice 32** [ 00683 ] [Correction]

Existence et valeur pour  $a > 0$  de

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} dt$$

**Exercice 33** [ 00684 ] [Correction]

Soit  $a > 0$ . En procédant au changement de variable  $u = a/t$ , calculer

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$$

**Exercice 34** [ 02826 ] [Correction]

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2} dt$$

où  $a > 0$ .

**Exercice 35** [ 03628 ] [Correction]

Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  l'intégrale suivante est-elle définie ?

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt$$

La calculer lorsque c'est le cas.

**Exercice 36** [ 00681 ] [Correction]

Pour  $a > 0$ , calculer

$$I(a) = \int_0^{+\infty} (t - [t])e^{-at} dt$$

**Exercice 37** [ 00686 ] [Correction]

Soit  $f$  une fonction continue et croissante sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

(a) Pour  $a > 0$ , montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x+a) - f(x) dx$$

est définie et la calculer.

(b) Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+a) - \arctan(x) dx$$

**Exercice 38** [ 02827 ] [Correction]

Trouver une expression simple de

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{(1-2x \cos t + x^2)(1-2y \cos t + y^2)} dt$$

où  $x, y \in ]-1; 1[$ .

**Exercice 39** [ 02825 ] [Correction]

Existence et calcul éventuel de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+ib)^2} dt$$

**Exercice 40** [ 03884 ] [Correction]

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , étudier l'existence et déterminer l'éventuelle valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha x + 1}$$

**Exercice 41** [ 03222 ] [Correction]

Pour  $a, b > 0$ , calculer

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}$$

**Exercice 42** [ 02968 ] [Correction]

Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , où  $Q$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et  $\deg P \leq \deg Q - 2$ .

Exprimer  $\int_{\mathbb{R}} P/Q$  à l'aide des coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simple de  $P/Q$ .

**Exercice 43** [ 04060 ] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

On se donne deux réels  $0 < a < b$ .

(a) Établir que pour tout  $x > 0$

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$$

(b) En déduire convergence et valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$$

## Changement de variable

**Exercice 44** [ 03177 ] [Correction]

En opérant le changement de variable  $t = e^{-x}$ , calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

**Exercice 45** [ 02509 ] [Correction]

(a) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

en effectuant notamment le changement de variable  $x = e^t$ .

(b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

**Exercice 46** [00668] [Correction]

Existence et valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

On pourra exploiter le changement de variable  $u = 1/t$ .**Exercice 47** [00669] [Correction]

(a) Établir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$$

(b) En déduire la valeur de  $I$ .**Exercice 48** [02824] [Correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta$$

**Exercice 49** [02965] [Correction]

Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

**Intégration par parties****Exercice 50** [00680] [Correction]Calculer pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_n = \int_0^1 (x \ln x)^n dx$$

**Exercice 51** [00679] [Correction]Existence et calcul pour  $n \in \mathbb{N}$  de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

**Exercice 52** [02555] [Correction]

On considère

$$f: t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$$

(a) Étudier l'intégrabilité de  $f$  sur  $]0; 1]$  et  $[1; +\infty[$ .

(b) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$$

**Exercice 53** [00671] [Correction]

Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$$

**Exercice 54** [03629] [Correction]Soit  $f: [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et intégrable. Montrer que les fonctions  $u$  et  $v$  suivantes sont intégrables sur  $[1; +\infty[$  et que leurs intégrales y sont égales :

$$u(x) = \frac{1}{x^2} \int_1^x f(t) dt \text{ et } v(x) = \frac{f(x)}{x}$$

**Exercice 55** [03443] [Correction]Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifiant  $f(0) = 0$ . Établir

$$\forall x > 0, \int_0^x \left( \frac{f(t)}{t} \right)^2 dt \leq 2 \int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt$$

en justifiant l'existence des intégrales écrites.

**Exercice 56** [00665] [Correction]Soit  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(1+x^2)u(x)^2 + u'(x)^2] dx < +\infty$$

(a) Déterminer les limites de  $x \mapsto xu(x)^2$  en  $\pm\infty$ .

(b) Établir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x)^2 dx \geq \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2 dx \right)^2$$

**Exercice 57** [ 03990 ] [Correction]

Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \ln \left( \frac{1+t^2}{t^2} \right) dt$$

**Exercice 58** [ 04190 ] [Correction]

En réalisant une intégration par parties, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$$

## Suites d'intégrales

**Exercice 59** [ 03584 ] [Correction]

On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

(a) Déterminer une suite de fonctions  $(f_n)$  telle que

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$$

(b) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

**Exercice 60** [ 00682 ] [Correction]

On pose

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}$$

(a) Calculer  $J_0$ .

(b) Former une relation de récurrence engageant  $J_n$  et  $J_{n+1}$ .

(c) Établir qu'il existe  $A > 0$  tel que

$$J_n \sim \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$$

**Exercice 61** [ 00157 ] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt$$

où  $[t]$  représente la partie entière de  $t$ .

(a) Justifier la bonne définition de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

(b) Montrer que pour tout  $A > 0$

$$\int_0^A \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt = \frac{1}{n} \left( \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_A^{A+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

En déduire une nouvelle expression intégrale de  $u_n$ .

(c) On pose

$$v_n = nu_n$$

Montrer la convergence de la série de terme général

$$v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n}$$

(d) En déduire un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 62** [ 02446 ] [Correction]

(a) Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$ . Déterminer les limites des suites

$$\left( \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right) \text{ et } \left( \int_a^b f(t) \cos(nt) dt \right)$$

(b) Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$$

(on procédera par récurrence)

(c) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

(d) Étudier la limite puis un équivalent de

$$\left( \int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt \right)$$

## Intégrales seulement convergentes

**Exercice 63** [ 02346 ] [Correction]

(Intégrale de Dirichlet) Justifier la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

On peut montrer que celle-ci est égale à  $\pi/2$  mais c'est une autre histoire. . .

**Exercice 64** [ 03178 ] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux, décroissante et de limite nulle. Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) dt$$

**Exercice 65** [ 03334 ] [Correction]

La fonction  $x \mapsto \int_0^x \sin(e^t) dt$  admet-elle une limite en  $+\infty$  ?

**Exercice 66** [ 02421 ] [Correction]

Convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt$$

**Exercice 67** [ 03414 ] [Correction]

Trouver un équivalent en  $+\infty$  de

$$f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x^2} dx$$

**Exercice 68** [ 00691 ] [Correction]

Pour  $x > 0$ , on pose

$$f(x) = \int_0^x e^{it^2} dt = \int_0^x \cos(t^2) dt + i \int_0^x \sin(t^2) dt$$

(a) Montrer

$$f(x) = \frac{e^{ix^2} - 1}{2ix} + \frac{1}{2i} \int_0^x \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} dt$$

En déduire que  $f$  admet une limite notée  $\lambda$  en  $+\infty$ .

(b) On pose  $g(x) = \lambda - f(x)$ . Montrer que pour  $x > 0$

$$g(x) = \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt - \frac{e^{ix^2}}{2ix}$$

(c) Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$

$$g(x) = -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

**Exercice 69** [ 00695 ] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt$$

**Exercice 70** [ 03631 ] [Correction]

Soit  $f: [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \implies \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge}$$

**Exercice 71** [ 02378 ] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\alpha > 0$ . Montrer

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \implies \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha} dt \text{ converge}$$



**Exercice 72** [03900] [Correction]

Soit  $f: [a; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , décroissante et de limite nulle en  $+\infty$ .

Soit  $g: [a; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  vérifiant

$$\forall x \in [a; +\infty[, \left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq M$$

Montrer la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$$

**Étude d'intégrales dépendant d'un paramètre****Exercice 73** [00688] [Correction]

On pose pour

$$f(a) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a + 1}$$

- (a) Pour quelles valeurs de  $a$ , l'intégrale définissant  $f(a)$  existe-t-elle?  
 (b) Montrer que la fonction est décroissante et de limite nulle en  $+\infty$ .

**Exercice 74** [00687] [Correction]

(Fonction  $\Gamma$  d'Euler) Pour  $x > 0$  on note

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

- (a) Montrer que cette dernière intégrale est bien définie pour tout  $x > 0$ .  
 (b) Justifier

$$\forall x > 1, \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

et calculer  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 75** [00689] [Correction]

- (a) Pour quelles valeurs de  $x$ , l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

est-elle définie?

- (b) Étudier la monotonie de  $f$ .

- (c) Calculer

$$f(x) + f(x+1) \text{ pour } x > 0$$

- (d) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  ainsi qu'un équivalent.

- (e) Déterminer la limite de  $f$  en  $0^+$  ainsi qu'un équivalent.

**Exercice 76** [00692] [Correction]

Soit  $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  intégrable.

- (a) Soit  $A > 0$ . Montrer

$$\int_0^A \varphi(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

- (b) Montrer

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

**Intégrales fonctions des bornes****Exercice 77** [00690] [Correction]

Pour  $x > 0$ , on pose

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

- (a) Montrer que  $F(x)$  est bien définie pour tout  $x > 0$ .  
 (b) Établir que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer  $F'(x)$ .  
 (c) Montrer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} xF(x) = 0$$

- (d) Sans exprimer  $F(x)$ , justifier l'existence et calculer

$$\int_0^{+\infty} F(x) dx$$

**Exercice 78** [02879] [Correction]

(a) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

On pose pour tout réel  $x$

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

(b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer sa dérivée.

(c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt$$

**Exercice 79** [ 00281 ] [Correction]

Pour tout  $x \in [1; +\infty[$ , on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3 - 1}} dt$$

- (a) Montrer que  $F$  est bien définie, continue sur  $[1; +\infty[$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1; +\infty[$ . Exprimer  $F'(x)$ .
- (b) Étudier la dérivabilité de  $F$  en 1. Préciser la tangente au graphe de  $F$  en 1.
- (c) Étudier la limite de  $F$  en  $+\infty$ .
- (d) Justifier que  $F$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur un intervalle à préciser et que  $F^{-1}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et solution de l'équation différentielle

$$yy' = \sqrt{y^3 - 1}$$

(e) Étudier la dérivabilité de  $F^{-1}$  en 0.

**Exercice 80** [ 02348 ] [Correction]

(a) Justifier que

$$G(x, y) = \int_0^y \frac{t - [t]}{t(t+x)} dt$$

où  $[t]$  représente la partie entière de  $t$ , est définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

(b) Montrer que  $G(x, y)$  tend vers une limite  $G(x)$  quand  $y$  tend vers  $+\infty$ .

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G(n, y) = \frac{1}{n} \left( \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

(d) On note  $H(n) = nG(n)$ ; montrer que la série de terme général

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$$

converge et en déduire un équivalent de  $G(n)$ .

## Intégration des relations de comparaison

**Exercice 81** [ 03893 ] [Correction]

Déterminer un équivalent quand  $x \rightarrow +\infty$  du terme

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

**Exercice 82** [ 03894 ] [Correction]

Déterminer un développement asymptotique à trois termes quand  $x \rightarrow +\infty$  de l'expression

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

**Exercice 83** [ 04059 ] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Pour  $0 < a < b$ , déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$$

**Exercice 84** [ 04075 ] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et non intégrable. On suppose

$$f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x)).$$

Montrer

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_0^x f(t) dt\right)$$

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

On notera  $f$  la fonction intégrée et  $I$  l'intervalle d'étude, à chaque fois  $f$  s'avère continue par morceaux sur  $I$ .

(a)  $I = [0; +\infty[$ ,  $t^2 f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $f$  est intégrable et  $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$  converge.

(b)  $I = ]0; 1[$ ,  $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$  et  $\frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t=1-u}{=} \frac{\ln(1-u)}{u^{3/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$  donc  $f$  est intégrable et  $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$  converge

(c)  $I = ]0; +\infty[$ ,  $\frac{1}{e^t-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$  donc  $f$  n'est pas intégrable au voisinage de 0.

Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.

(d)  $I = ]0; +\infty[$ ,  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$  et  $t^2 f(t) = e^{2 \ln t - (\ln t)^2} = e^{\ln t(2 - \ln t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $f$  est intégrable et  $\int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2} dt$  converge.

(e)  $I = [0; +\infty[$ ,  $t^2 f(t) = e^{2 \ln t - t \arctan t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $f$  est intégrable et  $\int_0^{+\infty} e^{-t \arctan t} dt$  converge.

(f)  $I = [0; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$f(t) = t + 2 - t \sqrt{1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} = t + 2 - t \left( 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{2}{t^2} + O(1/t^3) \right) \sim \frac{3}{2t}$$

$f$  n'est pas intégrable en  $+\infty$ . Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.

### Exercice 2 : [énoncé]

(a) La fonction  $f$  est définie et continue par morceaux sur  $]1; +\infty[$ .

Quand  $x \rightarrow 1^+$ ,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{(x-1)}}{(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

et quand  $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = o\left(\frac{1}{x^{1,0001}}\right)$$

donc  $f$  est intégrable sur  $]1; +\infty[$ .

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \left( \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2} \right)^{1/2} \left( \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx \right)^{1/2}$$

En calculant les intégrales introduites

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2} [(\ln 3)^2 - (\ln 2)^2] \right)^{1/2} \leq \frac{\ln 3}{2}$$

### Exercice 3 : [énoncé]

La fonction  $f: t \mapsto \ln(\text{th} t)$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow 0^+$ ,  $\text{th} t \sim t \rightarrow 0 \neq 1$  donc  $\ln(\text{th} t) \sim \ln t$  puis  $\sqrt{t} \ln(\text{th} t) \sim \sqrt{t} \ln t \rightarrow 0$ .

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\text{th} t = 1 - \frac{2}{e^{2t}+1}$  donc  $\ln(\text{th} t) \sim -2e^{-2t}$  puis  $t^2 \ln(\text{th} t) \rightarrow 0$ .

On en déduit que  $f$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

On a

$$\int_0^{n\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = n \int_0^\pi \sin(t) dt = 2n \rightarrow +\infty$$

et donc  $t \mapsto \sin t$  n'est pas intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

La fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est prolongeable par continuité en 0 et c'est ce prolongement qu'on considère pour étudier son intégrabilité sur  $[0; +\infty[$ .

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

Or pour  $k > 1$ ,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} dt \geq \frac{2}{k\pi}$$

donc

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$$

**Exercice 5 : [énoncé]**

Pour  $a = x^\alpha$  avec  $\alpha > 0$  on obtient

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{2-\alpha}} + \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

En prenant  $\alpha = 2/3$ ,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^{4/3}}$$

et donc, par comparaison de fonctions positives,  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

**Exercice 6 : [énoncé]**

Puisque  $|g| \leq |f|$ , l'intégrabilité de  $f$  entraîne celle de  $g$ .

Inversement, supposons  $g$  intégrable.

On a

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt$$

avec par décroissance de  $f$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \leq \pi f(k\pi)$$

Parallèlement

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(t)| |\sin(t)| dt \geq f(k\pi) \int_0^\pi \sin(t) dt = 2f(k\pi)$$

donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t) |\sin(t)| dt$$

Ainsi

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| dt \leq \int_0^\pi f(t) dt + \int_0^{(n-1)\pi} f(t) |\sin(t)| dt$$

et donc

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| dt \leq \int_0^\pi f(t) dt + \int_0^{+\infty} |g(t)| dt$$

On peut alors affirmer que les intégrales de  $|f|$  sur les segments inclus dans  $[0; +\infty[$  sont majorées ce qui signifie que la fonction  $f$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

**Exercice 7 : [énoncé]**

Soit  $q \in ]\ell; 1[$ . Il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \geq A, \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq q$$

et donc

$$\forall x \geq A, f(x+1) \leq qf(x)$$

On a alors

$$\int_A^{A+n} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(t+k) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} q^k f(t) dt = \int_A^{A+1} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} q^k dt$$

et donc

$$\int_A^{A+n} f(t) dt \leq \frac{1}{1-q} \int_A^{A+1} f(t) dt = M$$

On en déduit que les intégrales sur  $[A; A+n]$  de la fonction positive  $f$  sont majorées et donc  $f$  est intégrable sur  $[A; A+\infty[$  puis sur  $[0; +\infty[$ .

L'intégrale étudiée est donc convergente.

**Exercice 8 : [énoncé]**

$f$  est évidemment dérivable sur  $]0; 1]$  avec

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et puisque

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

$f$  est aussi dérivable en 0 avec  $f'(0) = 0$ .

La fonction  $x \mapsto x \cos(1/x^2)$  est intégrable sur  $]0; 1]$  car bornée.

En revanche, la fonction  $g: x \mapsto \sin(1/x^2)/x$  n'est pas intégrable sur  $]0; 1]$ . En effet, par le changement de variable  $\mathcal{C}^1$  bijectif  $t = 1/x^2$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $]0; 1]$  équivaut à l'intégrabilité sur  $[1; +\infty[$  de

$t \mapsto \sin(t)/t$  et cette dernière est connue comme étant fautive.

On en déduit que  $f'$  n'est pas intégrable sur  $]0; 1]$ .

**Exercice 9 : [énoncé]**

(a) Soit  $F$  une primitive de la fonction continue  $f$ . On a

$$g(x) = \frac{1}{x} (F(x) - F(0)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} F'(0) = f(0)$$

Ainsi on peut prolonger  $g$  par continuité en 0 en posant  $g(0) = f(0)$ .

(b) Soit  $F$  une primitive de  $f$  (il en existe car  $f$  est continue).

On a

$$g(x) = \frac{1}{x} (F(x) - F(0))$$

On en déduit que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} (F(x) - F(0)) + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - g(x)}{x}$$

(c) Par intégration par parties

$$\int_a^b g^2(t) dt = [tg^2(t)]_a^b - 2 \int_a^b tg'(t)g(t) dt$$

donc

$$\int_a^b g^2(t) dt = [tg^2(t)]_a^b - 2 \int_a^b (f(t) - g(t))g(t) dt$$

puis la relation proposée.

On en déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b g^2(t) dt \leq 2\sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} + ag^2(a)$$

puis

$$\int_a^b g^2(t) dt - 2\sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \leq ag^2(a)$$

en ajoutant un même terme de part et d'autre

$$\left( \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \right)^2 \leq ag^2(a) + \int_a^b f^2(t) dt$$

puis par la croissance de la fonction racine carrée

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} &\leq \left| \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \right| \\ &\leq \sqrt{ag^2(a) + \int_a^b f^2(t) dt} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} &\leq \sqrt{\int_0^b f^2(t) dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^b f^2(t) dt} \\ &\leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t) dt} \end{aligned}$$

(d) En faisant tendre  $a$  vers 0, on obtient

$$\sqrt{\int_0^b g^2(t) dt} \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt}$$

et on en déduit que la fonction  $g^2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car les intégrales de  $g^2$  sur les segments inclus dans  $\mathbb{R}_+$  sont majorées.

**Exercice 10 : [énoncé]**

$f: t \mapsto \frac{t - \sin t}{t^\alpha}$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow 0$ ,  $f(t) \sim \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$  donc  $\int_0^1 f(t) dt$  est définie si, et seulement si,  $\alpha - 3 < 1$  i.e.  $\alpha < 4$ .

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}$  donc  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  est définie si, et seulement si,  $\alpha - 1 > 1$  i.e.  $\alpha > 2$ .

Finalement  $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$  est définie si, et seulement si,  $\alpha \in ]2; 4[$ .

**Exercice 11 : [énoncé]**

(a) L'intégrale étudiée est bien définie pour  $a > -1$  en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur le segment  $[0; \pi/2]$ . Par le changement de variable proposé, qui est  $\mathcal{C}^1$  strictement monotone, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (1+a)x^2}$$

En considérant  $u = x\sqrt{1+a}$ , on détermine une primitive de la fonction intégrée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (1+a)x^2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{1+a}} \arctan(\sqrt{1+ax}) \right]_0^{+\infty}$$

Finalement

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

(b) Par la symétrie du graphe de fonction sinus en  $\pi/2$ , on peut directement affirmer

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

Le calcul qui précède donne alors

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}} \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série étudiée converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

(c) Pour  $t \in [n\pi; (n+1)\pi]$ , on a

$$1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t) \leq 1 + t^\alpha \sin^2(t) \leq 1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)$$

Puis en passant à l'inverse et en intégrant, on obtient l'encadrement

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série étudiée équivaut à la convergence de la série précédente. La condition attendue est donc encore  $\alpha > 2$ .

(d) Les sommes partielles de la série étudiée ci-dessus correspondent aux intégrales suivantes

$$\int_0^{n\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$$

La fonction intégrée étant positive et la suite de segments  $[0; n\pi]$  étant croissante et de réunion  $\mathbb{R}_+$ , la convergence de l'intégrale proposée entraîne la convergence de la série et inversement. On conclut que l'intégrale étudiée converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

**Exercice 12 : [énoncé]**

Par l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

on peut affirmer

$$|ff'| \leq \frac{1}{2}(f^2 + f'^2)$$

et assurer que la fonction  $ff'$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ . Or

$$\int_0^x ff'(t) dt = \frac{1}{2}(f(x))^2$$

donc  $f^2$  converge quand  $x \rightarrow +\infty$ . Puisque la fonction  $f^2$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$  et converge en  $+\infty$ , sa limite est nécessairement nulle et donc  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ .

**Exercice 13 : [énoncé]**

Par la relation de Chasles

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

donc, quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_x^{x+1} f(t) dt \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

**Exercice 14 : [énoncé]**

(a) Pour  $x \geq 1$ , la décroissance de  $f$  donne

$$\int_x^{x+1} f(t) dt \leq f(x) \leq \int_{x-1}^x f(t) dt$$

Or

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

et puisque l'intégrale de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  converge

$$\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

Aussi

$$\int_{x-1}^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et donc par encadrement

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

(b) La fonction  $f$  est positive car décroît vers 0 en  $+\infty$  et

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui permet d'affirmer

$$x f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

(c) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in [0; 2], f(x) = 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \forall t \in [0; 1], f(t+n) = \begin{cases} n^2 t & \text{si } t \in [0; 1/n^2] \\ n^2(2/n^2 - t) & \text{si } t \in [1/n^2; 2/n^2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\int_0^n f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n-1} \leq 1$$

Puisque la suite  $([0; n])_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de segments de réunion  $\mathbb{R}_+$  et que  $f$  est positive on peut affirmer que  $f$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

**Exercice 15 :** [énoncé]

Montrons pour commencer

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}_+, \exists x \geq A, |x f(x)| \leq \varepsilon$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et  $A \in \mathbb{R}_+$  vérifiant

$$\forall x \geq A, |x f(x)| \geq \varepsilon$$

on a alors au voisinage de  $+\infty$

$$|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{x}$$

ce qui est contradictoire avec l'intégrabilité de  $f$ .

Sachant

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}_+, \exists x \geq A, |x f(x)| \leq \varepsilon$$

on peut construire une suite  $(x_n)$  solution en prenant  $\varepsilon = 1/(n+1) > 0$ ,  $A = n$  et en choisissant  $x_n$  vérifiant

$$x_n \geq n \text{ et } |x_n f(x_n)| \leq 1/(n+1)$$

**Exercice 16 :** [énoncé]

On peut prendre  $f$  nulle sur  $[0; 1]$ , puis pour chaque intervalle  $[n; n+1]$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f$  affine par morceaux définie par les nœuds  $f(n) = 0$ ,  $f(n + \frac{1}{n^3}) = n$ ,  $f(n + \frac{2}{n^3}) = 0$  et  $f(n+1) = 0$  ce qui définit une fonction  $f$  positive continue vérifiant  $\int_n^{n+1} f = \frac{1}{n^2}$  et donc intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  bien que non bornée.

**Exercice 17 :** [énoncé]

(a) On a

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt$$

donc  $f'(x)$  admet une limite finie  $\ell$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Si  $\ell > 0$  alors pour  $x$  assez grand  $f'(x) \geq \ell/2$  puis  $f(x) \geq \ell x/2 + m$  ce qui empêche la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

Si  $\ell < 0$  on obtient aussi une absurdité. Il reste donc  $\ell = 0$ .

(b) Puisque la fonction  $f'$  est continue et converge en  $+\infty$ , cette fonction est bornée et donc  $t \mapsto f(t)f'(t)$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

**Exercice 18 :** [énoncé]

(a) Par convergence,  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M |g(t)| dt = \int_0^\infty |g(t)| dt$  d'où le résultat.

(b) Soit  $f$  une primitive de  $g$ . On peut écrire  $f(x) = \int_0^x g(t) dt + C$ .

Pour tout  $x \leq y \in \mathbb{R}$  on a alors :  $|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |g(t)| dt$ .

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $M$  tel qu'introduit ci-dessus.

Si  $x \geq M$  alors

$$|f(y) - f(x)| \leq \int_M^{+\infty} |g(t)| dt \leq \varepsilon$$

De plus, la fonction  $t \mapsto |g(t)|$  étant continue sur le segment  $[0; M+1]$ , elle y est bornée par un certain  $A$  et on a donc  $|f(y) - f(x)| \leq A|y-x|$  pour tout  $x \leq y \in [0; M+1]$

Par suite, pour  $\alpha = \min(1, \varepsilon/A) > 0$ , on a pour tout  $x \leq y \in \mathbb{R}$ ,

$$|y-x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

La fonction  $f$  est donc uniformément continue.

**Exercice 19 :** [énoncé]

(a) Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut écrire

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt$$

Par intégrabilité de  $f''$ , la fonction  $f'$  admet une limite finie  $\ell$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Si  $\ell > 0$  alors, pour  $x$  assez grand  $f'(x) \geq \ell/2$ . Notons  $A \geq 0$  tel que ce qui précède soit vrai pour  $x \geq A$ . On a alors

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \geq f(0) + \int_0^A f'(t) dt + \int_A^x \frac{\ell}{2} dt$$

et donc  $f(x) \geq \ell x/2 + C^{te}$  ce qui empêche la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

Si  $\ell < 0$  on obtient aussi une absurdité. Il reste donc  $\ell = 0$ .

Posons

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale

$$F(x+1) = F(x) + f(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$F(x), F(x+1) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Aussi  $f'(x) \rightarrow 0$  et

$$\left| \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt \right| \leq \max_{t \in [x; x+1]} |f'(t)| \rightarrow 0$$

donc par opération  $f(x) \rightarrow 0$ .

(b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \int_n^{n+1} ((n+1)-t)f''(t) dt$$

donc

$$f'(n) = f(n+1) - f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt$$

La série de terme général  $f(n+1) - f(n)$  est convergente car de même nature que la suite  $(f(n))$  qui converge en  $+\infty$ . La série de terme général  $\int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt$  est absolument convergente car

$$\left| \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f''(t)| dt$$

et le terme majorant est sommable par intégrabilité de  $f''$ .

Par conséquent, la série  $\sum f'(n)$  est convergente.

Aussi

$$F(n+1) = F(n) + f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} f''(t) dt$$

On peut alors mener le même raisonnement et conclure que  $\sum f(n)$  converge.

**Exercice 20 : [énoncé]**

On notera  $f$  la fonction intégrée et  $I$  l'intervalle d'étude, à chaque fois  $f$  s'avère continue par morceaux sur  $I$ .

(a)  $I = [0; +\infty[$ ,  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ , donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} dt = \left[ \ln \frac{t+1}{t+2} \right]_0^{+\infty} = \ln 2$$

(b)  $I = [0; +\infty[$ ,  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} \stackrel{u=e^t}{=} \int_1^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^2} = \frac{1}{2}$$

(c)  $I = ]0; +\infty[$ ,  $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  et  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \stackrel{IPP}{=} \left[ t \ln \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{1+t^2} = \pi$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.

(d)  $I = [0; +\infty[$ ,  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2ue^{-u} du \stackrel{IPP}{=} \left[ -2ue^{-u} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-u} du = 2$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.

(e)  $I = ]0; +\infty[$ ,  $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$  et  $t^{3/2}f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \stackrel{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln 1/u}{u^2(1+1/u)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{(u+1)^2} du$$



donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = 0$$

**Exercice 21 : [énoncé]**

On notera  $f$  la fonction intégrée et  $I$  l'intervalle d'étude, à chaque fois  $f$  s'avère continue par morceaux sur  $I$ .

(a)  $I = ]0; +\infty[$ ,  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $f$  est intégrable et  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$  converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} \stackrel{u=\sqrt{e^t+1}}{=} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2 du}{u^2-1} = \left[ \ln \frac{u-1}{u+1} \right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2 \ln(1+\sqrt{2})$$

(b)  $I = [1; +\infty[$ ,  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $f$  est intégrable et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t}$  converge.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \int_1^{+\infty} \frac{2 dt}{e^t - e^{-t}} \stackrel{u=e^t}{=} \int_e^{+\infty} \frac{2 du}{u^2-1} = \left[ \ln \frac{u-1}{u+1} \right]_e^{+\infty} = \ln \frac{e+1}{e-1}$$

(c)  $I = ]0; +\infty[$ ,  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  et  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f$  est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} dt \text{ converge.}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} dt \stackrel{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln 1/u}{u^3(1+1/u^2)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{-u \ln u}{(u^2+1)^2} du$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} dt = 0$$

(d)  $I = [1; +\infty[$ ,  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $f$  est intégrable et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{1+t^2}}$  converge.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{1+t^2}} \stackrel{t=\operatorname{sh} x}{=} \int_{\operatorname{argsh} 1}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \int_{\operatorname{argsh} 1}^{+\infty} \frac{4 dx}{(e^x - e^{-x})^2} \stackrel{u=e^x}{=} \int_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{4 du}{u(u-1/u)^2}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{1+t^2}} = \int_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{4u du}{(u^2-1)^2} = \left[ 2 \frac{1}{1-u^2} \right]_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} = 2 \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2-1} = \sqrt{2}-1$$

(e)  $I = ]0; 1]$ ,  $t^{2/3} f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$  donc  $f$  est intégrable et  $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$  converge.

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^1 4 \ln u du = [4u \ln u - 4u]_0^1 = -4$$

**Exercice 22 : [énoncé]**

(a)  $f: t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ ,  $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$  et  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Via le changement de variable  $u = \sqrt{t}$

$$I = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 2$$

(b)  $f: x \mapsto \sin x \ln(\sin x)$  est définie et continue sur  $]0; \pi/2]$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Via le changement de variable  $t = \cos x$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-x) + \ln(1+x) dx = \ln 2 - 1$$

(c)  $f: t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$  est définie et continue sur  $]0; 1[$ ,  $\sqrt{t} f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  et  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Via le changement de variable  $u = \sqrt{1-t}$

$$I = - \int_1^0 2 \ln(1-u^2) du = \int_0^1 2 \ln(1-u^2) du$$

Or  $\int_0^1 \ln(1-u^2) du = \int_0^1 \ln(1-u) du + \int_0^1 \ln(1+u) du = 2 \ln 2 - 2$ , donc

$$I = 4 \ln 2 - 4$$

(d)  $f: x \mapsto \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x^{1/3}}$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4/3}}$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Via le changement de variable  $t = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = t^3$ ,  $dx = 3t^2 dt$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}} = \int_0^{+\infty} \frac{3t^2 dt}{(t^3+1)t} = 3 \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{t^3+1}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}} = \left[ \ln \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}} + \sqrt{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(e)  $f: x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Via le changement de variable  $t = \sqrt{1+x}$ ,  $x = t^2 - 1$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{(t^2-1)t^2} 2t dt = \int_1^{+\infty} \frac{2 dt}{t(t+1)} = 2 \ln 2$$

(f)  $f: x \mapsto \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3}$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4/3}}$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Via le changement de variable  $t = (1+x)^{1/3}$ ,  $x = t^3 - 1$ ,  $dx = 3t^2 dt$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}} dx = 3 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}$$

or

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

(g) Par  $2\pi$  périodicité,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$$

Sur  $]-\pi; \pi[$ , on peut réaliser le changement de variable  $t = \tan x/2$ .

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 dt}{(1+t^2)(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 dt}{3+t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(h) Sur  $[0; \pi/2[$ ,  $]\pi/2; 3\pi/2[$  ou  $]3\pi/2; 2\pi[$  on a

$$\int \frac{\sin^2 x}{3 \cos^2 x + 1} dx \underset{t=\tan x}{=} \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)(4+t^2)} = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \arctan \frac{\tan x}{2} + C^{te}$$

Par recollement, on détermine une primitive sur  $[0; 2\pi[$  et on conclut

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3 \cos^2(x) + 1} dx = \frac{2\pi}{3}$$

(i)  $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}$  est définie et continue sur  $]0; 1[$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge

On écrit

$$x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

On pose alors  $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin t$  et on a  $\sqrt{x-x^2} = \frac{1}{2} \cos t$ .

Par changement de variable

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin t + 1}{2 \cos t} \cos t dt = \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 23 : [énoncé]**

(a)  $f: t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$  est définie et continue sur  $[0; +\infty[$ ,  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$  donc  $f$  est intégrable et l'intégrale  $J$  converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4} = \left[ \frac{1}{2} \arctan t^2 \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

(b)  $\frac{1}{1+t^4} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$  et  $\frac{t^2}{1+t^4} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$  donc les deux intégrales introduites convergent.

Le changement de variable  $x = 1/t$  transforme l'une en l'autre.

(c) On a la factorisation

$$t^4 + 1 = (t^2 + 1)^2 - 2t^2 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$$

donc

$$I - \sqrt{2}J + I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \left[ \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t + 1) \right]_0^{+\infty}$$

puis

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

**Exercice 24 : [énoncé]**

La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et est dominée par  $1/t^3$  quand  $|t| \rightarrow +\infty$ , donc elle est intégrable et l'intégrale étudiée existe.

Par découpage et changement de variable

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1-it)}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)} = \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(1+t^2)^2}$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}$$

Une intégration par parties justifiée par deux convergences donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 25 :** [énoncé]

(a)  $f: t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow 0$ ,  $f(t) \rightarrow 0$  et quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $f(t) = O(1/t^2)$ .

On en déduit que  $f$  est intégrable sur  $I$  ce qui assure l'existence de  $I$ .

(b) On a  $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$  donc

$$4I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{3 \sin t - \sin(3t)}{t^2} dt$$

Par convergence des intégrales écrites, on a

$$4I(x) = 3 \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt \stackrel{u=3t}{=} 3 \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$$

donc

$$I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

(c)  $I = \lim_{x \rightarrow 0} I(x)$ . Or  $\sin t = t + t^2 \varepsilon(t)$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$  donc

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \ln 3 + \int_x^{3x} \varepsilon(t) dt$$

Puisque  $\int_x^{3x} \varepsilon(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on obtient

$$I = \frac{3}{4} \ln 3$$

**Exercice 26 :** [énoncé]

Puisque l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f$  converge, il en est de même de

$$\int_0^{+\infty} f(a+x) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x) dx$$

avec

$$\int_0^{+\infty} f(a+x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x) dx = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

On en déduit la convergence de l'intégrale suivante et sa valeur

$$\int_0^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx = \int_a^b f(x) dx$$

D'autre part, on a par découpage et pour tout  $A \geq 0$

$$\int_{-A}^0 (f(a+x) - f(b+x)) dx = \int_{-A+a}^{-A+b} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

Or

$$(b-a) \min_{[-A+a; -A+b]} f \leq \int_{-A+a}^{-A+b} f(x) dx \leq (b-a) \max_{[-A+a; -A+b]} f$$

avec

$$\min_{[-A+a; -A+b]} f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ell \text{ et } \max_{[-A+a; -A+b]} f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ell$$

car  $f$  converge vers  $\ell$  en  $-\infty$ .

On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^0 (f(a+x) - f(b+x)) dx = (b-a)\ell - \int_a^b f(x) dx$$

et finalement on obtient la convergence et la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx = (b-a)\ell$$

**Exercice 27 :** [énoncé]

La fonction  $f: x \mapsto \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x}$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$f(x) = \frac{2x - x + o(x)}{x} \rightarrow 1$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$f(x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{x}}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi  $f$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

Pour  $A \geq 0$ ,

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x} dx = \int_0^A \frac{\arctan(2x)}{x} dx - \int_0^A \frac{\arctan x}{x} dx$$

avec convergence des deux nouvelles intégrales.

Par changement de variable  $u = 2x$  sur la première,

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x} dx = \int_0^{2A} \frac{\arctan x}{x} dx - \int_0^A \frac{\arctan x}{x} dx = \int_A^{2A} \frac{\arctan x}{x} dx$$

Par la croissance de la fonction arctan,

$$\arctan(A) \int_A^{2A} \frac{dx}{x} \leq \int_A^{2A} \frac{\arctan x}{x} dx \leq \arctan(2A) \int_A^{2A} \frac{dx}{x}$$

À la limite quand  $A \rightarrow +\infty$ , on conclut

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

**Exercice 28 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\frac{1}{1 + X^4 + X^8} = \frac{1 - X^4}{1 - X^{12}}$$

Les pôles de cette fraction rationnelle sont les éléments de  $U_{12} \setminus U_4$  et ils sont simples.

On peut donc écrire en combinant les parties polaires conjuguées

$$\frac{1}{1 + X^4 + X^8} = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\alpha_1}{X - \omega_1} \right) + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\alpha_2}{X - \omega_2} \right) + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\alpha_4}{X - \omega_4} \right) + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\alpha_5}{X - \omega_5} \right)$$

avec  $\omega_k = \exp(2ik\pi/12)$ , les  $\omega_1, \omega_2, \omega_4$  et  $\omega_5$  de parties imaginaires strictement positives.

$$\alpha_k = \frac{1 - X^4}{(1 - X^{12})'} \Big|_{X=\omega_k} = \frac{1}{12} (\omega_k^5 - \omega_k)$$

Soit  $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b > 0$ . On a

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t - \omega} = \int_{-A}^A \frac{(t - a) + ib}{(t - a)^2 + b^2} dt = \left[ \frac{1}{2} \ln((t - a)^2 + b^2) + i \arctan \frac{t - a}{b} \right]_{-A}^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} i\pi$$

la limite de l'arc tangente étant obtenue sachant  $b > 0$ .

Soit de plus  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \int_{-A}^A 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\alpha}{t - \omega} \right) dt \right) = 2 \operatorname{Re} \left( \lim_{A \rightarrow +\infty} \alpha \int_{-A}^A \frac{dt}{t - \omega} \right) = -2\pi \operatorname{Im} \alpha$$

Puisque la convergence de l'intégrale que nous étudions est assurée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 + x^8} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{dx}{1 + x^4 + x^8}$$

et on en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 + x^8} = -2\pi \operatorname{Im} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 + x^8} = \frac{\pi}{6} \operatorname{Im} (\omega^2 - \omega^{10} + \omega^4 - \omega^8)$$

Or

$$\omega^2 - \omega^{10} = 2i \sin \frac{\pi}{3} = i\sqrt{3} \text{ et } \omega^4 - \omega^8 = 2i \sin \frac{2\pi}{3} = i\sqrt{3}$$

et finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 + x^8} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

**Exercice 29 :** [\[énoncé\]](#)

(a) Il suffit d'étudier la variation de la fonction  $x \mapsto e^x - (1 + x)$  pour obtenir cette inégalité de convexité classique. On en déduit

$$1 - t^2 \leq e^{-t^2} = \frac{1}{e^{t^2}} \leq \frac{1}{1 + t^2}$$

- (b) La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$ .  
 Puisque  $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , cette fonction est intégrable sur  $[0; +\infty[$  ce qui assure l'existence de  $I$ .  
 La fonction  $t \mapsto (1 - t^2)^n$  est définie et continue par morceaux sur le segment  $[0; 1]$ , donc l'intégrale définissant  $I_n$  existe.  
 La fonction  $t \mapsto 1/(1 + t^2)^n$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$ .  
 Puisque  $1/(1 + t^2)^n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 1/t^{2n}$  avec  $2n > 1$ , cette fonction est intégrable sur  $[0; +\infty[$  ce qui assure l'existence de  $J_n$ .

On a

$$(1 - t^2)^n \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n}$$

donc

$$I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \leq \frac{I}{\sqrt{n}}$$

et

$$\frac{I}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq J_n$$

- (c) Le changement de variable  $t = \sin x$  donne  $I_n = W_{2n+1}$ .  
 Le changement de variable  $t = \tan x$  donne  $J_{n+1} = W_{2n}$ .  
 (d) Par intégration par parties

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On en déduit  $u_{n+1} = u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est constante égale à

$$u_1 = \pi/2$$

- (e) Puisque

$$\forall x \in [0; \pi/2], (\cos x)^{n+1} \leq (\cos x)^n \leq (\cos x)^{n-1}$$

on obtient en intégrant

$$W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$$

Or

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1} \sim W_{n-1}$$

donc par encadrement

$$W_{n+1} \sim W_n$$

On en déduit

$$u_n \sim n W_n^2$$

puis

$$W_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

Par suite

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \text{ et } J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

L'encadrement du b) donne alors

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**Exercice 30 : [énoncé]**

La fonction  $f: t \mapsto t[1/t]$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .  
 Pour  $t > 1$ ,  $[1/t] = 0$  et donc  $f(t) = 0$ . Ainsi  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .  
 Pour  $t > 0$ ,  $1/t - 1 \leq [1/t] \leq 1/t$  et donc  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$  1. Ainsi  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$ .  
 On a

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(t) dt$$

Or

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t[1/t] dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} kt dt$$

puis

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

et après réorganisation

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

On en déduit

$$I = \frac{\pi^2}{12}$$

**Exercice 31 : [énoncé]**

Supposons  $f$  intégrable sur  $]0; 1]$ .

Par la décroissance de  $f$ , on remarque

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) dt$$

En sommant pour  $k$  allant de 1 à  $n-1$ , on obtient

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt \leq S_n - \frac{1}{n} f(1) \leq \int_0^{1-1/n} f(t) dt$$

Par théorème d'encadrement, on obtient

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Inversement, supposons la suite  $(S_n)$  convergente.

Par la décroissance de  $f$ , on a

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En sommant pour  $k$  allant de 1 à  $n-1$ , on obtient

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt \leq S_n - \frac{1}{n} f(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

On en déduit que la suite des intégrales précédente est majorée et puisque la fonction  $f$  est positive, cela suffit pour conclure que l'intégrale de  $f$  converge.

**Exercice 32 : [énoncé]**

Comme  $a > 0$ ,  $t^2 \sin t e^{-at} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , la fonction continue par morceaux

$t \mapsto \sin(t)e^{-at}$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$  et  $I(a) = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} dt$  converge.

$$I(a) = \operatorname{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{it-at} dt \right) = \operatorname{Im} \left( \left[ \frac{1}{i-a} e^{it-at} \right]_0^{+\infty} \right) = \frac{1}{a^2 + 1}$$

**Exercice 33 : [énoncé]**

La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

Cette fonction est intégrable car

$$\sqrt{t} \frac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } t^{3/2} \frac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

L'intégrale définissant  $I(a)$  est donc bien définie.

Par le changement de variable  $\mathcal{C}^1$  bijectif proposé

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt \underset{u=a/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a - \ln u}{a(u^2+1)} du = \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} - \frac{1}{a} I(1)$$

Pour  $a=1$ , on obtient  $I(1) = 0$  et donc

$$I(a) = \frac{\ln a}{a} \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 34 : [énoncé]**

L'intégrabilité est entendue.

Par le changement de variable  $u = a^2/t$  on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln a - \ln u}{a^2+u^2} du$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2} dt = \frac{\pi}{2a} \ln a$$

**Exercice 35 : [énoncé]**

La fonction  $f: t \mapsto \sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$ .

Par développements limités

$$f(t) = (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

Si  $1+a+b \neq 0$  alors  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$  ou  $-\infty$  et l'intégrale n'est assurément pas convergente.

Si  $1+a+b = 0$  et  $a+2b \neq 0$  alors  $f(t) \sim \frac{\lambda}{t^{3/2}}$  avec  $\lambda \neq 0$ . Par équivalence de fonction de signe constant au voisinage de  $+\infty$ , on peut affirmer que l'intégrale diverge.

Si  $1 + a + b = 0$  et  $a + 2b = 0$  i.e.  $(a, b) = (-2, 1)$  alors  $f(t) = O(1/t^{3/2})$  et donc  $f$  est intégrable.

Finalement, l'intégrale étudiée converge si, et seulement si,  $(a, b) = (-2, 1)$ .

Supposons que tel soit le cas.

$$\int_0^x (\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}) dt = \frac{2}{3} [t^{3/2} - 2(t+1)^{3/2} + (t+2)^{3/2}]_0^x$$

Par développements limités

$$x^{3/2} - 2(x+1)^{3/2} + (x+2)^{3/2} \sim \frac{3}{4\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt = \frac{4}{3} (1 - \sqrt{2})$$

**Exercice 36 :** [énoncé]

La fonction  $f: t \mapsto (t - [t])e^{-at}$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$ . Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $t^2 f(t) \rightarrow 0$  donc  $f$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

$$\int_0^n f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 te^{-a(t+k)} dt = \frac{1 - e^{-na}}{1 - e^{-a}} \frac{1 - (a+1)e^{-a}}{a^2}$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{1 - (a+1)e^{-a}}{a^2(1 - e^{-a})}$$

**Exercice 37 :** [énoncé]

(a)  $x \mapsto f(x+a) - f(x)$  est continue et positive (car  $f$  est croissante).

$$\int_0^A f(x+a) - f(x) dx = \int_a^{A+a} f(x) dx - \int_0^A f(x) dx = \int_A^{A+a} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx$$

Or  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$  donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\forall A \geq M, \left| \int_A^{A+a} f(x) dx - a\ell \right| \leq \int_A^{A+a} |f(x) - \ell| dx \leq a\varepsilon$$

donc

$$\int_A^{A+a} f(x) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} a\ell$$

puis

$$\int_0^A f(x+a) - f(x) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} a\ell - \int_0^a f(x) dx$$

On peut conclure que  $\int_0^{+\infty} f(x+a) - f(x) dx$  est définie et

$$\int_0^{+\infty} f(x+a) - f(x) dx = a\ell - \int_0^a f(x) dx$$

(b) Comme ci-dessus, mais en faisant  $A \rightarrow -\infty$ , on établit

$$\int_0^{-\infty} f(x+a) - f(x) dx = a\ell' - \int_0^a f(x) dx$$

avec  $\ell' = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Par conséquent  $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+a) - \arctan(x) dx$  est définie par application du théorème de Chasles et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+a) - \arctan(x) dx = \pi a$$

**Exercice 38 :** [énoncé]

Par le changement de variable  $u = \tan \frac{t}{2}$  on parvient à l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{8u^2 du}{(1+u^2)((1-x)^2 + (1+x)^2u^2)((1-y)^2 + (1+y)^2u^2)}$$

On peut réaliser une décomposition en éléments simples réelles de la fraction rationnelle intégrée qui pour des raisons de parité sera de la forme

$$\frac{a}{1+u^2} + \frac{b}{(1-x)^2 + (1+x)^2u^2} + \frac{c}{(1-y)^2 + (1+y)^2u^2}$$

avec

$$a = -\frac{1}{2xy}, b = -\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{2x(x-y)(1-xy)} \text{ et } c = -\frac{(1-y)^2(1+y)^2}{2y(y-x)(1-xy)}$$

sous réserve que  $x \neq y$  et  $xy \neq 0$ .

Puisque

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{\alpha^2 + \beta^2 u^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\pi}{2}$$

on parvient à

$$I = \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2xy} - \frac{1-x^2}{2x(x-y)(1-xy)} + \frac{1-y^2}{2y(x-y)(1-xy)} \right) = \frac{\pi}{2(1-xy)}$$

Les cas exclus  $x \neq y$  et  $xy \neq 0$  peuvent être récupérés par continuité. Il m'a peut-être échappé une démarche plus simple...

**Exercice 39 : [énoncé]**

On peut écrire

$$1 + (t + ib)^2 = (t + i(b + 1))(t + i(b - 1))$$

Si  $b = \pm 1$  la fonction n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$  à cause d'une singularité en 0. Si  $b \neq \pm 1$  alors la fonction  $f: t \mapsto \frac{1}{1+(t+ib)^2}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  quand  $t \rightarrow \pm\infty$  donc  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . En procédant à une décomposition en éléments simples :

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{1+(t+ib)^2} = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln(t^2 + (b+1)^2) + \arctan\left(\frac{t}{b+1}\right) \right]_{-A}^A - \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln(t^2 + (b-1)^2) + \arctan\left(\frac{t}{b-1}\right) \right]_{-A}^A$$

Si  $|b| > 1$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+ib)^2} = 0$$

Si  $|b| < 1$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+ib)^2} = \pi$$

**Exercice 40 : [énoncé]**

Le discriminant du trinôme  $x^2 + \alpha x + 1$  vaut  $\Delta = \alpha^2 - 4$ .

Cas  $|\alpha| < 2$

On a  $\Delta < 0$ , le trinôme ne s'annule pas et la fonction  $x \mapsto 1/(x^2 + \alpha x + 1)$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$ . La fonction est intégrable car équivalente à  $1/x^2$  en  $+\infty$ .

Cas  $\alpha \geq 2$ , le trinôme ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$  car il est somme de termes positifs. À nouveau la fonction  $x \mapsto 1/(x^2 + \alpha x + 1)$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

Cas  $\alpha \leq -2$ , le trinôme  $x^2 + \alpha x + 1$  présente deux racines positives et la fonction  $x \mapsto 1/(x^2 + \alpha x + 1)$  n'est pas définie sur l'intégralité de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

Même en découpant l'intégrale aux points singuliers, on peut observer que les intégrales introduites ne sont pas définies. On ne parvient donc pas à donner un sens à l'intégrale étudiée dans ce cas.

Reste à calculer l'intégrale.

Cas  $|\alpha| < 2$

Le trinôme  $x^2 + \alpha x + 1$  s'écrit peut se réécrire

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + a^2 \text{ avec } a = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha x + 1} = \left[ \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{2x + \alpha}{a}\right) \right]_0^{+\infty}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha x + 1} = \frac{1}{a} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\alpha}{a}\right) \right)$$

Cas  $\alpha = 2$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \left[ -\frac{1}{x+1} \right]_0^{+\infty} = 1$$

Cas  $\alpha > 2$   
Le trinôme  $x^2 + \alpha x + 1$  à deux racines  $x_0, x_1$  distinctes strictement négatives.

$$x_0 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Par décomposition en éléments

$$\frac{1}{x^2 + \alpha x + 1} = \frac{a}{x - x_0} + \frac{b}{x - x_1}$$

avec

$$a = \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{ et } b = \frac{1}{x_0 - x_1} = -a$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha x + 1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \left[ \ln \frac{x - x_0}{x - x_1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{\alpha - \sqrt{\Delta}}$$

**Exercice 41 : [énoncé]**

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$  est définie et continue par morceaux sur  $]-\infty; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $f(t) \sim \frac{1}{t^4}$  donc  $f$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow -\infty$ ,  $f(t) \sim \frac{1}{t^4}$  donc  $f$  est intégrable sur  $]-\infty; 0]$

On remarque



$$\frac{1}{t^2 + a^2} - \frac{1}{t^2 + b^2} = \frac{b^2 - a^2}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}$$

Pour  $a \neq b$

$$I(a, b) = \frac{1}{b^2 - a^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + b^2} \right)$$

avec convergence des deux intégrales introduites.

Ainsi

$$I(a, b) = \frac{\pi}{ab(a + b)}$$

Pour  $a = b$ ,

$$I(a, a) = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^2 + a^2 - t^2) dt}{(t^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^2} dt \right)$$

Par intégration par parties (avec deux convergences)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \times t}{(t^2 + a^2)^2} dt = \left[ -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2 + a^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

donc

$$I(a, a) = \frac{\pi}{2a^3}$$

**Exercice 42 : [énoncé]**

La fonction  $t \mapsto P(t)/Q(t)$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $|t| \rightarrow +\infty$ ,  $P(t)/Q(t) = O(1/t^2)$  car  $\deg(P/Q) \leq -2$ .

Par suite l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q}$  converge.

Les pôles de la fraction  $P/Q$  sont complexes conjugués non réels et les parties polaires correspondantes sont deux à deux conjuguées. On en déduit que  $P/Q = 2 \operatorname{Re}(F)$  où  $F$  est la fraction rationnelle obtenue en sommant les parties polaires relatives aux pôles de partie imaginaire strictement positive.

Considérons un pôle  $a = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta > 0$ .

Pour les éléments simples de la forme  $\frac{1}{(X-a)^m}$  avec  $m > 1$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t-a)^m} = \left[ -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(t-a)^{m-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Pour les éléments simples de la forme  $\frac{1}{X-a}$  on a

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t-a} = \int_{-A}^A \frac{t-\alpha+i\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2} = \left[ \ln|t-\alpha| + i \arctan\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right) \right]_{-A}^A. \text{ Quand } A \rightarrow +\infty, \text{ on obtient } \int_{-A}^A \frac{dt}{t-a} \rightarrow i\pi.$$

Puisque  $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ , on obtient  $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = 2 \operatorname{Re}(\sigma)\pi$  avec  $\sigma$  la somme des coefficients facteurs des éléments simples  $\frac{1}{X-a}$  avec  $a$  de parties imaginaires strictement positive.

**Exercice 43 : [énoncé]**

(a) L'intégrale en premier membre existe et définit une fonction dérivable de  $x$  avec

$$\frac{d}{dx} \left( \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt \right) = -\frac{f(ax) - f(bx)}{x}$$

L'intégrale en second membre définit aussi une fonction dérivable de  $x$  avec

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du \right) = b \frac{f(bx)}{bx} - a \frac{f(ax)}{ax} = \frac{f(bx) - f(ax)}{x}$$

On en déduit que les deux membres de l'égalité voulue sont égaux à une constante près.

Or ces deux fonctions de  $x$  sont de limite nulle quand  $x \rightarrow +\infty$  et la constante précédente est alors nulle.

(b) Par continuité de  $f$  en 0, on peut écrire

$$f(t) = f(0) + \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ de limite nulle en } 0$$

On a alors

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{ax}^{bx} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

Or

$$\left| \int_{ax}^{bx} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right| \leq \max_{t \in [ax; bx]} |\varphi(t)| \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \max_{t \in [ax; bx]} |\varphi(t)| \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

On conclut à la convergence de l'intégrale et à la valeur

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

**Exercice 44 : [énoncé]**

L'intégrale étudiée est évidemment convergente car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment  $[0; 1]$ . La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  réalise une bijection

de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[0; +\infty[$  vers  $]0; 1]$ . Quitte à considérer l'intégrale initiale comme portant sur l'intervalle  $]0; 1]$ , on peut opérer le changement de variable  $t = e^{-x}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 + e^{-4x}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx \text{ car } dt = -e^{-x} dx$$

Par le théorème de changement de variable, l'intégrale introduite est assurément convergente. On peut aussi exprimer l'intégrale à l'aide des fonctions de trigonométrie hyperbolique

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(2x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{1 + 2 \operatorname{sh}^2 x} dx$$

Par le changement de variable  $u = \operatorname{sh} x$  (la fonction  $x \mapsto \operatorname{sh} x$  induit une bijection  $\mathcal{C}^1$ )

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + 2u^2} du \text{ car } du = \operatorname{ch} x dx$$

Enfin, par la formule d'intégration

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right)$$

avec  $a = 1/\sqrt{2}$ , on peut achever le calcul

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \arctan(\sqrt{2}u) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

**Exercice 45 :** [énoncé](#)

- (a) L'intégrale de départ est bien définie. En effet, la fonction  $f: x \mapsto (1 + x^2)/(1 + x^4)$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$  et on vérifie  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1/x^2$  ce qui donne un argument d'intégrabilité.

Par le changement de variable  $\mathcal{C}^1$  strictement croissant  $x = e^t$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t} + 1}{e^{4t} + 1} e^t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 2t} dt$$

Or

$$\operatorname{ch} 2t = 2 \operatorname{ch}^2 t - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 t$$

Par le nouveau changement de variable  $\mathcal{C}^1$  strictement croissant  $u = \operatorname{sh} t$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + 2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \arctan(\sqrt{2}u) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

- (b) Par le changement de variable  $\mathcal{C}^1$  strictement monotone  $x = 1/t$ , on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

**Exercice 46 :** [énoncé](#)

$f: t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$  est définie et continue sur  $[0; +\infty[$  et  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$  donc  $I$  existe.

Via le changement de variable  $u = 1/t$  :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1 + u^2)^2}$$

d'où

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}$$

puis  $I = \frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 47 :** [énoncé](#)

- (a) Les deux intégrales convergent. Le changement de variable  $u = 1/x$  transforme l'une en l'autre.  
 (b)

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1) dx}{x^3 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty}$$

donc

$$I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

**Exercice 48 :** [énoncé](#)

On a

$$\sqrt{\tan \theta} \underset{\theta = \pi/2 - h}{=} \sqrt{\frac{\sin(\pi/2 - h)}{\cos(\pi/2 - h)}} = \sqrt{\frac{\cos h}{\sin h}} \sim \frac{1}{\sqrt{h}}$$

donc l'intégrale est bien définie.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta \underset{u=\sqrt{\tan \theta}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

après calculs...

**Exercice 49 :** [énoncé]

On procède au changement de variable

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$$

avec  $t \in [-\pi/2; \pi/2]$ .

On obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$$

(avec convergence de l'intégrale) et

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}$$

**Exercice 50 :** [énoncé]

La fonction  $x \mapsto x^n (\ln x)^n$  est définie et continue sur  $]0; 1]$  et y est intégrable car on peut la prolonger par continuité en 0 sachant  $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . L'intégrale

définissant  $I_n$  est donc convergente.

Soit  $\varepsilon \in ]0; 1]$ . Par intégration par parties

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^n \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{n}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$I_n = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

la nouvelle intégrale étant convergente par le même argument qu'au dessus.

En répétant l'opération, on obtient

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} \int_0^1 x^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

On peut aussi procéder au calcul par le changement de variable  $u = -\ln(x^{n+1})$   $\mathcal{C}^1$  strictement monotone

$$I_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

**Exercice 51 :** [énoncé]

$f: x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  donc  $f$  est intégrable et  $I_n = \int_0^{+\infty} f(x) dx$  existe.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = I_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx \underset{\text{ipp}}{=} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n} I_{n-1}$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.

On obtient ainsi

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

Puisque  $I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ ,

$$I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots 2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi$$

**Exercice 52 :** [énoncé]

(a) La fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow 0^+$ ,  $\sqrt{t}f(t) \rightarrow 0$  et quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $t^{3/2}f(t) \rightarrow 0$  donc  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$  et  $[1; +\infty[$ .

(b) Par une intégration par parties où l'on choisit judicieusement une primitive s'annulant en 0

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = \left[ \ln t \left( 1 - \frac{1}{1+t} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = -\ln 2$$

Par le changement de variable  $u = 1/t$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = -\int_0^1 \frac{\ln u}{(u+1)^2} du = \ln 2$$

**Exercice 53 :** [énoncé]

Sous réserve de convergence, nous calculons l'intégrale en procédant par intégration par parties en intégrant  $\frac{1}{x^2}$  en  $\frac{x-1}{x}$  qui s'annule en 1.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = \left[ \ln(1-x^2) \frac{x-1}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{(1-x^2)} \frac{x-1}{x} dx$$

L'intégration par parties est licite car le crochet converge. L'intégrale en second membre est faussement généralisée car se résume à

$$\int_0^1 -\frac{dx}{1+x}$$

On en déduit que l'intégrale initiale converge et

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = -\int_0^1 \frac{2}{(1+x)} dx = -2 \ln 2$$

**Exercice 54 :** [énoncé]

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont définies et continues par morceaux sur  $[1; +\infty[$ . Puisque l'intégrale de  $f$  sur  $[1; +\infty[$  converge, on a

$$u(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

et donc  $u$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

Puisque  $1/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on a

$$v(x) = o(f(x)) \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

et donc  $v$  aussi est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

Par intégration par parties

$$\int_1^A u(x) dx = \left[ -\frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \right]_1^A + \int_1^A v(x) dx$$

et donc  $A \rightarrow +\infty$  on obtient

$$\int_1^{+\infty} u(x) dx = \int_1^{+\infty} v(x) dx$$

**Exercice 55 :** [énoncé]

Quand  $t \rightarrow 0^+$ ,

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t} \rightarrow f'(0)$$

La fonction  $t \mapsto f(t)/t$  peut donc se prolonger par continuité en 0 ce qui permet d'assurer l'existence des intégrales écrites.

Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^x \left( \frac{f(t)}{t} \right)^2 dt = \left[ -\frac{(f(t))^2}{t} \right]_\varepsilon^x + 2 \int_\varepsilon^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , on obtient

$$\int_0^x \left( \frac{f(t)}{t} \right)^2 dt = -\frac{(f(x))^2}{x} + 2 \int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt$$

et l'inégalité affirmée est désormais évidente.

**Exercice 56 :** [énoncé]

- (a)  $x \mapsto u'(x)$ ,  $x \mapsto u(x)$  et  $x \mapsto xu(x)$  sont de carrés intégrables donc  $x \mapsto (xu(x)^2)' = u(x)^2 + xu'(x)u(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Par suite  $x \mapsto xu(x)^2$  admet des limites finies quand  $x \rightarrow \pm\infty$ . Or cette fonction est elle-même intégrable sur  $\mathbb{R}$  donc ses limites en  $\pm\infty$  ne peuvent qu'être nulles.
- (b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x)^2 dx \geq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} xu'(x)u(x) dx \right)^2$$

Or par intégration par parties

$$\int_{-n}^n xu'(x)u(x) dx = [xu^2(x)]_{-n}^n - \int_{-n}^n u(x)(u(x) + xu'(x)) dx \text{ donc}$$

Ainsi

$$\int_{-n}^n xu'(x)u(x) dx = \frac{1}{2} [xu^2(x)]_{-n}^n - \frac{1}{2} \int_{-n}^n u^2(x) dx$$

puis à la limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xu'(x)u(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x) dx$$

et enfin l'inégalité voulue.

**Exercice 57 : [énoncé]**

La fonction  $f: t \mapsto \ln(1 + t^2/t^2)$  est définie et continue sur  $I = ]0; +\infty[$ .

On a

$$\sqrt{t}f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Par intégration par parties justifiée par la convergence des deux intégrales écrites

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = [t \ln(1 + 1/t^2)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{1 + t^2} = \pi$$

**Exercice 58 : [énoncé]**

On réalise l'intégration par parties avec

$$u(t) = \ln t \text{ et } v(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et le produit  $uv$  converge aux bornes d'intégration  $0$  et  $+\infty$  :

$$u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } u(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Sous réserve d'existence, la formule d'intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)(e^{-t} - 2e^{-2t}) dt$$

La fonction  $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  car négligeable devant  $1/t^2$  en  $+\infty$  et devant  $1/\sqrt{t}$  en  $0$ . De même, la fonction  $t \mapsto \ln(t)e^{-2t}$  est intégrable. On peut donc écrire la séparation

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)(e^{-t} - 2e^{-2t}) dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt - 2 \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-2t} dt$$

Cette identité justifie l'existence de l'intégrale en premier membre et donc aussi (en vertu du théorème d'intégration par parties) l'existence de l'intégrale initiale.

Par le changement de variable  $u = 2t$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-2t} dt &= \int_0^{+\infty} \ln(u/2)e^{-u} du \\ &= \int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u} du - \ln 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u} du}_{=1} \end{aligned}$$

On en déduit par simplification

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)(e^{-t} - 2e^{-2t}) dt = \ln 2$$

**Exercice 59 : [énoncé]**

Notons que l'intégrale  $I_n$  est bien définie.

(a) On découpe l'intégrale en deux

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

On réalise le changement de variable  $x = 1/t$  sur la deuxième intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} + \int_1^0 -\frac{t^{n-2} dt}{1+t^n}$$

puis on combine les deux intégrales pour obtenir

$$I_n = \int_0^1 \frac{1+t^{n-2}}{1+t^n} dt$$

(b) On peut écrire

$$I_n = 1 + \int_0^1 \frac{t^{n-2} - t^n}{(1+t^n)} dt$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 t \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt$$

ce qui donne par intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \frac{1}{n} \ln 2 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

avec

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{1+t^n} dt = \frac{1}{n} \int_{]0;1]} \frac{1}{t} \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt$$

avec par intégration par parties

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t} \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt = \left[ \frac{\ln(1+t^n)}{t} \right]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , on obtient

$$\int_{]0;1]} \frac{1}{t} \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt = \ln 2 + \int_{]0;1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt$$

où, sachant  $\ln(1+u) \leq u$ ,

$$0 \leq \int_{]0;1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt \leq \int_0^1 t^{n-2} dt = \frac{1}{n-1} \rightarrow 0$$

On en déduit

$$I_n = 1 + o(1/n)$$

**Exercice 60 : [énoncé]**

La fonction  $f: x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .

Puisque  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n+3}}$ , la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  et l'intégrale définissant  $J_n$  converge.

(a) Via une décomposition en éléments simples, on obtient

$$J_0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(b) On écrit

$$J_n - J_{n+1} = \int_0^{+\infty} x \times \frac{x^2}{(1+x^3)^{n+2}} dx.$$

On opère une intégration par parties avec convergence du crocher pour obtenir

$$J_{n+1} = \frac{3n+2}{3n+3} J_n.$$

(c) On pose  $v_n = \sqrt[3]{n} J_n$ .

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \ln \left( 1 - \frac{1}{3n+3} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série de terme général  $\ln v_{n+1} - \ln v_n$  converge et donc la suite de terme général  $\ln v_n$  converge vers un certain réel  $\ell$ . En posant  $A = e^{\ell} > 0$ , on obtient  $v_n \rightarrow A$  donc  $J_n \sim \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$ .

**Exercice 61 : [énoncé]**

(a) La fonction

$$f: t \mapsto \frac{t - [t]}{t(t+n)}$$

est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow 0^+$ ,

$$f(t) = \frac{t}{t(t+n)} = \frac{1}{t+n} \rightarrow \frac{1}{n}$$

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$f(t) = \frac{O(1)}{t(t+n)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On en déduit que  $f$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

(b) On remarque que

$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+n} \right)$$

et on en déduit

$$\int_0^A \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt = \frac{1}{n} \int_0^A \frac{t - [t]}{t} - \frac{t - [t]}{t+n} dt$$

Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient

$$\int_0^A \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt = \frac{1}{n} \left( \int_0^A \frac{t - [t]}{t} dt - \int_n^{A+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

Enfin par la relation de Chasles

$$\int_0^A \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt = \frac{1}{n} \left( \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_A^{A+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

Puisque

$$0 \leq \int_A^{A+n} \frac{t - [t]}{t} dt \leq \frac{1}{A} \int_A^{A+n} t - [t] dt \leq \frac{n}{A}$$

on obtient quand  $A \rightarrow +\infty$

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt$$

(c)

$$v_n = \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt$$

Par suite

$$v_n - v_{n-1} = \int_{n-1}^n \frac{t - [t]}{t} dt = \int_0^1 \frac{u}{u + (n-1)} du$$

puis

$$v_n - v_{n-1} = 1 - (n-1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)$$

Par développement limité, on obtient

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série de terme général

$$v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(d) Posons

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} \right)$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \left( v_k - v_{k-1} - \frac{1}{2k} \right) = S + o(1)$$

donc

$$v_n - v_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = S + o(1)$$

Sachant

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on obtient

$$v_n \sim \frac{\ln n}{2}$$

puis

$$u_n \sim \frac{\ln n}{2n}$$

**Exercice 62 : [énoncé]**

(a) 0, cf. lemme de Lebesgue.

(b) Posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$$

Cette intégrale existe car un prolongement par continuité est possible en 0.

On observe

$$\sin(2(n+1)t) - \sin(2nt) = 2 \sin t \cos(2n+1)t$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} 2 \cos((2n+1)t) \cos t dt = 0$$

La suite  $(I_n)$  est constante égale à

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

(c) On a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) f(t) dt$$

avec

$$f(t) = \cot t - \frac{1}{t}$$

qui se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi/2]$ .

Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

donc la convergence de l'intégrale de Dirichlet étant supposée connue, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

(d) On a

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi/2} \ln(t) \cos(nt) dt$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(t) \cos(nt) dt = \frac{\ln(\pi/2) \sin(n\pi/2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$$

La fonction  $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; \pi/2]$ .

Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) \sin(n\pi/2) - \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)' \sin(nt) dt$$

La fonction  $t \mapsto \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi/2]$ , on a

$$\frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)' \sin(nt) dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt \sim \frac{(\ln 2) \sin(n\pi/2) - \pi}{2n}$$

**Exercice 63 :** [énoncé]

La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

Elle se prolonge par continuité par la valeur 1 en 0 et est donc intégrable sur  $]0; 1]$ .

Par une intégration par parties

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Or il y a convergence des deux termes en second membre quand  $A \rightarrow +\infty$  et donc il y a convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Finalement, l'intégrale étudiée converge.

**Exercice 64 :** [énoncé]

Commençons par étudier la convergence de la suite  $(S_n)$  de terme général

$$S_n = \int_0^{n\pi} f(t) \sin(t) dt$$

Par la relation de Chasles, on peut découper l'intégrale

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) \sin(t) dt$$

Par translation de la variable

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) \sin(t) dt = \int_0^\pi f(t+k\pi) \sin(t+k\pi) dt = (-1)^k v_k$$

$$v_k = \int_0^\pi f(t+k\pi) \sin(t) dt$$

Puisque  $f$  est positive, la suite  $(v_k)$  est à termes positifs. Puisque  $f$  est décroissante, la suite  $(v_k)$  est décroissante. Enfin, puisque  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$  et puisque

$$0 \leq v_k \leq f(k\pi)\pi$$

la suite  $(v_n)$  tend vers 0.

Par le critère spécial des séries alternées, on obtient que la série de terme général  $(-1)^k v_k$  converge, autrement dit, que la suite  $(S_n)$  converge. Notons  $S$  sa limite.

Soit  $X \geq 0$ . En notant  $n_X$  la partie entière de  $X/\pi$ , on peut écrire

$$\int_0^X f(t) \sin(t) dt = S_{n_X} + \int_{n_X\pi}^X f(t) dt$$

avec

$$0 \leq \int_{n_X\pi}^X f(t) dt \leq \int_{n_X\pi}^X f(n_X\pi) dt = f(n_X\pi)(X - n_X\pi) \leq f(n_X\pi)\pi$$

Quand  $X \rightarrow +\infty$ , on a  $n_X \rightarrow +\infty$ ,  $S_{n_X} \rightarrow S$  et par l'encadrement qui précède

$$\int_{n_X\pi}^X f(t) dt \rightarrow 0$$

On en déduit

$$\int_0^X f(t) \sin(t) dt \rightarrow S$$



**Exercice 65 : [énoncé]**

Par intégration par parties

$$\int_0^x \sin(e^t) dt = \int_0^x e^t \sin(e^t) e^{-t} dt = [-\cos(e^t) e^{-t}]_0^x - \int_0^x \cos(e^t) e^{-t} dt$$

D'une part

$$\cos(e^x) e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et d'autre part  $t \mapsto \cos(e^t) e^{-t}$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$  car

$$t^2 \cos(e^t) e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$  converge.

**Exercice 66 : [énoncé]**

Par un argument de parité, il suffit d'établir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2t} e^{it^2} dt$$

Formellement

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{2t} e^{it^2} dt = \left[ \frac{e^{it^2} - 1}{2it} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} dt$$

où la primitive de  $2te^{it^2}$  a été choisie de sorte de s'annuler en 0.

Puisque les deux termes en second membre sont convergents, le théorème d'intégration par parties s'applique et assure la convergence de

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$$

**Exercice 67 : [énoncé]**

Procédons au changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $t = \sqrt{\lambda x}$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} e^{it^2} dt$$

Or par le changement de variable  $u = t^2$

$$\int_0^A e^{it^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{A^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

puis par intégration par parties

$$\int_0^A e^{it^2} dt = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{e^{iu} - 1}{i\sqrt{u}} \right]_0^A + \frac{1}{2} \int_0^{A^2} \frac{e^{iu} - 1}{iu^{3/2}} du \right)$$

et donc

$$\int_0^A e^{it^2} dt = \frac{i}{4} \int_0^{A^2} \frac{1 - e^{iu}}{u^{3/2}} du$$

L'intégrale en second membre converge donc

$$\int_0^A e^{it^2} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} C$$

De plus, la partie imaginaire de  $C$  est strictement positive en vertu de l'expression intégrale précédente, donc

$$f(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$$

Le calcul explicite de  $C$  est difficile, cf. intégrale de Fresnel.

**Exercice 68 : [énoncé]**

(a) Pour  $x > a > 0$

$$\int_a^x e^{it^2} dt = \int_a^x \frac{2it}{2it} e^{it^2} dt = \left[ \frac{e^{it^2} - 1}{2it} \right]_a^x + \int_a^x \frac{e^{it^2} - 1}{2it^2} dt$$

À la limite quand  $a \rightarrow 0$ ,

$$\int_a^x e^{it^2} dt \rightarrow \int_0^x e^{it^2} dt, \frac{e^{ia^2} - 1}{2ia} \sim \frac{a}{2} \rightarrow 0$$

et

$$\int_a^x \frac{e^{it^2} - 1}{2it^2} dt \rightarrow \int_0^x \frac{e^{it^2} - 1}{2it^2} dt$$

car cette dernière intégrale converge.

Ainsi

$$f(x) = \frac{e^{ix^2} - 1}{2ix} + \frac{1}{2i} \int_0^x \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} dt$$

Puisque

$$\left| \frac{e^{ix^2} - 1}{2ix} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ et } \int_0^x \frac{e^{it^2} - 1}{2it^2} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{2it^2} dt$$

car cette dernière intégrale converge.

Par suite

$$f(x) \rightarrow \lambda = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{2it^2} dt$$

(b)

$$g(x) = \lambda - f(x) = \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} dt - \frac{e^{ix^2} - 1}{2ix}$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt - \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt - \frac{e^{ix^2} - 1}{2ix}$$

car ces deux dernières intégrales sont bien définies. Par suite

$$g(x) = \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt - \frac{e^{ix^2}}{2ix}$$

(c) Par intégration par parties généralisée

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{te^{it^2}}{t^3} dt = \left[ \frac{e^{it^2}}{2it^3} \right]_x^{+\infty} + \frac{3}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^4} dt$$

Par suite

$$\left| \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt \right| = \left| -\frac{e^{ix^2}}{2ix^3} + \frac{3}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^4} dt \right| \leq \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{2} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{x^3}$$

Donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

**Exercice 69 :** [\[énoncé\]](#)

Soit  $F$  la primitive de  $f$  s'annulant en 0. Par hypothèse

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Par intégration par parties, on peut écrire

$$\frac{1}{x} \int_0^x tf(t) dt = F(x) - \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt$$

Or

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt - \ell \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |F(t) - \ell| dt$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall t \geq A, |F(t) - \ell| \leq \varepsilon$$

Par continuité sur  $[0; A]$ ,  $|F(t) - \ell|$  est majorée par un certain  $M > 0$ .

Pour  $x \geq \max(A, AM/\varepsilon)$  on a

$$\frac{1}{x} \int_0^x |F(t) - \ell| dt = \frac{1}{x} \int_0^A |F(t) - \ell| dt + \frac{1}{x} \int_A^x |F(t) - \ell| dt \leq 2\varepsilon$$

Par conséquent

$$\frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x tf(t) dt = 0$$

Notons que sans l'hypothèse d'intégrabilité de  $f$ , on ne peut pas exploiter le théorème de convergence dominée.

**Exercice 70 :** [\[énoncé\]](#)

Supposons la convergence de l'intégrale de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .

Puisque  $f$  est continue, on peut introduire une primitive  $F$  de  $f$  et celle-ci admet donc une limite finie en  $+\infty$ . Par intégration par parties

$$\int_1^A \frac{f(t)}{t} dt = \left[ \frac{F(t)}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{F(t)}{t^2} dt$$

Or  $F(A)/A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$  et  $t \mapsto F(t)/t^2$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  car  $F$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ .

On en déduit donc par opérations la convergence de l'intégrale de  $t \mapsto f(t)/t$  sur  $[1; +\infty[$ .

**Exercice 71 :** [\[énoncé\]](#)

Soit  $F$  une primitive de la fonction continue  $f$  sur  $[0; +\infty[$ . Formellement

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha + 1} dt = \left[ \frac{F(t)}{t^\alpha + 1} \right]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{F(t)t^{\alpha-1}}{(t^\alpha + 1)^2} dt$$

Supposons la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ . La primitive  $F$  est alors convergente en  $+\infty$  et donc dans l'intégration par parties précédente, le crochet est convergent en  $+\infty$ .

De plus, la fonction  $F$  est bornée car continue sur  $[0; +\infty[$  et convergente en  $+\infty$ . Par suite, quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{F(t)t^{\alpha-1}}{(t^\alpha + 1)^2} = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$$

et puisque  $\alpha > 0$ , on a la convergence de la deuxième intégrale dans la formule d'intégration par parties précédente.

Par le théorème d'intégration par parties, on peut affirmer que  $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha} dt$  converge.

**Exercice 72 : [énoncé]**

Posons

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

Par intégration par parties

$$\int_a^x f(t)g(t) dt = [f(t)G(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)G(t) dt$$

D'une part

$$[f(t)G(t)] = f(x)G(x) - f(a)G(a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

car  $G$  est bornée et  $f$  de limite nulle en  $+\infty$ .

D'autre part, il y a convergence de l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t) dt$ . En effet

$$\int_a^x |f'(t)G(t)| dt = \int_a^x -f'(t)|G(t)| dt \leq \int_a^x -f'(t)M dt = (f(a) - f(x))M$$

Ainsi

$$\int_a^x |f'(t)G(t)| dt \leq f(a)M$$

Ses intégrales partielles étant majorées, il y a convergence de  $\int_a^{+\infty} |f'(t)G(t)| dt$ .

Ainsi  $f'G$  est intégrable sur  $[a; +\infty[$ . On peut alors conclure

$$\int_a^x f(t)g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(t)G(t) dt$$

**Exercice 73 : [énoncé]**

(a) Pour  $a \leq 0$ , l'intégrale n'est pas définie. Pour  $a > 0$ ,  $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ , par suite

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$  n'est définie que pour  $a > 1$ . Finalement  $f$  est définie sur  $]1; +\infty[$ .

(b) Si  $1 < a \leq b$  alors

$$\forall t \geq 1, \frac{1}{t^b + 1} \leq \frac{1}{t^a + 1}$$

donc  $f(b) \leq f(a)$ . Ainsi  $f$  est décroissante.

$$0 \leq f(a) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{1-a} \left[ \frac{1}{t^{a-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{a-1} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$$

**Exercice 74 : [énoncé]**

(a)  $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$  et  $t^{x-1}e^{-t} = O_{+\infty}(1/t^2)$  la fonction  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  et par suite  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$  est bien définie pour  $x > 0$ .

(b) Pour  $x > 1$ , les deux intégrales étant définies :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt = [-t^{x-1}e^{-t}]_0^{+\infty} + (x-1) \int_0^{+\infty} t^{x-2}e^{-t} dt$$

Ainsi

$$\forall x > 1, \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Sachant

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}] = 1.$$

on obtient par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

**Exercice 75 : [énoncé]**

(a) La fonction  $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$  est définie et continue sur  $]0; 1[$  et  $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ .

Par équivalence de fonctions positives, l'intégrale définissant  $f(x)$  existe si, et seulement si,  $x > 0$ .

(b) Pour  $x \leq y$ , on a

$$\forall t \in ]0; 1], \frac{t^{x-1}}{1+t} \geq \frac{t^{y-1}}{1+t}$$

puis en intégrant  $f(x) \geq f(y)$ .

La fonction  $f$  est donc décroissante.

(c) On a

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

(d) Puisque  $f$  est décroissante et positive,  $f$  converge en  $+\infty$ . Posons  $\ell$  sa limite.

En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, on obtient  $2\ell = 0$  donc

$\ell = 0$ .

Par décroissance

$$f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x)$$

donc

$$\frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

(e) c) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$0 \leq f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1} \leq 1$$

donc

$$f(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} O(1) = o(1/x)$$

et par suite

$$f(x) = 1/x - f(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 1/x \rightarrow +\infty$$

**Exercice 76 : [énoncé]**

(a) Par intégration par parties,

$$\left| \int_0^A \varphi(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(A)|}{x} + \frac{1}{x} \int_0^A |\varphi'(t)| dt$$

qui permet de conclure.

(b) Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(t)| dt \leq \varepsilon$$

car  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus, pour  $x$  assez grand,

$$\left| \int_0^A \varphi(t) \cos(xt) dt \right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left| \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt \right| \leq 2\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

**Exercice 77 : [énoncé]**

(a) Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-t}/t = O(e^{-t})$  donc  $t \mapsto e^{-t}/t$  est intégrable sur tout  $[x; +\infty[ \subset ]0; +\infty[$ .

(b)

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = F(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $F'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$ .

(c) Quand  $x \rightarrow +\infty$

$$0 \leq xF(x) = \int_x^{+\infty} \frac{xe^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \int_1^{+\infty} e^{-t} dt - \int_1^x e^{-t} dt \rightarrow 0$$

Quand  $x \rightarrow 0$

$$xF(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = x \left( \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$$

donc

$$0 \leq xF(x) \leq x(F(1) + \int_x^1 \frac{1}{t} dt) \leq xF(1) + x \ln x \rightarrow 0$$

(d) Par intégration par parties formelle

$$\int_0^{+\infty} F(x) dx = [xF(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences et finalement

$$\int_0^{+\infty} F(t) dt = 1$$

**Exercice 78 : [énoncé]**

- (a) La fonction  $t \mapsto \sin(t)/t$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ . On peut la prolonger par continuité en 0 en y posant la valeur 1. Par intégration par parties où l'on intègre l'expression  $\sin t$  en  $1 - \cos t$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$\frac{1 - \cos x}{x} \rightarrow 0$$

et

$$\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

cette dernière intégrale étant convergente car la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et est dominée par la fonction intégrable  $t \mapsto 1/t^2$  en  $+\infty$ .

- (b) Soit  $F$  la primitive s'annulant en 0 du prolongement par continuité de  $t \mapsto \sin(t)/t$ . On a

$$f(x) = \lim_{+\infty} F - F(x)$$

Puisque la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $f$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = -F'(x) = -\frac{\sin x}{x}$$

- (c) Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) dt = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t) dt = xf(x) + \int_0^x \sin t dt$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[ -\frac{\cos t}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

donc

$$xf(x) = \cos x - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

puis

$$\int_0^x f(t) dt = 1 - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Mais par intégration par parties on établit encore

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = \left[ \frac{\sin t}{t^2} \right]_x^{+\infty} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt$$

avec

$$\left| \int_x^{+\infty} 2 \frac{\sin t}{t^3} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{2 dt}{t^3} = \frac{1}{x^2}$$

ce qui permet d'affirmer

$$x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$$

**Exercice 79 : [énoncé]**

- (a)

$$f: t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3 - 1}} = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t^2 + t + 1)}}$$

est définie et continue sur  $]1; x]$  et

$$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{t-1}}$$

donc  $F(x)$  existe.

$F$  est primitive de la fonction continue  $f$  sur  $]1; +\infty[$  donc  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $F'(x) = f(x)$ .

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $F$  est finalement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et sur  $]1; +\infty[$

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

- (b)  $F$  est continue en 1 et  $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$ . Tangente verticale en 1.

- (c)  $\sqrt{t^3 - 1} \leq t^{3/2}$  donc

$$F(x) \geq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc  $F(x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$ .

- (d)  $F$  est continue et strictement croissante sur  $[1; +\infty[$  donc  $F$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur  $]0; +\infty[$ .  
 $F$  réalise une bijection de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $]1; +\infty[$  sur  $]0; +\infty[$  avec  $F'(x) \neq 0$  donc  $F^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$ .

$$(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}} = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

donc  $F^{-1}$  est solution de l'équation différentielle considérée.

- (e)  $F^{-1}$  est continue en 0 et  $F^{-1}(0) = 1$ . En vertu de la relation

$$(F^{-1})' = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

on obtient

$$(F^{-1})'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$F^{-1}$  est donc dérivable en 0 et  $(F^{-1})'(0) = 0$

**Exercice 80 :** [\[énoncé\]](#)

- (a) Soient  $x, y > 0$ .  
 La fonction

$$f: t \mapsto \frac{t - [t]}{t(t+x)}$$

est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[ \supset ]0; y]$  et quand  $t \rightarrow 0$ ,

$$f(t) = \frac{t}{t(t+x)} = \frac{1}{t+x} \rightarrow \frac{1}{x}$$

donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

Par suite l'intégrale définissant  $G(x, y)$  existe bien.

- (b) Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$f(t) = \frac{O(1)}{t(t+x)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc  $f$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

Par suite  $G(x, y)$  converge quand  $y \rightarrow +\infty$  vers

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t - [t]}{t(t+x)} dt$$

- (c) On remarque que

$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+n} \right)$$

et on en déduit

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \int_0^y \frac{t - [t]}{t} - \frac{t - [t]}{t+n} dt$$

Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left( \int_0^y \frac{t - [t]}{t} dt - \int_n^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

Enfin par la relation de Chasles

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left( \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

- (d) Puisque

$$0 \leq \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \leq \frac{1}{y} \int_y^{y+n} t - [t] dt \leq \frac{n}{y}$$

on obtient quand  $y \rightarrow +\infty$

$$G(n) = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt$$

et on a alors

$$H(n) = \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt$$

Par suite

$$H(n) - H(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{t - [t]}{t} dt = \int_0^1 \frac{u}{u + (n-1)} du$$

puis

$$H(n) - H(n-1) = 1 - (n-1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)$$

Par développement limité, on obtient

$$H(n) - H(n-1) = \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série de terme général

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Posons

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} \right)$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \left( H(k) - H(k-1) - \frac{1}{2k} \right) = S + o(1)$$

donc

$$H(n) - H(1) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = S + o(1)$$

Sachant

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on obtient

$$H(n) \sim \frac{1}{2} \ln n$$

puis

$$G(n) \sim \frac{\ln n}{2n}$$

**Exercice 81 : [énoncé]**

L'intégrale étudiée est convergente puisque  $t^2 e^{-t}/t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Procédons à une intégration par parties avec  $u(t) = -e^{-t}$  et  $v(t) = 1/t$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et le produit  $uv$  converge en  $+\infty$ . On a donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

Or

$$\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$$

donc, par intégration de relation de comparaison

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right)$$

et donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

**Exercice 82 : [énoncé]**

Par intégration par parties

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \left[ \frac{e^t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

et en répétant celle-ci

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \left[ \frac{e^t}{t} + \frac{e^t}{t^2} \right]_1^x + \int_1^x 2 \frac{e^t}{t^3} dt$$

Or, toujours par intégration par parties

$$\int_1^x 2 \frac{e^t}{t^3} dt = \left[ \frac{2e^t}{t^3} \right]_1^x + \int_1^x \frac{6e^t}{t^4} dt$$

Mais

$$\frac{e^t}{t^4} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^t}{t^3}\right) \text{ et } t \mapsto \frac{e^t}{t} \text{ est positive non intégrable sur } [1; +\infty[$$

donc, par intégration de relation de comparaison

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt = o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt\right)$$

Ceci donne

$$\int_1^x 2 \frac{e^t}{t^3} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{2e^x}{x^3} - 2e + o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt\right) \sim \frac{2e^x}{x^3}$$

puis, dans le calcul initial

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{2e^x}{x^3}\right)$$

en ayant intégré le terme constant dans le terme négligeable.

**Exercice 83 : [énoncé]**

Puisque  $f$  est continue en 0, on peut écrire

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon \xrightarrow{0} 0$$

On a alors

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt$$

D'une part

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

et d'autre part

$$\left| \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right| \leq \max_{t \in [ax; bx]} |\varepsilon(t)| \ln \frac{b}{a} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

On peut conclure

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

#### Exercice 84 : [énoncé](#)

Puisque  $f$  est positive et non intégrable, on sait

$$\int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $A \geq 0$  tel que

$$\forall x \geq A, |f'(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$$

et alors

$$\forall x \geq A, f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t) dt \leq f(A) + \varepsilon \int_0^x f(t) dt$$

Puisque  $f(A)$  est une constante et  $\int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , il existe  $A' \geq 0$  tel que

$$\forall x \geq A', f(A) \leq \varepsilon \int_0^x f(t) dt$$

Pour  $x \geq \max(A, A')$ , on obtient

$$0 \leq f(x) \leq 2\varepsilon \int_0^x f(t) dt$$

et on peut alors conclure.