

Intégrales dépendant d'un paramètre

Convergence dominée

Exercice 1 [00921] [Correction]

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$(a) u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx \quad (b) v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

Exercice 2 [03800] [Correction]

Étudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx.$$

Exercice 3 [00746] [Correction]

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$(a) u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} dx \quad (b) u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n dx}{x^{n+2}+1} \quad (c) u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n dx}{x^{2n}+1}$$

Exercice 4 [01771] [Correction]

Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2} dt$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 5 [00926] [Correction]

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt.$$

Exercice 6 [00927] [Correction]

Établir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Exercice 7 [02568] [Correction]

Montrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

est définie pour $n \geq 1$.

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 8 [03807] [Correction]

Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$$

est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Montrer que la suite de terme général $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 9 [02567] [Correction]

Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue.

On suppose que la fonction f converge en $+\infty$ vers une limite finie ℓ .

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt.$$

Exercice 10 [00150] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt} dt.$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 11 [00924] [Correction]Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx.$$

Exercice 12 [03650] [Correction]Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 intégrable ainsi que sa dérivée.(a) Déterminer pour $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt) dt.$$

(b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 13 [04079] [Correction]

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

Exercice 14 [00922] [Correction]

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

Exercice 15 [00923] [Correction]

Déterminer un équivalent de

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx.$$

Exercice 16 [02982] [Correction]

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} dx.$$

Exercice 17 [02862] [Correction]

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx.$$

Exercice 18 [03159] [Correction]Soit F une application continue décroissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0 < h < \delta$.

(a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n = \int_0^1 F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt.$$

(b) On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right).$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.**Exercice 19** [02392] [Correction]Soit f une application réelle de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$ avec $0 < a < 1 < b$ et $f(1) \neq 0$. Soit (f_n) la suite de fonctions telle que

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}.$$

(a) Déterminer la limite simple de (f_n) .

(b) Établir l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^1 f(t) dt.$$

(c) Montrer que

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt \sim \frac{\ln 2}{n} f(1).$$

Exercice 20 [02517] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}.$$

Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} et nulle en dehors d'un segment $[a; b]$.
Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x) dx = g(0).$$

Exercice 21 [04143] [Correction]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Exercice 22 [04158] [Correction]

- (a) Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle soit strictement croissante.
- (b) Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue dont l'ensemble des zéros est d'intérieur vide et $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe une unique subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a; b]$ vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{1}{n} \int_a^b f(x) dx.$$

- (c) Soit $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i).$$

Exercice 23 [04159] [Correction]

Soit a et b strictement positifs. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

- (a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite, notée $M(a, b)$.

- (b) On pose

$$T(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}}.$$

Montrer

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a, b).$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$.

- (c) Montrer

$$T(a, b) = \frac{\pi}{M(a, b)}.$$

Exercice 24 [04945] [Correction]

- (a) Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

- (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge et trouver sa limite.
- (c) Étudier la convergence de $\sum (-1)^{n-1} I_n$ et calculer son éventuelle somme.

Exercice 25 [05056] [Correction]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Déterminer la limite de (I_n) .
- (b) On suppose $f(1) \neq 0$. Donner un équivalent simple de I_n .
- (c) On suppose $f(1) = 0$ et f dérivable en 1. Montrer que la série de terme général I_n converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

Intégration terme à terme

Exercice 26 [00928] [Correction]

Montrer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 27 [03781] [Correction]

Prouver l'égalité

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 28 [00929] [Correction]

Établir que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 29 [02864] [Correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt.$$

Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

Exercice 30 [00931] [Correction]

(a) Établir

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt.$$

(b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(c) Calculer cette somme sachant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 31 [00930] [Correction]

(a) Établir

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

(b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Cette valeur est appelée constante de Catalan, elle vaut approximativement 0,916.

Exercice 32 [02615] [Correction]

Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(m) = \int_0^1 x^n (\ln x)^m dx.$$

(a) Calculer $I_n(n)$.

(b) En déduire

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

Exercice 33 [02869] [Correction]

Montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t} dt.$$

Exercice 34 [02570] [Correction]

Soient p et k 2 entiers naturels, non nul. Soit $f_{p,k}: x \mapsto x^p (\ln x)^k$.

(a) Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0; 1]$. Soit

$$K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k dx.$$

(b) Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.

(c) Exprimer $J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n dx$ en fonction de n .

(d) On pose $I = \int_0^1 x^x dx$. Montrer

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 35 [00934] [Correction]

Établir que pour $p \geq 2$,

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x} dx = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}.$$

Exercice 36 [00933] [Correction]

Établir

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 37 [03790] [Correction]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f_n(x) = x^n(1 - \sqrt{x}).$$

(a) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

(b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$

Exercice 38 [03268] [Correction]

Montrer

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(n!)^2}.$$

Exercice 39 [02439] [Correction]

Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt.$$

Exercice 40 [03214] [Correction]

Montrer que

$$\forall a, b > 0, \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}.$$

Exercice 41 [00935] [Correction]

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Exercice 42 [00939] [Correction]

Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n dt.$$

(a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.

(b) Plus généralement, nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.

(c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2, 3$.

Exercice 43 [02807] [Correction]

(a) Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer l'existence de

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{\binom{2n}{n}}.$$

- (b) Calculer S_0 et S_{-1} .
 (c) Si $p \in \mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de S_p .

Exercice 44 [02641] [Correction]

n désigne un entier naturel non nul.

- (a) Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

est définie.

- (b) Soit $a \geq 0$. Calculer

$$\int_0^a \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

puis de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx.$$

- (c) Soit $a \geq 0$. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

converge uniformément sur $[0; a]$, puis que

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

- (d) En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

- (e) En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

est convergente et donner sa valeur.

Comparer avec le résultat obtenu en b). Qu'en conclure ?

Exercice 45 [02438] [Correction]

- (a) Démontrer la convergence de la série de terme général

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

- (b) Comparer

$$a_n \text{ et } n \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt.$$

- (c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1 - te^{-t})^2} dt.$$

Exercice 46 [02445] [Correction]

On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^n} dt$$

pour tout entier $n > 0$.

- (a) Trouver la limite ℓ de (I_n) .
 (b) Donner un équivalent de $(\ell - I_n)$.
 (c) Justifier

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

- (d) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n) .

Exercice 47 [02612] [Correction]

- (a) Déterminer la limite ℓ quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^n} dt.$$

- (b) Donner un équivalent de

$$I_n - \ell.$$

- (c) Justifier

$$\int_0^1 \ln(1 + t^n) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk + 1)}.$$

(d) En déduire un équivalent de

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

et donner un développement asymptotique à trois termes de I_n .

Exercice 48 [02840] [Correction]

(a) Si $(s, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

pour $n \geq 0$? À λ fixé, on note Δ_λ l'ensemble des $s > 0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.

(b) Calculer $\lim_{s \rightarrow \sup \Delta_\lambda} F_\lambda(s)$.

(c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s \rightarrow \inf \Delta_\lambda$.

(d) Si $n \geq 1$, calculer :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy.$$

(e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 49 [02866] [Correction]

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) dt.$$

Exercice 50 [02870] [Correction]

Si $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

Exercice 51 [00118] [Correction]

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) \right)^n dx.$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

(b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 52 [03287] [Correction]

Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos^{2n} t dt.$$

Exercice 53 [02583] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Ensemble de définition de

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n}.$$

(b) Montrer que si $x > 1$, $\sum I_n(x)$ diverge.

(c) Calculer $I_n(2)$ pour $n \geq 1$.

Exercice 54 [01102] [Correction]

(a) Donner les limites éventuelles en $+\infty$ des suites de termes généraux

$$U_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n} \text{ et } V_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

(b) Quelles sont les natures des séries

$$\sum_{n \geq 1} U_n \text{ et } \sum_{n \geq 1} V_n ?.$$

Exercice 55 [02360] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n l'application définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2\operatorname{sh}(x)}{e^{nx}-1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Pour quelle valeurs de α la fonction f_n est-elle continue?
Dans la suite, on prendra cette valeur de α .
- (b) Montrer que f_n est bornée.
- (c) Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ existe pour $n \geq 2$.
- (d) Exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ comme la somme d'une série.

Exercice 56 [02609] [Correction]

Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

- (a) Déterminer la limite de la suite (I_n) .
- (b) Établir que pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n.$$

- (c) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'il y ait convergence de la suite de terme général

$$u_n = \ln(n^\alpha I_n).$$

- (d) En déduire la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} I_n$$

et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

Exercice 57 [04144] [Correction]

- (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$I_k = \int_0^1 t^{k-1} \ln(t) dt.$$

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale.

- (c) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n.$$

Intégration terme à terme par les sommes partielles**Exercice 58** [00936] [Correction]

Montrer que, pour $a > 0$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}.$$

Exercice 59 [00942] [Correction]

Pour tout $\alpha > 0$, établir que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}.$$

Exercice 60 [02863] [Correction]

- (a) Établir pour $a, b > 0$ l'égalité

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}.$$

- (b) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 61 [02437] [Correction]

Montrer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 62 [04155] [Correction]

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} e^{-nt} dt.$$

- (a) Montrer l'existence de l'intégrale définissant S_n .
- (b) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T(a, b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt.$$

Simplifier l'expression de $T(a, b)$.

- (c) Montrer que pour tout naturel n

$$S_0 = p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} + S_n.$$

- (d) Montrer que la suite (S_n) converge vers 0.
- (e) Montrer

$$S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}.$$

Etude de fonctions concrètes

Exercice 63 [00534] [Correction]

- (a) Justifier que l'intégrale suivante est définie pour tout $x > 0$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

- (b) Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.
- (c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.

- (d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 64 [03658] [Correction]

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt.$$

- (a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \geq 0$.
- (b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0; +\infty[$.
- (c) Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 65 [00538] [Correction]

Soit

$$F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

Montrer que F est solution sur \mathbb{R}_+^* de limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Exercice 66 [00537] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

- (a) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
- (b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Exercice 67 [00532] [Correction]

Soit

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} dt.$$

- (a) Calculer $g(0)$ en réalisant le changement de variable $t = 1/u$.
- (b) Étudier les variations de g sur son domaine de définition.

(c) Étudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 68 [00531] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}.$$

- (a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}_+ .
- (b) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.
- (c) Montrer que f est continue et décroissante.
- (d) Déterminer $\lim_{+\infty} f$.

Exercice 69 [00533] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt.$$

- (a) Montrer que f est définie, continue sur \mathbb{R}_+^* . Étudier les variations de f .
- (b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
- (c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 70 [00536] [Correction]

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt.$$

- (a) Montrer que f est définie et positive sur $] -1; +\infty[$.
- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et préciser sa monotonie.
- (c) Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
- (d) On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1).$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- (e) Déterminer un équivalent à f en -1^+ .

Exercice 71 [02880] [Correction]

Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt.$$

Exercice 72 [02875] [Correction]

Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t} dt.$$

- (a) Montrer que f est définie et continue sur Ω .
- (b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1 .
- (c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty$.

Exercice 73 [02871] [Correction]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1} dt.$$

- (a) Définition de f .
- (b) Continuité et dérivabilité de f .
- (c) Écrire $f(1)$ comme somme de série.

Exercice 74 [02882] [Correction]

On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ et trouver des équivalents simples de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 75 [03324] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2-t^2}}.$$

- (a) Montrer que f est définie et continue.

(b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 76 [03621] [[Correction](#)]

(a) Déterminer le domaine de définition de

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt.$$

(b) Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 77 [03760] [[Correction](#)]

(a) Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}.$$

(b) Donner la limite de f en $x = 1$.

Exercice 78 [03736] [[Correction](#)]

On pose

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

- (a) Étudier l'ensemble de définition de f .
- (b) Donner un équivalent de f en 0.
- (c) Montrer que le graphe de f admet une symétrie d'axe $x = 1/2$.
- (d) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
- (e) Calculer la borne inférieure de f .

Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 79 [02556] [[Correction](#)]

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt.$$

(a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

(b) Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de

$$G(x) = F(x) + F(1/x).$$

(c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \frac{\ln t}{t^2 + 2t \operatorname{ch}(\theta) + 1} dt.$$

Exercice 80 [03889] [[Correction](#)]

Soit

$$g: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt.$$

Montrons que g est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$-y' + y = \frac{1}{x}.$$

Exercice 81 [05053] [[Correction](#)]

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

- (a) Montrer que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
- (b) Déterminer un équivalent simple de F en $+\infty$.
- (c) Déterminer un équivalent simple de F en 0^+ .

Calcul de fonction intégrale

Exercice 82 [02874] [[Correction](#)]

Étudier

$$f: x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt.$$

Exercice 83 [03888] [[Correction](#)]

- (a) Montrer que l'application $g: x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t} dt$ est définie sur $] -1; +\infty[$.
- (b) Justifier que g est de classe \mathcal{C}^1 et calculer $g'(x)$.

(c) En déduire une expression simple de $g(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 84 [00546] [Correction]

Soit

$$F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

- (a) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
 (b) Calculer $F'(x)$.
 (c) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 85 [02873] [Correction]

Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

Exercice 86 [00553] [Correction]

Soit

$$F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt \text{ avec } x, y > 0.$$

Pour $y > 0$, montrer que $x \mapsto F(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y).$$

En déduire la valeur de $F(x, y)$.

Exercice 87 [02611] [Correction]

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt) dt.$$

- (a) Quel est le domaine de définition réel I de la fonction F ?
 (b) Justifier que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
 (c) Exprimer $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 88 [03311] [Correction]

Soit a, b deux réels strictement positifs.

(a) Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt.$$

- (b) Justifier que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $F'(x)$.
 (c) Exprimer $F(x)$

Exercice 89 [00548] [Correction]

On pose

$$z: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt$$

et on donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

- (a) Justifier et calculer $z(0)$.
 (b) Montrer que z est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x).$$

(c) En déduire l'expression de $z(x)$.

Exercice 90 [03655] [Correction]

En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{tx} dt.$$

Exercice 91 [03656] [Correction]

(a) Existence de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt.$$

- (b) Calculer $F(x)$ en introduisant une équation différentielle vérifiée par F .
 (c) Calculer $F(x)$ directement par une intégration terme à terme.

Exercice 92 [00555] [Correction]

Ensemble de définition, dérivée et valeur de

$$f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 93 [03660] [Correction]Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)) dt.$$

- (a) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.
 (b) Calculer $F'(x)$ et en déduire un expression de $F(x)$.

Exercice 94 [02881] [Correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x \cos t)}{\cos t} dt.$$

Exercice 95 [00556] [Correction]

Soit

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+x \sin^2 t) dt \text{ sur } [0; +\infty[.$$

- (a) Justifier que F est bien définie et continue.
 (b) Étudier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée via le changement de variable $u = \tan t$.
 (c) Établir que

$$F(x) = \pi(\ln(1 + \sqrt{1+x}) - \ln 2).$$

Exercice 96 [02876] [Correction]

Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 97 [00551] [Correction]Pour $x \in [0; \pi/2]$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t \cos(x) + t^2)}{t} dt.$$

- (a) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi/2]$
 (b) Calculer $F'(x)$ sur $[0; \pi/2]$
 (c) Donner la valeur de $F(0)$ puis celle de $F(x)$ sachant

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 98 [00552] [Correction]Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}.$$

- (a) Justifier l'existence de $I_n(x)$.
 (b) Calculer $I_1(x)$.
 (c) Justifier que $I_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 et exprimer $I'_n(x)$.
 (d) Exprimer $I_n(x)$.

Exercice 99 [03619] [Correction]Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

- (a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
 On admet l'identité

$$\frac{x^2-1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}$$

- valable pour tout x et t dans \mathbb{R}
 (b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

Exercice 100 [04944] [Correction]

Soit

$$F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt.$$

- (a) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer $F'(x)$.
 (b) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 101 [05054] [Correction]Pour un réel $x > -1$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt.$$

- (a) Montrer que la fonction f est bien définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.
 (b) Justifier que la fonction est de classe \mathcal{C}^1 et calculer $f'(x)$ puis $f(x)$.

Étude théorique

Exercice 102 [00540] [Correction]Soit f une application continue de $\mathbb{R} \times [a; b]$ dans \mathbb{R} .Expliquer pourquoi f est uniformément continue sur $S \times [a; b]$ pour tout segment S de \mathbb{R} .En déduire que $F: x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur \mathbb{R} .Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_0^1 e^{xt} dt$. À l'aide de la question précédente, étudier la continuité de g . Retrouver le résultat en calculant $g(x)$.**Exercice 103** [00544] [Correction]Soient $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Montrer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt.$$

Exercice 104 [03756] [Correction]Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant $f(0) = 0$.

Montrer que la fonction

$$g: x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et exprimer ses dérivées successives en 0 en fonction de celles de f .**Exercice 105** [00294] [Correction]Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0.$$

- (a) Montrer qu'on a pour tout $x \in I$

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(t) dt.$$

- (b) En déduire qu'on peut écrire $f(x) = (x-a)^\alpha g(x)$ avec g de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 106 [04195] [Correction]Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et vérifier

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(t)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Transformée de Fourier et intégrales apparentées

Exercice 107 [00547] [Correction]

On pose

$$z: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t^2} dt.$$

- (a) Montrer que z est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et vérifie

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x).$$

- (b) En déduire l'expression de $z(x)$ sachant $z(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 108 [03211] [Correction]

On considère

$$\varphi: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt.$$

- (a) Montrer la définie et la continuité de φ sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et montrer que

$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2} dt.$$

(c) Montrer que pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} du$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

(d) La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 109 [02499] [Correction]

On étudie

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

- (a) Donner le domaine de définition de f .
- (b) Calculer f en formant une équation différentielle.
- (c) Calculer f en exploitant le développement en série entière de la fonction cosinus.

Exercice 110 [00554] [Correction]

Existence et calcul de

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

sachant $g(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Fonction d'Euler

Exercice 111 [00560] [Correction]

Démontrer que la fonction

$$\Gamma: x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 112 [00561] [Correction]

(a) Démontrer que la fonction Γ donnée par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

(b) Démontrer que la fonction Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$.

(c) En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

Exercice 113 [00562] [Correction]

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt.$$

(a) Montrer que pour tout $t \in [0; n]$,

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}.$$

(b) Établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt.$$

(c) Observer que

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du.$$

(d) Conclure que

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Exercice 114 [02635] [Correction]

On rappelle $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- (a) Montrer que cette fonction est définie et indéfiniment dérivable sur $]0; +\infty[$. On étudiera la régularité en se restreignant à $x \in [a; b] \subset]0; +\infty[$.
- (b) Calculer $\Gamma(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- (c) En réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n + 1)$ en

$$\frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy$$

où $f_n(y) = 0$ pour $y \leq -\sqrt{x}$, $0 \leq f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{t} < y \leq 0$ et $0 \leq f_n(y) \leq (1 + y)e^{-y}$ pour $y > 0$ et $t \geq 1$.

- (d) En appliquant le théorème de convergence dominée établir la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}.$$

Exercice 115 [02537] [Correction]

- (a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma: x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- (b) Calculer l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

- (c) Expliquer rapidement pourquoi $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Exercice 116 [00941] [Correction]

Établir que pour tout $x > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

Applications au calcul d'intégrales

Exercice 117 [03654] [Correction]

L'objectif de ce sujet est de calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} dt.$$

- (a) Justifier que la fonction F est bien définie
- (b) Déterminer une équation linéaire d'ordre 1 dont F est solution sur $]0; +\infty[$.
- (c) Calculer $F(0)$ et la limite de F en $+\infty$.
- (d) En déduire la valeur de I .

Exercice 118 [02638] [Correction]

On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

- (a) Montrer que F est continue sur $]0; +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
- (b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $F''(x)$.
- (c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 119 [00542] [Correction]

- (a) Justifier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

- (b) Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt.$$

Déterminer la limite de F en $+\infty$.

- (c) Justifier que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer F'
 (d) En admettant la continuité de F en 0 déterminer la valeur de I .

Exercice 120 [00543] [Correction]

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \geq 0$, on pose $f(x, t) = e^{-xt} \operatorname{sinc} t$ où sinc (lire sinus cardinal) est la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x, t) dt.$$

- (a) Montrer que $u_n(x) = (-1)^n \int_0^\pi g_n(x, u) du$ avec $g_n(x, u)$ qu'on explicitera.
 (b) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .
 (c) On pose $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Justifier que U est continue et expliciter U sous la forme d'une intégrale convergente.
 (d) Montrer que U est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $U'(x)$.
 (e) Expliciter $U(x)$ pour $x > 0$ puis la valeur de

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 121 [02872] [Correction]

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt.$$

- (a) Justifier la définition de $f(x)$.
 (b) Montrer que f est classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
 (c) Calculer $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 (d) Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

Exercice 122 [00550] [Correction]

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

- (a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

- (b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

- (c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{t^2} dt.$$

Exercice 123 [03312] [Correction]

- (a) Montrer que pour tout $x > -1$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt = \frac{\ln 2}{2} \arctan x + \frac{\pi}{8} \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt.$$

- (b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 124 [04177] [Correction]

- (a) Déterminer le domaine de définition réel de

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x \tan \theta)}{\tan \theta} d\theta.$$

- (b) Calculer $F(x)$.

- (c) En déduire les valeurs de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta$$

et de

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé](#)

À chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

- (a) Sur $[0; \pi/4[$, $\tan^n(x) \xrightarrow{CVS} 0$ $|\tan^n(x)| \leq 1 = \varphi(x)$ intégrable sur $[0; \pi/4[$ donc

$$u_n \rightarrow \int_0^{\pi/4} 0 \, dx = 0.$$

- (b) Sur $[0; +\infty[$, $\frac{1}{x^n + e^x} \xrightarrow{CVS} f(x)$ avec $f(x) = e^{-x}$ sur $[0; 1[$ et $f(x) = 0$ sur $]1; +\infty[$.

De plus $\left| \frac{1}{x^n + e^x} \right| \leq e^{-x} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0; +\infty[$ donc

$$v_n \rightarrow \int_0^1 e^{-x} \, dx = \frac{e-1}{e}.$$

Exercice 2 : [énoncé](#)

En découpant l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \, dx.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée aux deux intégrales, on obtient

$$I_n \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Exercice 3 : [énoncé](#)

À chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

- (a) Ici, on ne peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $[0; +\infty[$ après une majoration de $|\sin x|$ par 1 car la fonction dominante $\varphi(x) = 1/x^2$ ne sera pas intégrable sur $]0; +\infty[$. Pour contourner cette difficulté, on découpe l'intégrale.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx.$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \right| \leq \int_0^1 |\sin^{n-2}(x)| \, dx \quad \text{car} \quad |\sin x| \leq |x|.$$

Sans difficultés, par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 |\sin^{n-2}(x)| \, dx \rightarrow 0$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \rightarrow 0.$$

Aussi

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2} \, dx.$$

Or $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \xrightarrow{CS} f(x)$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \neq \pi/2 \in]\pi]$.

De plus $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[1; +\infty[$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2} \, dx \rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) \, dx = 0$$

puis $u_n \rightarrow 0$.

- (b) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1}.$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} \right| \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

en vertu du théorème de convergence dominée et via la domination

$$\left| \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ sur } [1; +\infty[.$$

Ainsi $u_n \rightarrow 1$.

- (c) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1}.$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} \right| \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$$

donc $u_n \rightarrow 0$.

On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée mais c'est moins efficace.

Exercice 4 : [énoncé]

Posons

$$f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{nt + t^2}.$$

La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $f_n(t) \sim \frac{nt}{nt+t^2} \rightarrow 1$.

Quand $t \rightarrow +\infty$; $f_n(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On peut donc affirmer que f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Pour $t \in]0; +\infty[$.

Quand $n \rightarrow +\infty$, $f_n(t) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

De plus, pour $t \leq \pi/2$, on a, sachant $|\sin u| \leq |u|$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{nt}{nt + t^2} \leq 1$$

et pour $t \geq \pi/2$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{nt + t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Ainsi $|f_n| \leq \varphi$ avec

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; \pi/2] \\ 1/t^2 & \text{si } t \in]\pi/2; +\infty[. \end{cases}$$

La fonction φ étant intégrable sur $]0; +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Exercice 5 : [énoncé]

La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi [2\pi]$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin^n t| dt.$$

On a

$$f_n(t) = |e^{-t} \sin^n(t)| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 + \pi [\\ e^{-t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $]0; +\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

Exercice 6 : [énoncé]

Les fonctions données par

$$f_n(t) = (1 + t^2/n)^{-n}$$

sont définies et continues par morceaux sur \mathbb{R} .

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f avec $f(t) = e^{-t^2}$ définie et continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et considérons

$$\varphi : x \mapsto -x \ln(1 + t^2/x)$$

définie sur $[1; +\infty[$.

En étudiant le signe de φ'' , on démontre φ' est croissante. Or $\lim_{+\infty} \varphi' = 0$ et donc φ' est négative.

La fonction φ est donc décroissante et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(t)| \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \exp(\varphi(n)) \leq \exp(\varphi(1)) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

La fonction $t \mapsto 1/(1 + t^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Exercice 7 : [\[énoncé\]](#)

La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et on observe

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}$$

avec $3n > 1$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ est bien définie pour $n \geq 1$.

Par application du théorème de convergence dominée (en prenant $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^3}$ pour dominatrice), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} = 0.$$

La décroissance de $(|u_n|)$ et la positivité de l'intégrale étant des propriétés immédiates, on peut appliquer le critère spécial et affirmer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 : [\[énoncé\]](#)

f_n est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Par suite f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} dx.$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n \ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = n f_n(x).$$

Pour $x > 0$, quand $n \rightarrow +\infty$, $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$.

De plus, sachant $\ln(1+u) \leq u$, on a $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.

Par convergence dominée,

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9 : [\[énoncé\]](#)

Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns) ds.$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \rightarrow \ell.$$

Exercice 10 : [\[énoncé\]](#)

Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n) e^{-u} du.$$

Par convergence dominée, sachant

$$|f(u/n)| \leq \|f\|_{\infty} e^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \rightarrow \int_0^{+\infty} f(0) e^{-u} du = f(0).$$

Exercice 11 : [\[énoncé\]](#)

Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2} du.$$

Posons alors $f_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ définie sur \mathbb{R}_+ .

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers

$$f_{\infty} : u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}.$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

$$|f_n(u)| \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{1+u^2} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2} du = \frac{\pi f(0)}{2}.$$

Exercice 12 : [\[énoncé\]](#)

(a) Pour $x > 0$, posons

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt) dt.$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.
 Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} (\sin t)^{n+1} x f'(xt) dt.$$

Posons $g_n(x) = |\sin t|^{n+1} x f'(xt) dt$.
 Chaque fonction g_n est continue par morceaux.
 La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x \neq \pi/2 + k\pi$.
 La fonction limite simple est continue par morceaux.
 Enfin on a la domination

$$|g_n(x)| \leq x f'(xt) = \varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.
 Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et par comparaison

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- (b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme.

Par changement de variable

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} (\sin(u/x))^{n+1} f'(u) du.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} |f'(u)| du \leq \varepsilon$$

et alors

$$|u_n(x)| \leq M \int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du + \varepsilon \text{ avec } M = \max_{u \in [0;A]} |f'(u)|.$$

Pour $x \geq 4A/\pi$, on a

$$\forall u \in [0; A], 0 \leq \frac{u}{x} \leq \frac{A}{x} \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq \frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}.$$

Pour $x \leq 4A/\pi$, on a par changement de variable

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du = x \int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1} dt.$$

Pour k entier tel que $k\pi < A/x \leq (k+1)\pi$.

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq x \int_0^{(k+1)\pi} |\sin t|^{n+1} dt = x(k+1) \int_0^\pi (\sin t)^{n+1} dt.$$

Or $x(k+1)\pi \leq A + x\pi \leq 5A$ et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq \frac{5A}{\pi} \int_0^\pi (\sin t)^{n+1} dt.$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{5AM}{\pi} \int_0^\pi (\sin t)^{n+1} dt + \frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}} + \varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 13 : [énoncé]

Posons

$$f_n(t) = \begin{cases} (1 - t^2/n)^n & \text{si } t \in [0; \sqrt{n}[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $t \in [0; +\infty[$, à partir d'un certain rang $t > \sqrt{n}$ et

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \rightarrow e^{-t^2}.$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f: t \mapsto e^{-t^2}$.

En vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient

$$|f_n(t)| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$$

et ce que $t \in [0; \sqrt{n}]$ ou non.

La fonction φ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Exercice 14 : [énoncé]

Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 + x/n)^n & \text{si } x \in [0; n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x \in [0; +\infty[$, à partir d'un certain rang $x \geq n$ et

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - 2x\right) \rightarrow e^{-x}.$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f: x \mapsto e^{-x}$.

En vertu de l'inégalité $\ln(1 + u) \leq u$, on obtient

$$|f_n(x)| \leq e^{-x} = \varphi(x)$$

et ce que $x \in [0; n]$ ou non.

La fonction φ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Exercice 15 : [énoncé]

Par changement de variable

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx \stackrel{u=1-x/n}{=} n \int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du.$$

Par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx \sim n.$$

Exercice 16 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x \in [0; n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]n; +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$f_n(x) = \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - x^2/2n^2 + o(1/n^2)\right)\right) \rightarrow e^{-x^2/2}.$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f: x \mapsto e^{-x^2/2}$ sur $[0; +\infty[$. Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.

Soit $\psi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = 1 - t^2/4 - \cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x \in [0; 1], \psi(x) \geq 0.$$

On en déduit que, pour $x \in [0; n]$,

$$\ln\left(\cos \frac{x}{n}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) \leq -\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x) \leq e^{-x^2/4}.$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x \in]n; +\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

On a

$$\left| \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \right| \leq \frac{1 \times 2}{(x+1)(x+2)} \times 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0; +\infty[$.

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \rightarrow -\infty$$

car $\ln(1 + x/k) \sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.

Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \rightarrow 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx = 0.$$

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Appliquons le théorème de convergence dominée.

Posons $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = F(\sqrt{n}(\delta t - h)).$$

Pour $t \in [0; h/\delta[$, on a $f_n(t) \rightarrow 1$.

Pour $t \in]h/\delta; 1]$, on a $f_n(t) \rightarrow 0$.

Enfin, pour $t = h/\delta$, $f_n(t) = F(0) \rightarrow F(0)$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t = h/\delta \\ 0 & \text{si } t \in]h/\delta; 1]. \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.

Enfin

$$\forall t \in [0; 1], |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.

Par convergence dominée,

$$I_n \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^{h/\delta} 1 dt = \frac{h}{\delta}.$$

(b) Par la décroissance de F , on peut écrire

$$\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \leq \frac{1}{n} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt.$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \leq \frac{S_n}{n} \leq I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt = \int_0^1 F(\sqrt{n}(\delta(t + 1/n) - h)) dt.$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n \sim \frac{h}{\delta} n.$$

Exercice 19 : [énoncé]

(a) (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a; 1[\\ f(1)/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1; b]. \end{cases}$$

(b) Sachant $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ avec f intégrable sur $[a; b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

(c) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \left[\frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 - \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt.$$

D'une part

$$\left[\frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 = \frac{\ln 2}{n} f(1) + \frac{\ln(1+a^n)}{n} f(a) = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $\ln(1+a^n) \rightarrow 0$.

D'autre part

$$\left| \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \|f'\|_\infty \int_0^1 t^n dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant $\ln(1+u) \leq u$.

Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 20 : [\[énoncé\]](#)

L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x) dx = \int_a^b f_n(x)g(x) dx$$

est bien définie.

Par le changement de variable $x = u/n$ bijectif de classe \mathcal{C}^1

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x) dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n) du = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(u) du$$

avec

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n) \chi_{[na;nb]}$$

h_n est continue par morceaux, (h_n) converge simplement vers h continue par morceaux avec

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} g(0).$$

Pour n assez grand de sorte que $|a/n|, |b/n| \leq 1$ on a pour tout $u \in [na; nb]$, $|u^2/2n^4| \leq 1/2 < 1$,

$$|h_n(u)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 \ln(1-u^2/2n^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} = \varphi(u)$$

et cette inégalité vaut aussi pour $u \notin [na; nb]$.

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 21 : [\[énoncé\]](#)

Par le changement de variable $u = t^{n+1}$, on obtient

$$(n+1)I_n = \int_0^1 f(u^{1/(n+1)}) du.$$

Posons $f_n(u) = f(u^{1/(n+1)})$ avec $u \in [0; 1]$ et réunissons les hypothèses d'application du théorème de convergence dominée :

- (1) Pour tout $u \in [0; 1]$, on peut affirmer par continuité de f et composition de limites

$$f_n(u) = f(u^{1/(n+1)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_{\infty}(u) = \begin{cases} f(0) & \text{si } u = 0 \\ f(1) & \text{si } u \in]0; 1]. \end{cases}$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction f_{∞} décrite ci-dessus.

- (2) Les fonctions f_n et la fonction f_{∞} sont continues par morceaux.
 (3) La fonction f étant continue sur le segment $[0; 1]$, elle y est bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$\forall u \in [0; 1], |f_n(u)| = |f(u^{1/(n+1)})| \leq M = \varphi(t).$$

La fonction constante φ est évidemment intégrable sur le segment $[0; 1]$.

Par le théorème convergence dominée, on obtient

$$(n+1)I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{\infty}(u) du = f(1).$$

Sachant $f(1) \neq 0$, cette limite finie non nulle est aussi un équivalent et donc

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

Exercice 22 : [\[énoncé\]](#)

- (a) Une fonction dérivable sur un intervalle y est strictement croissante si, et seulement si, sa dérivée est positive et n'est nulle sur aucun sous-intervalle non réduit à un point (l'ensemble des zéros est d'intérieur vide).
 (b) L'application $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une bijection continue strictement croissante de $[a; b]$ vers $[0; L]$ avec L l'intégrale de f sur $[a; b]$. Les x_i sont alors déterminés par

$$x_i = F^{-1}\left(\frac{iL}{n}\right).$$

- (c) On peut écrire

$$\frac{L}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_i) f(x) dx.$$

Montrons par application du théorème de convergence dominée

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

On écrit

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x) dx = \int_a^b h_n(x) dx$$

avec

$$h_n(x) = g(x_i)f(x) \text{ pour } x \in [x_{i-1}; x_i[\text{ (} x_i \text{ est fonction de } n \text{)}.$$

Les fonctions g et h étant continues sur un segment, on peut les borner et il est facile d'acquérir l'hypothèse de domination. Le plus difficile est d'obtenir la convergence simple. . .

Soit $x \in [a; b]$.

Si $f(x) = 0$ alors $h_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)g(x)$.

Si $f(x) \neq 0$ alors, il existe $m > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall y \in [a; b], |y - x| \leq \alpha \implies f(y) \geq m.$$

Pour l'indice i tel que $x \in [x_{i-1}; x_i[$, on a (selon que l'intervalle $[x_{i-1}; x_i]$ est de longueur supérieure ou inférieure à α)

$$\frac{1}{n}L = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt \geq m \min(x_i - x_{i-1}, \alpha).$$

On en déduit $x_i - x_{i-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puis $x_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, et, par continuité de g , $h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)g(x)$.

Par application du théorème de convergence dominée, on peut conclure

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

Sans perte de généralités, on suppose $a \leq b$.

- (a) Les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et à termes positifs. Par l'inégalité $2xy \leq x^2 + y^2$, on obtient $a_{n+1} \leq b_{n+1}$. On en déduit la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n) . Ces suites sont monotones et bornées donc convergentes. Notons ℓ et ℓ' leurs limites. Par passage à la limite de la relation définissant a_{n+1} en fonction de a_n et b_n , on obtient

$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2}.$$

On en déduit $\ell = \ell'$.

- (b) L'intégrale définissant $T(a, b)$ est convergente car

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}} \underset{u \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}.$$

La fonction de changement de variable $t \mapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$ est une bijection \mathcal{C}^1 croissante de $]0; +\infty[$ vers \mathbb{R} . Après calculs

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}.$$

Par parité de la fonction intégrée

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a, b).$$

- (c) On a

$$T(a_{n+1}, b_{n+1}) = T(a_n, b_n)$$

et donc

$$T(a_n, b_n) = T(a, b).$$

Par convergence dominée avec la fonction de domination

$$\varphi(u) = \frac{1}{a^2 + u^2}$$

on obtient

$$T(a_n, b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{M(a, b)^2 + u^2} = \frac{1}{M(a, b)} \left[\arctan \frac{u}{M(a, b)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{M(a, b)}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Introduisons $u_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{1}{(1 + x^3)^n}.$$

La fonction u_n est continue par morceaux et intégrable car

$$u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}} \text{ avec } 3n > 1.$$

(b) La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers

$$u_\infty : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Les fonctions u_n et u_∞ sont continues par morceaux et, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0; +\infty[$,

$$\left| \frac{1}{(1+x^3)^n} \right| \leq \frac{1}{1+x^3} = \varphi(x).$$

La fonction φ est intégrable et par convergence dominée

$$I_n = \int_0^{+\infty} u_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} u_\infty(t) dt = 0.$$

(c) On remarque $0 \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$ et, par intégration en bon ordre, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. On en déduit que la série $\sum (-1)^{n-1} I_n$ est alternée et que son terme général décroît en valeur absolue vers 0 : la série converge par application du critère spécial.

Pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} I_n &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{(1+x^3)^n} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} \left(\frac{1 - \frac{(-1)^N}{(1+x^3)^N}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N} \right) dx. \end{aligned}$$

Or

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3} \cdot \frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

car $2+x^3 \geq 1+x^3$ On en déduit

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} I_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^3}.$$

Pour calculer, cette dernière intégrale, on réalise le changement de variable $x = 2^{1/3}t$ puis la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1/3}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}}{t^2-t+1}.$$

Au terme des calculs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} I_n = \frac{2^{1/3}\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 25 : [énoncé]

(a) On peut montrer que la suite (I_n) est de limite nulle en appliquant le théorème de convergence dominée ou simplement en raisonnant par comparaison. Privilégions cette dernière démarche. La fonction f étant continue sur le segment $[0; 1]$, elle y est bornée par un certain réel M . On a alors

$$|I_n| \leq \int_0^1 |x^n f(x)| dx = \int_0^1 x^n |f(x)| dx \leq M \int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que la suite (I_n) tend vers 0.

(b) Lorsque la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 , une intégration par parties donne

$$I_n = \left[f(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 f'(x) x^{n+1} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

De retour au cas général, ce qui précède invite à étudier la limite de nI_n ou, parce que cela est plus commode, celle de $(n+1)I_n$.

On réexprime $(n+1)I_n$ à l'aide d'un changement de variable.

Par le changement de variable $t = x^{n+1}$ pour lequel $dt = (n+1)x^n dx$, on obtient

$$(n+1)I_n = \int_0^1 f(t^{1/(n+1)}) dt.$$

Appliquons alors le théorème de convergence dominée à la suite des fonctions u_n définies sur $[0; 1]$ par

$$u_n(t) = f(t^{1/(n+1)}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $t \in [0; 1]$, on obtient par continuité de f

$$u_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_\infty(t) = \begin{cases} f(1) & \text{si } t \in]0; 1] \\ f(0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction u_∞ sur $[0; 1]$. Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux sur $[0; 1]$ et, pour tout $t \in [0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(t)| \leq M = \varphi(t) \quad \text{avec } \varphi \text{ intégrable sur } [0; 1].$$

Par convergence dominée,

$$(n+1)I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_\infty(t) dt = f(1) \neq 0 \quad \text{donc} \quad I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

(c) À l'aide d'une sommation géométrique, on exprime les sommes partielles de la série de terme général I_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Quitte à considérer que l'intégrale étudiée porte sur l'intervalle $]0; 1[$, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^n I_k = \int_0^1 f(x) \sum_{k=0}^n x^k dx = \int_{]0;1[} f(x) \frac{1-x^{n+1}}{1-x} dx.$$

On sépare ensuite l'intégrale en deux

$$\sum_{k=0}^n I_k = \int_{]0;1[} \frac{f(x)}{1-x} dx - \int_{]0;1[} \frac{f(x)}{1-x} x^{n+1} dx.$$

Il y a convergence des intégrales introduites car les fonctions intégrées se prolongent par continuité en 1 puisque

$$\frac{f(x)}{1-x} = -\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -f'(1).$$

Aussi,

$$\int_{]0;1[} \frac{f(x)}{1-x} x^{n+1} dx = \int_0^1 g(x)x^{n+1} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{avec} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1-x} \\ -f'(1) \end{cases}$$

car la fonction g est continue et cela ramène à l'étude de la première question. On peut alors écrire, avec convergence de la série,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-x} dx.$$

Exercice 26 : [énoncé]

Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

donc

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t).$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0; +\infty[$ et, en vertu de l'étude qui précède, la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0; +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

qui est sommable. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 27 : [énoncé]

Pour $x \in]0; 1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

et pour $x \in]0; 1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} (\ln x)^2.$$

si $x \in]0; 1[$

si $x = 1$ Considérons alors la série des fonctions

$$u_n(x) = (-1)^n x^{2n} (\ln x)^2.$$

Par convergence des séries précédentes, la série des fonctions u_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto (\ln x)^2 / (1+x^2)$. Les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux.

Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^1 |u_n(x)| dx = \int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 dx.$$

Par intégration par parties, on montre

$$\int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 dx = \frac{2}{(2n+1)^3}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et affirmer

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 28 : [énoncé]

Sur $]0; 1[$,

$$\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} (\ln t).$$

Posons $f_n(t) = (-1)^n t^{2n} \ln t$.

Les $f_n :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0; 1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{2n} \ln t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

Ce dernier calcul est non trivial et fait référence à la constante de Catalan.

Exercice 29 : [énoncé]

Pour $t \in]0; 1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t.$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t dt = \frac{-1}{(2n+1)^2}.$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = - \frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

Exercice 30 : [énoncé]

- (a) Par intégration par parties avec convergence du terme entre crochet (car $\ln(1+t) \sim_{t \rightarrow 0} t$)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \left[\ln(1+t) \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt.$$

- (b) Sur $]0; 1[$,

$$- \frac{\ln t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^n (\ln t).$$

Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1} t^n \ln t$.

Les $f_n :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t}$ elle-même continue par morceaux sur $]0; 1[$.

On a

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc

$$- \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} t^n \ln t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

- (c) En séparant les termes pairs et les termes impairs (ce qui se justifie en transitant par les sommes partielles)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 31 : [énoncé]

- (a) Par une intégration par parties avec convergence du terme entre crochet (car $\arctan t \sim_{t \rightarrow 0} t$)

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = \left[\ln(t) \arctan(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

On obtient donc

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

avec convergence des intégrales proposées

(b) Pour tout t élément de $]0; 1[$,

$$-\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{2n} (\ln t).$$

Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1} t^{2n} \ln t$.

Les $f_n :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0; 1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc

$$- \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} t^{2n} \ln t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Rq : on aurait aussi pu exploiter $\arctan t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} t^{2n+1}$.

Exercice 32 : [énoncé]

Les intégrales considérées sont bien définies.

Par intégration par parties,

$$I_n(m) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^m \right]_0^1 - \frac{m}{n+1} I_n(m-1).$$

Ainsi

$$I_n(m) = \frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}} m!$$

En particulier

$$I_n(n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} n!$$

b) $x^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n$.

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_n(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 33 : [énoncé]

Par la série exponentielle, on peut écrire pour $t > 0$,

$$t^{-t} = \exp(-t \ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t \ln t)^n}{n!}.$$

Pour procéder à une intégration terme à terme, posons $u_n(t) = (-1)^n (t \ln t)^n / n!$ pour $t \in]0; 1[$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; 1[$ vers la fonction $t \mapsto t^{-t}$ elle-même continue par morceaux.

Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0; 1[$ car on peut les prolonger par continuité en 0 et

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = (-1)^n \int_0^1 u_n(t) dt.$$

Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 (t \ln t)^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^n \right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 t^n (\ln t)^{n-1} dt.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\int_0^1 (t \ln t)^n dt = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 t^n (\ln t)^{n-1} dt.$$

En itérant le procédé on obtient

$$\int_0^1 (t \ln t)^n dt = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et ainsi

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \int_0^1 |u_n|$ étant convergente, on peut intégrer terme à terme et l'on obtient

$$\int_0^1 t^{-t} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

avec existence de l'intégrale en premier membre.

Exercice 34 : [énoncé]

- (a) $f_{p,k}$ est définie et continue par morceaux sur $]0; 1]$.
 Quand $x \mapsto 0^+$, $\sqrt{x}f_{p,k}(x) = x^{p+1/2}(\ln x)^k \rightarrow 0$ donc $f_{p,k}(x) = o(1/\sqrt{x})$.
 Par suite $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0; 1]$.

- (b) Par intégration par parties

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1}K_{p,k-1}.$$

- (c)

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

et donc

$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

- (d) $x^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$ pour tout $x \in]0; 1]$.
 Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n!}(x \ln x)^n$.
 Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0; 1]$.
 La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; 1]$ et sa somme, qui est $x \mapsto x^x$, est continue par morceaux sur $]0; 1]$.

Enfin

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

est terme général d'une série convergente.

Par théorème d'intégration terme à terme, $x \mapsto x^x$ est intégrable sur $]0; 1]$ et

$$I = \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

Pour $x \in]0; 1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ln x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

avec $f_n(x) = x^n (\ln x)^p$ sur $]0; 1[$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ l'est aussi.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0; 1[$ et par intégration par parties,

$$\int_0^1 |f_n| = (-1)^p \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx = \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

avec en substance existence de l'intégrale et de la série introduite.

Exercice 36 : [énoncé]

Pour $x > 0$,

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x dx = \int_{]0;1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(x \ln x)^n}{n!}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0; 1]$.

Les fonctions f_n sont intégrables et

$$\int_{]0;1]} |f_n| = \int_{]0;1]} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} dx.$$

Or

$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n \right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

donc quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{]0;1]} x^n (\ln x)^n dx = -\frac{n}{n+1} \int_{]0;1]} x^n (\ln x)^{n-1} dx.$$

Ainsi

$$\int_{]0;1]} x^n (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \dots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$
 Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{[0;1]} x^x dx$
 est définie et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 37 : [\[énoncé\]](#)

(a) Sur $[0; 1[$, la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x}{1-x} (1 - \sqrt{x}) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}.$$

Cette fonction somme est continue par morceaux sur $[0; 1[$.

Les fonction f_n sont intégrables sur $[0; 1[$ et

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$

Ce terme est sommable et l'on peut donc intégrer terme à terme ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

(b) Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)} = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{5}{3} - 2 \ln 2.$$

Exercice 38 : [\[énoncé\]](#)

Pour $x \in [0; 2\pi]$, on peut écrire

$$e^{2 \cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n!}.$$

Posons

$$f_n : x \in [0; 2\pi] \mapsto \frac{2^n \cos^n x}{n!}.$$

Les fonctions f_n sont continues et la série de fonctions $\sum f_n$ converge
 normalement sur $[0; 2\pi]$ puisque

$$\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{2^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On peut donc intégrer terme à terme pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \int_0^{2\pi} (\cos x)^n dx.$$

Par intégration par parties (cf. intégrale de Wallis)

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} (\cos x)^{n-2} dx.$$

Sachant

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^0 dx = 2\pi \text{ et } \int_0^{2\pi} (\cos x)^1 dx = 0$$

on obtient

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2p} dx = 2\pi \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \text{ et } \int_0^{2\pi} (\cos x)^{2p+1} dx = 0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos x} dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}}{(2p)!} \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} 2\pi = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(p!)^2}.$$

Exercice 39 : [\[énoncé\]](#)

Si $|a| < 1$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-1)t}}{1 - ae^{-it}} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{i(n-(k+1))t} dt.$$

Par convergence normale de la série

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \int_0^{2\pi} e^{i(n-(k+1))t} dt = \begin{cases} 2\pi a^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $|a| > 1$ alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt &= -\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{1 - e^{it}/a} dt \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{k+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n+k)t} dt = \begin{cases} -2\pi a^{n-1} & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 40 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\forall t > 0, \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(a+nb)t}.$$

Posons $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = te^{-(a+nb)t}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et sa somme est continue par morceaux puisque c'est la fonction

$$t \mapsto \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}}.$$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0; +\infty[$ et par intégration par parties

$$\int_{]0; +\infty[} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{(a + bn)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} dt = \int_{]0; +\infty[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum \int_{]0; +\infty[} f_n \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}.$$

Exercice 41 : [énoncé]

La convergence de l'intégrale proposée est facile.

En découpant l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \int_0^\pi \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Dans la somme proposée, le terme intégrale ne dépend de l'indice sommation donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \right) \int_0^\pi \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{1}{1 - e^{-\pi/n}} \int_0^\pi \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{1 - e^{-\pi/n}} \sim \frac{n}{\pi}$$

et

$$\int_0^\pi \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx \rightarrow \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

par application du théorème de convergence dominée.

Par le changement de variable $t = \tan x$ inspiré des règles de Bioche,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Au final

$$\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 42 : [énoncé]

(a) On a

$$u_n(1) = \int_0^{\pi/2} \sin t (\cos t)^n dt = \left[-\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} t \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}.$$

La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

(b) Pour $\alpha \leq 1$,

$$\forall t \in]0; \pi/2], (\sin t)^\alpha \geq \sin t$$

et donc $u_n(\alpha) \geq u_n(1)$.

On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est alors divergente.

Pour $\alpha > 1$. La série des $u_n(\alpha)$ est une série à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha \frac{1 - (\cos t)^{n+1}}{1 - \cos t} dt$$

donc

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^\alpha}{1 - \cos t} dt$$

avec l'intégrale majorante qui est convergente puisque

$$\frac{(\sin t)^\alpha}{1 - \cos t} \sim 2 \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}} \text{ quand } t \rightarrow 0^+.$$

Puisque la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ a ses sommes partielles majorées, elle est convergente.

(c) Par ce qui précède, on peut intégrer terme à terme car il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des fonctions. On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha t}{1 - \cos t} dt.$$

Pour $\alpha = 2$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} 1 + \cos t dt = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Pour $\alpha = 3$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1 - \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin t(1 + \cos t) dt = \frac{3}{2}.$$

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

En posant u_n le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.

(b) $S_{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)^{n-1} dx$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permuter et obtenir

$$S_{-1} = \int_0^1 \frac{x dx}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1} \binom{2n}{n}$$

on observe

$$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \quad (*).$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$4\left(S_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(S_{-1} - \frac{1}{2}\right) = S_0$$

puis

$$S_0 = \frac{1 + 2S_{-1}}{3}.$$

(c) On multiplie la relation(*) par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des S_q avec $q < p$.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) $f: x \mapsto \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ est définie, continue sur $[0; +\infty[$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$ donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est définie.

(b)

$$\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} dx = \int_0^a \frac{1}{n^2+x^2} dx - 2 \int_0^a \frac{x^2}{(n^2+x^2)^2} dx$$

et

$$\int_0^a \frac{x^2}{(n^2+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{n^2+x^2} \right]_0^a + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{n^2+x^2} dx$$

donc

$$\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} dx = \frac{a}{n^2+a^2}.$$

Par suite

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx = 0.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} dx$ est convergente et de somme nulle.

(c) Pour $x \in [0; a]$,

$$\left| \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} \right| \leq \frac{n^2+a^2}{n^4}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+a^2}{n^4} < +\infty$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0; a]$.

Par suite

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}.$$

(d) La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante et intégrable sur $[0; +\infty[$ donc par comparaison série-intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2} dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2} dx.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \left[\arctan \frac{x}{a} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{a}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \left[\arctan \frac{x}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

(e) Ci-dessus :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

est convergente et vaut $\pi/2$.

Le résultat diffère de celui obtenu en b). Il est donc faux ici de permuter somme et intégrale. Document 7

Exercice 45 : [énoncé]

(a) $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1/e < 1$.

(b) Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt.$$

Par intégration par parties, on obtient $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où

$$a_n = n \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt.$$

(c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} nt^n e^{-nt} dt$$

et la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |nt^n e^{-nt}| dt = \sum a_n$$

converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n e^{-nt} dt$$

avec

$$(1 - te^{-t}) \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{-nt} = \frac{te^{-t}}{1 - te^{-t}}$$

d'où la conclusion.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(t) = 1/(1 + t^n)$ sur $]0; 1]$.

La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $u_\infty : t \mapsto 1$.

Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux.

Enfin

$$\forall t \in]0; 1], |u_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec $\varphi :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable. Par convergence dominée

$$I_n = \int_0^1 u_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_\infty(t) dt = 1 = \ell.$$

(b) On a

$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1 + t^n} dt = \int_0^1 t \frac{t^{n-1}}{1 + t^n} dt.$$

Par intégration par parties,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt.$$

Puisque

$$\left| \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

on peut affirmer $\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

(c) Pour $y \in]0; 1[$,

$$\frac{\ln(1 + y)}{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k+1}.$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

Sans peine, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(d) Par le changement de variable \mathcal{C}^1 strictement croissant $y = t^n$

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}} dy.$$

Par convergence dominée (domination par sa limite simple),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}} dy \rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ainsi,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 47 : [\[énoncé\]](#)

(a) On a

$$|I_n - 1| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donc $I_n \rightarrow \ell = 1$.

(b) Par intégration par parties

$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \int_0^1 t^n dt \rightarrow 0$$

donc

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(c) On a

$$\ln(1+t^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}.$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on obtient la relation proposée.

(d) On a

$$n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

donc

$$n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalement

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 48 : [\[énoncé\]](#)

(a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$.
 $\Delta_\lambda :]0; +\infty[.$

(b)

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right).$$

Or

$$\left| 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = e^{|\lambda|}$$

donc $F_\lambda(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$.

(c) Puisque

$$\left| \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right| \leq \frac{\lambda^n}{n!}$$

il y a convergence normale sur \mathbb{R}_+ de la série des fonctions continues $s \mapsto \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}$. Ceci permet d'affirmer

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$$

et donc

$$F_\lambda(s) \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{e^\lambda}{s}.$$

(d) Par intégrations par parties successives :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

(e)

$$F_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy.$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :

$$F_\lambda(s) = \int_0^1 e^{\lambda y} (1-y)^{s-1} dy.$$

Exercice 49 : [énoncé]

La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left| a_p \frac{t^p}{p!} \right| \leq \| (a_n) \|_\infty \frac{t^p}{p!}.$$

De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.

Enfin

$$\left| \sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right| \leq \| (a_n) \|_\infty e^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.

Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!} e^{-2t}.$$

La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.

Les fonctions f_p et $\sum_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.

Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0; +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_p(t)| dt = \frac{|a_p|}{2^{p+1}} = O\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme générale d'une série convergente.

Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) dt = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}.$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Exercice 50 : [énoncé]

On sait que la fonction ζ est continue.

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} dx$$

avec

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{n^x} = \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

Exercice 51 : [énoncé]

(a) Posons

$$f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) \right)^n.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0; \pi/2[$, elle-même continue par morceaux. Enfin, on a la domination

$$|f_n(x)| \leq 1 = \varphi(x)$$

avec φ évidemment intégrable sur $]0; \pi/2[$. Par convergence dominée, on obtient

$$u_n \rightarrow 0.$$

- (b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum f_n$. En effet, les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; \pi/2[$ vers la fonction

$$f: x \mapsto \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)}$$

elle-même continue par morceaux. Enfin les fonctions f_n sont intégrables sur $]0; \pi/2[$ et l'hypothèse de travail absurde signifie la convergence de la série $\sum \int_{]0; \pi/2[} |f_n|$.

Par théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)} dx$$

avec convergence de l'intégrale. Or, quand $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)} \sim \frac{8}{\pi^2 x^2}$$

et donc l'intégrale introduite diverge. C'est absurde.

On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 52 : [énoncé]

On a $u_n \geq v_n = \int_0^{\pi/2} e^{-t} \cos^{2n} t dt$.

Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0; \pi/2[$ de la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t} \cos^{2n} t = \frac{e^{-t}}{1 - \cos^2 t} = \frac{e^{-t}}{\sin^2 t}.$$

Or quand $t \rightarrow 0^+$

$$\frac{e^{-t}}{\sin^2 t} \sim \frac{1}{t^2}$$

qui n'est pas intégrable sur $]0; \pi/2[$.

C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 53 : [énoncé]

- (a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^x)^n}$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Cas $x < 0$:

$\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$ donc la fonction n'est pas intégrable.

Cas $x = 0$:

$\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$. Même conclusion.

Cas $x > 0$:

Quand $t \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \rightarrow 1$ et quand $t \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \sim \frac{1}{t^{nx}}$ donc la fonction est intégrable sur $]0; +\infty[$ si, et seulement si, $nx > 1$.

- (b) Pour $t > 0$, on remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^x)^n} = \frac{1}{t^x}.$$

Par l'absurde, si $\sum I_n(x)$ converge, on peut appliquer un théorème d'interversion somme et intégrale assurant que $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$. C'est absurde.

On conclut que $\sum I_n(x)$ diverge.

Par intégration par parties avec deux convergences

$$I_n(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

Or

$$I_n(2) - I_{n+1}(2) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

donc

$$I_{n+1}(2) = \frac{2n-1}{2n} I_n(2).$$

On en déduit

$$I_{n+1}(2) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

car $I_1(2) = \pi/2$.

Notons que par le changement de variable $t = \tan u$, on pouvait aussi transformer $I_n(2)$ en une intégrale de Wallis.

Exercice 54 : [énoncé]

- (a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^3)^n$ définie sur $]0; +\infty[$.
 Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0; +\infty[$, elle-même continue par morceaux. De plus

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]0; +\infty[, |u_n(t)| \leq \varphi(t)$$

avec $\varphi : t \mapsto 1/(1+t^3)$ intégrable sur $]0; +\infty[$ et donc aussi sur $]0; 1]$.
 Par application du théorème de convergence dominée sur $]0; 1]$ et sur $]1; +\infty[$, on obtient

$$U_n \rightarrow 0 \text{ et } V_n \rightarrow 0.$$

- (b) Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; 1]$ vers la fonction U continue par morceaux donnée par

$$U(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1+t^3} \frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1}{t^3}.$$

Si, par l'absurde, la série $\sum U_n$ converge, on est dans la situation où la série de terme général $\int_{]0;1]} |u_n(t)| dt$ converge et l'on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme affirmant :

$$U \text{ est intégrable sur }]0; 1] \text{ et } \int_{]0;1]} U(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt.$$

Or ceci est absurde car la fonction U n'est pas intégrable sur $]0; 1]!$

On en déduit que la série $\sum U_n$ diverge.

En revanche, la série $\sum V_n$ est à termes positifs et

$$\sum_{k=1}^n V_k \leq \int_1^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+t^3)^k} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum V_n$ étant majorées, on peut affirmer que la série $\sum V_n$ converge.

Exercice 55 : [énoncé]

- (a) Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x) \sim \frac{2x}{nx} \rightarrow \frac{2}{n}$ donc $\alpha = \frac{2}{n}$ est l'unique valeur pour laquelle f est continue en 0.

- (b) f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et quand $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) \sim \frac{e^x}{e^{nx}} \rightarrow 0$ donc f_n est bornée sur \mathbb{R}_+ .

On peut envisager une argumentation plus détaillée :

- puisque f converge en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que f est bornée sur $[A; +\infty[$;
- puisque f est continue, f est bornée sur $[0; A]$;
- et finalement f est bornée sur la réunion de ces deux intervalles par la plus grande des deux bornes.

- (c) f_n est définie et continue sur $[0; +\infty[$ et quand $x \rightarrow +\infty$, $x^2 f_n(x) \sim x^2 e^{-(n-1)x} \rightarrow 0$ donc $f_n(x) = o(1/x^2)$ et donc f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

- (d) Pour $x > 0$,

$$\frac{2 \operatorname{sh} x}{e^{nx} - 1} = 2 \operatorname{sh} x \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-nkx} = \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}).$$

$$\int_0^{+\infty} |e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}| dx = \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1} = \frac{2}{n^2 k^2 - 1} = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut sommer terme à terme et affirmer

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sh} x}{e^{nx} - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1}.$$

Pour $n = 2$, la somme est facile à calculer.

Exercice 56 : [énoncé]

- (a) Par convergence dominée $I_n \rightarrow 0$.
 (b) Par intégration par parties avec convergence du crochet

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n} \right]_0^{+\infty} + 3n \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt = I_n - I_{n+1}.$$

On en déduit la relation demandée.

- (c) La suite (u_n) a la nature de la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Or

$$v_n = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right) = \frac{\alpha - 1/3}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n converge si, et seulement si, $\alpha = 1/3$.

(d) Puisque $\ln(n^{1/3}I_n) \rightarrow \ell$, on obtient

$$I_n \sim \frac{e^\ell}{\sqrt[3]{n}}$$

et donc

$$\frac{1}{n}I_n = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).$$

Par suite $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}I_n$ converge.

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}I_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \text{ avec } f_n(t) = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0; +\infty[$, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right)$$

est continue par morceaux.

Enfin, la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

On peut donc permuter somme et intégrale pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}I_n = -\int_0^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

la dernière intégrale étant calculer par intégration par parties puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 57 : [\[énoncé\]](#)

(a) La fonction définissant l'intégrale I_k est intégrable sur $]0; 1]$ car

$$\sqrt{t} \times t^{k-1} \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0.$$

Par une intégration par parties avec convergence du crochet, on obtient

$$I_k = \left[\frac{t^k \ln(t)}{k} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{k} dt = -\frac{1}{k^2}.$$

(b) Le terme R_n est bien définie car c'est le reste d'une série convergeant absolument. Ce qui précède, nous encourage à écrire

$$R_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 (-t)^{k-1} \ln(t) dt.$$

Pour intégrer terme à terme, on introduit $u_k :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u_k(t) = (-t)^{k-1} \ln(t).$$

Par sommation géométrique, la série des fonctions u_k converge simplement sur $]0; 1[$ (et même sur $]0; 1]$). Les fonctions u_k sont toutes continues par morceaux et la fonction somme

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k : t \mapsto \frac{(-1)^n t^n \ln(t)}{1+t}$$

l'est aussi. Les fonctions u_k sont intégrables sur $]0; 1]$ et il y a convergence de la série

$$\sum \int_0^1 |u_k| = \sum \frac{1}{k^2}.$$

Les hypothèses du théoème d'intégration terme à terme sont réunies et donc

$$R_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 (-t)^{k-1} \ln(t) dt = -\int_0^1 \frac{(-1)^n t^n \ln(t)}{1+t} dt.$$

(c) On opère encore une intégration terme à terme en considérant cette fois-ci les fonctions v_n déterminées par

$$v_n(t) = \frac{(-1)^n t^n \ln(t)}{1+t} \text{ avec } t \in]0; 1] \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Encore une fois les hypothèses d'usages sont réunies, notamment parce que

$$\int_0^1 |v_n(t)| dt \leq \int_0^1 t^n |\ln(t)| dt = \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) dt = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt.$$

Par une intégration par parties généralisée où l'on choisit $1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$ comme primitive de $\frac{1}{(1+t)^2}$ on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt = \left[\frac{t \ln(t)}{1+t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = -\ln 2.$$

On peut conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \ln 2.$$

Exercice 58 : [énoncé]

On a

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

avec $f_n(t) = (-1)^n t^{na}$ sur $]0; 1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{na+1}$$

et $\sum \frac{1}{na+1}$ diverge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini ne s'applique pas.

De plus la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0; 1]$ car elle ne converge pas simplement en 1...

Transitions alors par les sommes partielles et le théorème de convergence dominée.

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ka} = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)a}}{1 + t^a}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0; 1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$$

elle-même continue par morceaux.

De plus

$$|S_n(t)| \leq \frac{2}{1+t^a} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; 1[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}.$$

Or

$$\int_0^1 S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{ka} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$$

avec, en substance, la convergence de la série introduite.

Exercice 59 : [énoncé]

Notons que l'intégrale étudiée est bien définie.

Pour tout $x \in]0; 1[$,

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1}.$$

Le théorème d'intégration terme à terme ne pourra pas s'appliquer car ici

$$\sum \int_{]0;1[} |f_n| = \sum \frac{1}{n+\alpha} \text{ diverge.}$$

Nous allons alors intégrer terme à terme en exploitant les sommes partielles.

Posons

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} = x^{\alpha-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et convergent simplement sur $]0; 1[$ vers la fonction

$$S : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$

elle-même continue par morceaux.

De plus

$$|S_n(x)| \leq \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x} = \varphi(x)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0; 1[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

Or

$$\int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$$

et on peut donc conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

avec en substance la convergence de la série introduite.

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Pour $t \in]0; 1[$, on peut écrire

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}.$$

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0; 1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$$

elle-même continue par morceaux.

De plus

$$|S_n(t)| \leq \frac{2t^{a-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; 1[$.

Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

avec convergence de l'intégrale introduite.

Or

$$\int_0^1 S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb-1} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

avec convergence de la série introduite.

(b) Après calculs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 61 : [énoncé]

Soit $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2}.$$

On observe $\|f_n\|_\infty = 1/n^2$ et donc la série des fonctions f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0; +\infty[$. Puisque chaque f_n est continue, on peut affirmer que la fonction

$$S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2}$$

est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

Les fonctions f_n sont intégrables sur \mathbb{R}_+ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n^2 + t^2} = \frac{\pi}{2n}.$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ diverge, on ne peut intégrer terme à terme par le théorème de Fubini.

Raisonnons alors par les sommes partielles en exploitant le théorème de convergence dominée.

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 + t^2}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux sur $[0; +\infty[$ et converge simplement vers la fonction S elle-même continue par morceaux.

De plus, le critère spécial des séries alternées s'appliquant, on a

$$0 \leq S_n(t) \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0; +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(t) dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2} dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

donc

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2} dt$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 62 : [énoncé]

- (a) La fonction définissant l'intégrale est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$: elle est intégrable.
- (b) Par intégration par parties généralisée justifiée par la convergence du crochet

$$T(a, b) = \left[\frac{t^a e^{-bt}}{-b} \right]_0^{+\infty} + \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt} dt = \frac{a}{b} T(a-1, b).$$

On en déduit

$$T(a, b) = \frac{a!}{b^{a+1}}.$$

- (c) On peut simplifier $S_{n-1} - S_n$

$$S_{n-1} - S_n = \int_0^{+\infty} t^p e^{-nt} dt = \frac{p!}{n^{p+1}}.$$

Par télescopage

$$S_0 = \sum_{k=1}^n (S_{k-1} - S_k) + S_n = p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} + S_n.$$

- (d) Par convergence dominée sachant

$$\left| \frac{t^p}{e^t - 1} e^{-nt} \right| \leq \frac{t^p}{e^t - 1} = \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable}$$

on obtient que la suite (S_n) converge vers 0.

- (e) Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 63 : [énoncé]

- (a) La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0; 1]$.
Quand $t \rightarrow 0^+$,

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

avec $1-x < 1$ et donc $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0; 1]$.

- (b) Posons $g(x, t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$ sur $]0; +\infty[\times]0; 1]$.
 $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$,
 $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0; +\infty[$.
Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; 1], |g(x, t)| \leq \frac{t^{a-1}}{1+t} \leq t^{a-1} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $]0; 1]$.

Par domination sur tout segment de $]0; +\infty[$, on peut affirmer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

- (c) Pour $x > 0$

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}.$$

- (d) Quand $x \rightarrow 0^+$, $f(x+1) \rightarrow f(1)$ par continuité. On a donc $f(x+1) = o(1/x)$ puis

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

donc

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 64 : [\[énoncé\]](#)

(a) Posons $f :]0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \frac{e^{-t}}{1+tx}.$$

Pour chaque $x \in]0; +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On en déduit la convergence de l'intégrale généralisée définissant $F(x)$.

(b) Pour chaque $t \in]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est indéfiniment dérivable et

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}} t^n e^{-t}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est continue, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est continue par morceaux et

$$\forall (x, t) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq n! t^n e^{-t} = \varphi_n(t)$$

avec $\varphi_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

Par domination, on peut alors affirmer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; +\infty[, F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}} dt.$$

(c) En particulier

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2.$$

Exercice 65 : [\[énoncé\]](#)

Considérons $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable car

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Pour $t \in]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -t \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable.

La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x , continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. Sur $[a; +\infty[\times]0; +\infty[$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-at}$$

avec $\varphi : t \mapsto e^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par domination sur tout compact, la fonction F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Enfin $F \xrightarrow[+\infty]{} 0$ car

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Exercice 66 : [\[énoncé\]](#)

(a) $g : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est définie continue en x et continue par morceaux en t sur $\mathbb{R}_+ \times]0; +\infty[$ avec

$$|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

et φ intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

(b) $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et est continue en x et continue par morceaux en t sur $\mathbb{R}_+^* \times]0; +\infty[$.

Pour $x \in [a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -\frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} \right| \leq e^{-at^2} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par domination sur tout segment de \mathbb{R}_+^* , on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ avec

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

Enfin,

$$f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \underset{u=\sqrt{xt}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Exercice 67 : [énoncé]

(a) $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc $g(0)$ existe.

$u \mapsto 1/u$ est une bijection \mathcal{C}^1 entre \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_+^* .

On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u du}{1+u^3}.$$

Donc

$$2g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$g(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(b) La fonction g est paire. Pour $0 \leq x \leq x'$, on a pour tout $t \geq 0$, $e^{-tx^2} \geq e^{-tx'^2}$ donc g est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

(c) Pour $x > 0$,

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dt = \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Exercice 68 : [énoncé]

(a) Posons

$$g(x, t) = \frac{1}{1+x^3+t^3}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est définie, continue sur \mathbb{R}_+ et $g(x, t) \sim \frac{1}{t^3}$ donc $f(x)$ existe.

(b) $u \mapsto 1/u$ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme entre \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_+^* .

On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u du}{1+u^3}.$$

Donc

$$2f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(c) $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ , $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ avec

$$|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$$

et φ intégrable sur $[0; +\infty[$ donc f est continue.

Si $x \leq y$ alors $\forall t \in [0; +\infty[, g(y, t) \leq g(x, t)$ donc $f(y) \leq f(x)$. Ainsi f est décroissante.

Rq : On peut aussi montrer f de classe \mathcal{C}^1 mais cela alourdit la démonstration

(d) f tend vers 0 en $+\infty$ car

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^3+t^3} \stackrel{t=xu}{=} \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) Introduisons $g(x, t) = \frac{\cos t}{t+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times [0; \pi/2]$.

La fonction g est continue et x et continue par morceaux en t .

Pour $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times [0; \pi/2], |g(x, t)| \leq \frac{1}{t+a} = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $[0; \pi/2]$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Aussi, pour $0 < x \leq x'$, on a

$$\forall t \in [0; \pi/2], g(x', t) \leq g(x, t).$$

En intégrant, on obtient $f(x') \leq f(x)$. La fonction f est donc décroissante.

On aurait pu aussi établir que f est de classe \mathcal{C}^1 et étudier le signe de sa dérivée.

(b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t} dt \rightarrow 0.$$

Quand $x \rightarrow 0^+$

$$f(x) \geq \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{t+x} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\ln(t+x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{x+\pi/4}{x} \rightarrow +\infty.$$

(c)

$$\frac{1}{x + \pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On sait :

$$\forall 0 \leq t \leq \pi/2, 1 - \frac{1}{2}t^2 \leq \cos t \leq 1$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t+x} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t^2 dt}{t+x} \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t+x}.$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t+x} = \ln \frac{x + \pi/2}{x} \underset{0}{\sim} -\ln x$$

et

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{t^2 dt}{t+x} \leq \int_0^{\pi/2} t \, dt = C = o(\ln x)$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x.$$

Exercice 70 : [\[énoncé\]](#)

(a) La fonction $t \mapsto (\sin t)^x$ est définie, continue et positive sur $]0; \pi/2]$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $(\sin t)^x \sim t^x$ avec $x > -1$ donc $t \mapsto (\sin t)^x$ est intégrable sur $]0; \pi/2]$.

Ainsi f est définie et positive sur $]-1; +\infty[$

(b) La fonction

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(\sin t)(\sin t)^x$$

est définie, continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset]-1; +\infty[$. Sur $[a; b] \times]0; \pi/2]$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln(\sin t)(\sin t)^a| = \varphi(t)$$

avec φ est intégrable sur $]0; \pi/2]$ car pour α tel que $-a < \alpha < 1$,

$$t^\alpha \varphi(t) \sim t^{a+\alpha} |\ln(t)| \rightarrow 0.$$

Par domination sur tout segment, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1; +\infty[$ et

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)(\sin t)^x \, dt \leq 0.$$

Ainsi la fonction f est décroissante.

(c) En intégrant par parties

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x (1 - \cos^2 t) \, dt = f(x) - \left[\frac{(\sin t)^{x+1} \cos t}{x+1} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{x+1} f(x+2)$$

et donc

$$f(x+2) = \frac{x+1}{x+2} f(x).$$

(d) On a

$$\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = xf(x-1)f(x) = \varphi(x)$$

et

$$\varphi(1) = f(0)f(1) = \pi/2$$

donc par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \pi/2.$$

(e) φ est continue et quand $x \rightarrow 0$,

$$\varphi(x) = \varphi(1+x) \rightarrow \varphi(1) = \pi/2.$$

Or quand $x \rightarrow 0$,

$$f(x) \rightarrow f(0) = \pi/2$$

donc quand $x \rightarrow -1$,

$$f(x) = \frac{\varphi(x+1)}{(x+1)f(x+1)} \sim \frac{1}{x+1}.$$

Rq : En fait on peut montrer que φ est une fonction constante.

Exercice 71 : [\[énoncé\]](#)

Étudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} \, dt.$$

Notons $u(x, t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times]0; +\infty[$

$t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto u(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ pour chaque $t \in]0; +\infty[$ et

$$|u(x, t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0; +\infty[$.

On en déduit que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

$x \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* pour chaque $t \in]0; +\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(t^2 + x^2)(1 + t^2)}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* pour chaque $t \in]0; +\infty[$

$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{2x} \frac{1}{(1 + t^2)}$$

car $2tx \leq x^2 + t^2$.

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{2a} \frac{1}{(1 + t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ fonction intégrable.

Par domination sur tout segment, on obtient f de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2 + x^2)(1 + t^2)} dt.$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1 + t^2)(x^2 + t^2)} = \frac{t}{(x^2 - 1)(1 + t^2)} - \frac{t}{(x^2 - 1)(x^2 + t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + t^2}{x^2 + t^2} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{(x^2 - 1)}.$$

Cette identité se prolonge en $x = 1$ par un argument de continuité.

On a alors

$$\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^x \frac{\ln(t)}{(t^2 - 1)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) - f(\varepsilon).$$

Or $f(0) = 0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt = f(x).$$

Exercice 72 : [énoncé]

(a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq a\}$.

$t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω et pour $z \in \Omega_a$,

$$\left| \frac{t^z}{1+t} \right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; 1]$ car $\varphi(t) \sim t^a$ quand $t \rightarrow 0^+$.

Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur Ω_a .

Ceci valant pour tout $a > -1$, on peut encore affirmer que f est définie et continue sur Ω .

(b) On observe

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -1} f(0)$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

(c) Par intégration par parties

$$(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt.$$

Or

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 |t^{z+1}| dt$$

avec

$$|t^{z+1}| = |\exp((z+1) \ln t)| = \exp((\operatorname{Re}(z)+1) \ln t) = t^{\operatorname{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1.

On a alors

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)+1} dt = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)+2} \xrightarrow{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi

$$(z + 1)f(z) \xrightarrow{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

puis

$$f(z) \underset{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2z}.$$

Exercice 73 : [énoncé]

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1) \text{ et } \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Posons $g(x, t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$.

g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{e^t - 1} \cos(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Enfin $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{e^t - 1} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par domination, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 , a fortiori continue et dérivable.

(c) La décomposition

$$\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

permet d'écrire

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-nt} dt.$$

Par la majoration $|\sin(u)| \leq |u|$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} |\sin(t)e^{-nt}| \leq \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \int_{]0; +\infty[} |\sin(t)e^{-nt}| dt$ converge, on peut intégrer terme à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-nt} dt.$$

On calcule l'intégrale sommée en considérant la partie imaginaire de

$$\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-nt} dt.$$

On obtient à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Exercice 74 : [énoncé]

La fonction f est bien définie sur $]0; +\infty[$ et

$$xf(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

Posons

$$u(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

définie sur $]0; +\infty[\times [0; +\infty[$.

u admet deux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\frac{t}{1+t^2} e^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2}{1+t^2} e^{-tx}.$$

Pour chaque $x > 0$, les fonctions u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables et pour tout $[a; b] \subset]0; +\infty[$, on a la domination

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$. Il en est de même pour f par opérations sur de telles fonctions.

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

donc $xf(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ puis

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

Étudions maintenant $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Par le changement de variable $u = tx$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{x^2 + u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x^2 + u^2} \frac{1 - e^{-u}}{u} du$$

avec

$$\varphi: u \mapsto \frac{1 - e^{-u}}{u}.$$

Par intégration par parties,

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + u^2) \varphi(u) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \ln(x^2 + u^2) \varphi'(u) du.$$

Pour $x \in]0; 1]$,

$$|\ln(x^2 + u^2)| \leq |\ln(u^2)| + |\ln(1 + u^2)|$$

et la fonction

$$u \mapsto (|\ln(u^2)| + |\ln(1 + u^2)|) \varphi'(u)$$

est intégrable sur $]0; +\infty[$ car φ' peut être prolongée par continuité en 0 et

$$\varphi'(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-u}}{u}.$$

On en déduit

$$f(x) = -\ln x + O(1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Exercice 75 : [énoncé]

(a) Par le changement de variable $t = ux$ (bijection de classe \mathcal{C}^1) on obtient

$$f(x) = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}.$$

Posons $g:]0; +\infty[\times]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}.$$

La fonction g est continue sur $]0; +\infty[\times]-1; 1[$ et

$$|g(x, u)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $] -1; 1[$.

On en déduit que f est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

(b) Quand $x \rightarrow 0^+$

$$g(x, u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Par la domination précédente

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[\arcsin u \right]_{-1}^1 = \pi.$$

De même, on obtient

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_{-1}^1 0 du = 0.$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) Puisque

$$\frac{\cos^2 t}{t} \sim \frac{1}{t} \text{ quand } t \rightarrow 0^+$$

on peut affirmer, par équivalence de fonctions positives, que l'intégrale diverge en 0.

On peut alors conclure que f est définie sur $]0; +\infty[$ (car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue converge) mais ne peut pas être définie sur un domaine plus grand.

(b) Posons

$$g(x) = \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t} dt.$$

Cette fois-ci

$$\frac{\sin^2 t}{t} \sim t \text{ quand } t \rightarrow 0^+$$

et donc la fonction g est définie et continue en 0.

Puisque

$$f(x) + g(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$$

on peut conclure

$$f(x) \sim \ln x \text{ quand } x \rightarrow 0^+.$$

Aussi

$$f(x) = \int_1^x \frac{1 + \cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln x + \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt.$$

Comme la nouvelle intégrale converge en $+\infty$ (cela s'obtient par une intégration par parties) on conclut

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \ln x \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

Exercice 77 : [énoncé]

- (a) Pour que la racine carrée soit définie pour $t \in]0; 1[$, il est nécessaire que $x \in [-1; 1]$.
 Pour $x \in]-1; 1[$, l'intégrale définissant f converge par les arguments d'intégrabilité suivant

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{C^{te}}{\sqrt{1-t}}.$$

Pour $x = \pm 1$, l'intégrale définissant f diverge car

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-t)}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{1-t} \geq 0.$$

L'ensemble de définition de f est donc $]-1; 1[$.

- (b) Sur $]0; 1[$, la fonction f est croissante et admet donc une limite en 1^- .
 Par l'absurde, si celle-ci est finie égale à $\ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall a \in [0; 1[, \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \leq \ell.$$

Par intégration sur un segment, la fonction de x déterminée par le premier membre est continue en $x = 1$, on en déduit

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \leq \ell.$$

Or ceci est absurde car par non intégrabilité d'une fonction positive

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} +\infty.$$

Exercice 78 : [énoncé]

- (a) La fonction $x \mapsto 1/x^\alpha(1+x)$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ avec

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}.$$

Cette fonction est donc intégrable si, et seulement si, $\alpha \in]0; 1[$.

La fonction intégrée étant de surcroît positive, l'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in]0; 1[$.

- (b) On a

$$f(\alpha) - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}(1+x)}.$$

Or

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}(1+x)} \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = C$$

et pour $\alpha \leq 1/2$

$$\left| \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \right| \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = C'.$$

On a donc

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} + O(1) = \frac{1}{\alpha} + O(1) \sim \frac{1}{\alpha}.$$

On peut aussi obtenir cet équivalent en commençant par opérer le changement de variable $u = x^\alpha$.

- (c) Par le changement de variable \mathcal{C}^1 bijectif $x = 1/t$, on obtient $f(\alpha) = f(1-\alpha)$ d'où la symétrie affirmée.
 (d) Posons

$$u(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}.$$

Pour chaque $x \in]0; +\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto u(\alpha, x)$ est continue et pour chaque $\alpha \in]0; 1[$ la fonction $x \mapsto u(\alpha, x)$ est continue par morceaux. Enfin pour $\alpha \in [a; b] \in]0; 1[$ (avec $a > 0$), on a

$$|u(x, \alpha)| \leq \frac{1}{x^a(1+x)} \text{ si } x \in [1; +\infty[$$

et

$$|u(x, \alpha)| \leq \frac{1}{x^b(1+x)} \text{ si } x \in]0; 1].$$

Ainsi

$$|u(x, \alpha)| \leq \varphi_{a,b}(x) \text{ pour } x \in]0; +\infty[$$

en posant $\varphi_a(x) = u(a, x) + u(b, x)$ qui est intégrable.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0; 1[$.

(e) Par le changement de variable $x = 1/t$, on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$

et alors

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha} + x^\alpha}{x(1+x)} dx.$$

On vérifie que pour $x \geq 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{1-\alpha} + x^\alpha$ est décroissante sur $]0; 1/2]$ puis croissante sur $[1/2; 1[$. La fonction f a donc la même monotonie et son minimum est donc

$$f(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$$

via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 79 : [énoncé]

(a) Posons $f(x, t) = \frac{\ln t}{t+x}$.

f est définie et continue sur $]0; +\infty[\times]0; 1]$.

Pour $x > 0$, $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \ln t$ donc $\sqrt{t}f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ puis $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1]$.

Ainsi F est définie sur $]0; +\infty[$.

f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{\ln t}{(t+x)^2}$.

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. Pour $x \in [a; b]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln t|}{a^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; 1]$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que F est de classe \mathcal{C}^1 et

$$F'(x) = \int_0^1 -\frac{\ln t}{(t+x)^2} dt.$$

(b) Par intégration par parties,

$$F'(x) = \left[\ln t \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x} \right) dt$$

où la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ est choisie de sorte de s'annuler en 0 pour que l'intégration par parties présente deux convergences.

Ainsi

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x(t+x)} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}.$$

Par opérations

$$G'(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x} - \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x} = -\frac{1}{x} \ln x$$

puis

$$G(x) = G(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Or $G(1) = 2F(1)$ avec

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k \ln(t) dt.$$

Or $\int_0^1 t^k \ln(t) dt = \frac{-1}{(k+1)^2}$ donc par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient $F(1) = -\frac{\pi^2}{12}$ puis

$$G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Par décomposition en éléments simples

$$\frac{t-1}{(t+1)(t^2+2t \operatorname{ch} \theta + 1)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} \theta - 1}}{t+1} - \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} \theta - 1}(t + \operatorname{ch} \theta)}{t^2 + 2t \operatorname{ch} \theta + 1}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \frac{\ln t}{t^2 + 2t \operatorname{ch}(\theta) + 1} dt = \frac{1}{\operatorname{ch} \theta - 1} (F(1) - \frac{1}{2}G(e^\theta)) = \frac{\theta^2}{4(\operatorname{ch}(\theta) - 1)}.$$

Exercice 80 : [énoncé]

Considérons $f: (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

Pour $t \in]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est fois dérivable sur $]0; +\infty[$ f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$ car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus

$\forall x \in]0; +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux.

$\forall t \in]0; +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue.

Enfin, pour $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at}$$

avec $\varphi: t \mapsto e^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par domination sur tout segment, la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$-g'(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} t \frac{e^{-xt}}{1+t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

On peut aussi constater le résultat plus directement en procédant aux changements de variable $u = 1 + t$ puis $v = ux$ ce qui ramène l'expression étudiée à une primitive

$$g(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv$$

et on peut alors vérifier la satisfaction de l'équation différentielle.

Exercice 81 : [énoncé]

(a) Introduisons la fonction $f:]0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \frac{e^{-t}}{x+t}.$$

La fonction f est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t . Il n'est pas possible¹ de proposer une domination qui soit valable pour x parcourant l'intégralité $]0; +\infty[$.

1. En effet, la fonction $t \mapsto e^{-t}/t$ n'est pas intégrable sur $]0; +\infty[$ et est la meilleure domination possible pour $x \in]0; +\infty[$.

On raisonne par domination sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$.

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. Pour tout $x \in [a; b]$ et tout $t \in]0; +\infty[$,

$$|u(x, t)| = \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{1}{a} e^{-t} = \varphi(t) \quad \text{car } x+t \geq a.$$

La fonction φ est intégrable sur $]0; +\infty[$ puisque négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$. Par domination, on peut affirmer que F est continue sur tout segment $[a; b]$ inclus dans $]0; +\infty[$ donc continue sur $]0; +\infty[$.

(b) On fait apparaître l'ordre asymptotique de F à l'aide d'une intégration par parties.

Soit $x > 0$. Considérons les fonctions u et v de classe \mathcal{C}^1 définies sur $]0; +\infty[$ par

$$u(t) = -e^{-t} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{x+t}.$$

Le produit uv admet une limite nulle en la borne généralisée $+\infty$ et la formule d'intégration par parties généralisée donne

$$F(x) = \underbrace{\left[\frac{-e^{-t}}{x+t} \right]_0^{+\infty}}_{=1/x} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

avec convergence de l'intégrale introduite en second membre. Or

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x^2}$$

et donc

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

(c) On exprime l'intégrale par translation de la variable.

Par le changement de variable $u = x + t$, on écrit

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-(u-x)}}{u} du = \underbrace{e^x}_{\rightarrow 1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

On écrit ensuite $e^{-u} = (e^{-u} - 1) + 1$ afin d'exprimer la fonction intégrée comme somme d'une fonction prolongeable par continuité en 0 et d'une

fonction facile à intégrer. Cependant, pour séparer l'intégrale, il est nécessaire de préalablement isoler la borne $+\infty$. On écrit

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du &= \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \int_x^1 \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_x^1 \frac{1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \end{aligned}$$

La première intégrale admet une limite finie quand x tend vers 0 par valeurs supérieures car la fonction intégrée se prolonge par continuité par la valeur -1 en 0, la seconde intégrale vaut simplement $-\ln(x)$ et la dernière est une constante. On conclut

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\ln(x) + o(\ln(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Finalement, $F(x)$ équivaut à $-\ln(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Exercice 82 : [énoncé]

Posons

$$u(x, t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x$$

définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R} \times]0; 1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; 1[$.

Puisque

$$u(x, t) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t^x}{\ln t} \text{ et } u(x, t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} 1$$

la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1[$ si, et seulement si, $x > -1$.

De plus, cette fonction est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction intégrande.

On en déduit que la fonction f est définie sur $]-1; +\infty[$.

La fonction u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x.$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en t .

Pour $[a; b] \subset]-1; +\infty[$, on a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; 1[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq (1-t)t^a.$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1; +\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + C.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$$

est continue sur $]0; 1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1, elle est donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$|f(x)| \leq \int_0^1 M t^x dt = \frac{M}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit $C = 0$ puis finalement

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}.$$

Exercice 83 : [énoncé]

(a) Considérons $f: (x, t) \mapsto \frac{t^x-1}{\ln t}$ définie sur $]-1; +\infty[\times]0; 1[$.

Soit $x > -1$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; 1[$.

Quand $t \rightarrow 1^-$.

$t = 1 - h$ avec $h \rightarrow 0^+$.

$$f(x, t) = \frac{(1+h)^x - 1}{\ln(1+h)} \rightarrow x$$

et donc f est intégrable sur $[1/2; 1[$.

Quand $t \rightarrow 0^+$.

On a

$$t^x \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \in]-1; 0[. \end{cases}$$

Si $x \geq 0$, on obtient $f(x, t) \rightarrow 0$ ce qui permet un prolongement par continuité.

Si $x < 0$, on a $f(x, t) = o(t^x) = o(1/t^{-x})$ avec $-x < 1$.

Dans les deux cas, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1/2[$.

Finalement $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1[$ et donc g est définie sur $]-1; +\infty[$.

- (b) La fonction $x \mapsto f(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est dérivable donc f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^x$$

$\forall x \in]-1; +\infty[, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; 1[$

$\forall t \in]0; 1[, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $] -1; +\infty[$.

Soit $[a; b] \subset]-1; +\infty[$. Pour $x \in [a; b]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t^a = \varphi(t)$$

avec $\varphi:]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur $]0; 1[$.

Par domination sur tout segment, g est de classe \mathcal{C}^1 et

$$g(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit

$$g(x) = g(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x).$$

Exercice 84 : [énoncé]

- (a) Posons $g(x, t) = \frac{\sin xt}{t} e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$.
 $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$ donc la fonction F est bien définie sur \mathbb{R} .

$\frac{\partial g}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[, x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} et pour tout $x > 0$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = |\cos(xt)e^{-t}| = e^{-t} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par domination F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt.$$

- (b) $\cos(xt)e^{-t} = \operatorname{Re}(e^{(-1+ix)t})$ donc

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- (c) Sachant $F(0) = 0$, on obtient $F(x) = \arctan(x)$.

Exercice 85 : [énoncé]

La fonction $u(x, t) = e^{(ix-1)t}/\sqrt{t}$ définie sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$.

$t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$u(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } t^2 u(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que la fonction donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}} dt = f(x) + ig(x)$$

est définie sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur \mathbb{R} pour chaque $t \in]0; +\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t}e^{(ix-1)t}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} pour chaque $t \in]0; +\infty[$,

$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \sqrt{t}e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2 \varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par domination, on peut affirmer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{(ix-1)t} dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{2(x+i)} F(x).$$

La résolution de cette équation différentielle donne

$$F(x) = F(0) \frac{e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Enfin, sachant

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on parvient à

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2 + 1)^{1/4}}$$

d'où les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2 + 1)^{1/4}} \cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2 + 1)^{1/4}} \sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right).$$

On peut encore éventuellement « simplifier » en exploitant

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}} \text{ pour } x \in [-\pi/2; \pi/2]$$

ce qui donne

$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

et aussi

$$\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \text{signe}(x) \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}.$$

Exercice 86 : [énoncé]

$f: (x, t) \rightarrow \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
 $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

Pour $a > 0$,

$$\forall x \in [a; +\infty[\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par domination $x \mapsto F(x, y)$ est de classe C^1 et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt} dt = -\frac{1}{x}.$$

Donc $F(x, y) = -\ln x + C^{te}$ et puisque pour $x = y$, on a $F(x, y) = 0$ on obtient

$$F(x, y) = \ln y - \ln x.$$

Exercice 87 : [énoncé]

(a) Posons

$$\varphi: t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}.$$

La fonction φ est intégrable sur $]0; +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Par domination, on obtient que F est définie sur $I = \mathbb{R}$.

(b) Posons $f(x, t) = \varphi(t) \cos(xt)$.
 f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -(e^{-t} - e^{-2t}) \sin(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t} + e^{-2t} = \psi(t)$ avec ψ intégrable sur $]0; +\infty[$.

On en déduit que F est une fonction de classe C^1 et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -(e^{-t} - e^{-2t}) \sin(xt) dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(xt) dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-a+ix)t} dt \right) = \frac{x}{a^2 + x^2}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4 + x^2}{1 + x^2} \right) + C^{te}.$$

Montrons que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Par intégration par parties

$$F(x) = \left[\varphi(t) \frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \sin(xt) dt.$$

On en déduit

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par suite $C^{te} = 0$ puis

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{4 + x^2}{1 + x^2}.$$

Exercice 88 : [énoncé]

On définit $f: \mathbb{R} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt).$$

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $t^2 f(x, t) \rightarrow 0$ et quand $t \rightarrow 0^+$, $f(x, t) \rightarrow b - a$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt).$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$ et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} + e^{-bt} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable.

On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt) dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-ct} \sin(xt) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-c+ix)t} dt \right) = \frac{x}{c^2 + x^2}$$

donc

$$F'(x) = \frac{x}{x^2 + b^2} - \frac{x}{x^2 + a^2}.$$

(c) On en déduit

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \right) + Cte.$$

Pour déterminer la constante, on étudie la limite de F en $+\infty$. Posons

$$\psi(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$$

ce qui définit une fonction de classe \mathcal{C}^1 intégrable ainsi que sa dérivée sur $]0; +\infty[$.

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) \cos(xt) dt = \frac{1}{x} \left[\psi(t) \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt) dt$$

et donc

$$\left| \int_0^{+\infty} \psi(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |\psi'(t)| dt \rightarrow 0.$$

On peut conclure

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \right).$$

Exercice 89 : [énoncé]

(a) On réalise le changement de variable $u = \sqrt{t}$. On obtient $z(0) = \sqrt{\pi}$.

(b) $t \mapsto g(x, t) = \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}$ est définie, continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable.

g admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t}e^{(-1+ix)t}$$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$,

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t}e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; +\infty[$.

La fonction z est donc définie et de classe \mathcal{C}^1 avec

$$z'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{(-1+ix)t} dt = \underset{\text{ipp}}{i} \frac{1}{2(1-ix)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2(x+i)} z(x).$$

(c)

$$\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x) = C \exp \left(i \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) \right) = \frac{C e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Puisque $z(0) = \sqrt{\pi}$, on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Exercice 90 : [énoncé]

Posons

$$f(x, t) = e^{-t^2} e^{tx}.$$

La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

et donc la fonction g est définie sur \mathbb{R} .La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = te^{-t^2} e^{tx}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue.Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq |t|e^{a|t|}e^{-t^2} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur \mathbb{R} indépendant de x .On en déduit que la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 et par une intégration par parties

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} e^{tx} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} e^{tx} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-t^2} e^{tx} dt.$$

On en déduit que g est solution de l'équation différentielle

$$g'(x) - \frac{1}{2}xg(x) = 0.$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$g(x) = \lambda e^{x^2/4}.$$

Enfin $g(0) = \sqrt{\pi}$ donne $\lambda = \sqrt{\pi}$.**Exercice 91** : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x, t) = e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt).$$

La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

et donc la fonction F est définie sur \mathbb{R} .(b) La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt).$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue.Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2a \operatorname{sh}(2a|t|)e^{-t^2} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur \mathbb{R} indépendant de x .On en déduit que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 et par une intégration par parties

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt) dt = \left[-e^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt) \right]_0^{+\infty} + 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt.$$

On en déduit que F est solution de l'équation différentielle

$$F'(x) - 2xF(x) = 0.$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$F(x) = \lambda e^{x^2}$$

avec $F(0) = \sqrt{\pi}/2$.

(c) On sait

$$\forall x, t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (xt)^{2n}.$$

Posons $u_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$u_n(t) = \frac{2^{2n}}{(2n)!} (xt)^{2n} e^{-t^2}.$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt)$ elle-même continue par morceaux.Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{2^{2n} |x|^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt.$$

Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} t^{2n-1} \times t e^{-t^2} dt = \frac{2n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{2(n-1)} e^{-t^2} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{|x|^{2n}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Il y a alors convergence de la série $\sum \int |u_n|$ et donc on peut intégrer terme à terme ce qui fournit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}.$$

Exercice 92 : [énoncé]

Posons $g(x, t) = \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2}$.

$x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ,

$t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$,

$|g(x, t)| \leq \frac{\ln(1+a^2 t^2)}{1+t^2}$ sur $[-a; a]$ avec $t \mapsto \frac{\ln(1+a^2 t^2)}{1+t^2}$ intégrable.

Par domination sur tout segment, on peut donc affirmer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Il est évident que f est paire. Nous poursuivons son étude sur \mathbb{R}_+ .

$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2xt^2}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)}$ est bien définie.

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ ,

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.

Enfin $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2bt^2}{(1+a^2 t^2)(1+t^2)}$ sur $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$ avec $t \mapsto \frac{2bt^2}{(1+a^2 t^2)(1+t^2)}$ intégrable.

Par domination sur tout segment de \mathbb{R}_+^* , on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} dt$

En réalisant la décomposition en éléments simples (pour $x \neq 1$),

$f'(x) = \frac{\pi}{x+1}$ et cette relation est aussi valable pour $x = 1$ par continuité.

Sachant que $f(0) = 0$ et que f est paire, on obtient $f(x) = \pi \ln(1 + |x|)$.

Exercice 93 : [énoncé]

(a) Posons $f(x, t) = \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t))$ définie sur $]0; +\infty[\times [0; \pi/2]$.

Pour chaque $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ étant continue par morceaux sur $[0; \pi/2]$, l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie.

Pour chaque $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x \sin^2(t)}{\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)}.$$

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$.

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times [0; \pi/2], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b}{\cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)} = \varphi_{a,b}(t)$$

avec la fonction $\varphi_{a,b}: [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable.

Par domination sur tout segment, F est de classe \mathcal{C}^1 et

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x \sin^2(t)}{\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)} dt.$$

Par le changement de variable \mathcal{C}^1 bijectif $u = \tan t$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2 x}{(1+x^2 u^2)(1+u^2)} du.$$

Par décomposition en éléments simples (si $x \neq 1$)

$$\frac{2xX}{(1+x^2 X)(1+X)} = \frac{2x/(x^2-1)}{1+X} - \frac{2x/(x^2-1)}{1+x^2 X}$$

et donc

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2 u^2} du = \frac{\pi}{x+1}$$

et la relation vaut aussi pour $x = 1$ par argument de continuité.

On en déduit

$$F(x) = \pi \ln(x+1) + C^{te}.$$

Sachant $F(1) = 0$, on conclut

$$F(x) = \pi \ln\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Exercice 94 : [énoncé]

Posons

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x \cos t)}{\cos t} dt.$$

Pour $|x| > 1$, l'intégrale ne peut pas être définie.

Pour $|x| \leq 1$

En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.

Pour $x = -1$:

Quand $t \rightarrow 0^+$, $\ln(1 - \cos t) \sim 2 \ln t$

Quand $t \rightarrow 2\pi^-$, $t = 2\pi - h$, $\ln(1 - \cos t) = \ln(1 - \cos h) \sim 2 \ln h$

Pour $x = 1$, quand $t \rightarrow \pi, t = \pi + h$, $\ln(1 + \cos t) = \ln(1 - \cos h) \sim 2 \ln h$.

Finalement f est définie sur $[-1; 1]$.

Pour des raisons de symétrie,

$$f(x) = 2 \int_0^\pi \frac{\ln(1+x \cos t)}{\cos t} dt.$$

Par domination sur $[-a; a]$ avec $a < 1$, f est \mathcal{C}^1 sur $]-1; 1[$ et

$$f'(x) = 2 \int_0^\pi \frac{dt}{1+x \cos t}.$$

Par le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$,

$$f'(x) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2) + x(1-u^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = 2\pi \arcsin x$.

Exercice 95 : [énoncé]

(a) $f(x, t) = \ln(1+x \sin^2 t)$ est définie et continue sur $[0; +\infty[\times [0; \pi/2]$.

Soit $[a; b] \subset [0; +\infty[$,

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times [0; \pi/2], |f(x, t)| \leq \ln(1+b) = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $[0; \pi/2]$

Par domination sur tout segment, on obtient F est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

(b) f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin^2 t}{1+x \sin^2 t}.$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

$$\forall (x, t) \in [0; +\infty[\times [0; \pi/2], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1 = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $[0; \pi/2]$ et donc, par domination, F est de classe \mathcal{C}^1 avec

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1+x \sin^2 t} dt.$$

Par le changement de variable $u = \tan t$ \mathcal{C}^1 strictement croissant

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)}.$$

Après décomposition en éléments simples et calcul,

$$F'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}.$$

(c) On remarque que

$$\ln(1+\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$$

donc

$$F(x) = \pi \ln(1+\sqrt{1+x}) + C^{te}$$

sur \mathbb{R}_+ .

Par continuité en 0 et sachant $F(0) = 0$, on parvient à conclure.

Exercice 96 : [énoncé]

$t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$,

$x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} et pour $x \in [-a; a]$

$$\left| \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \right| \leq \frac{|\ln(a^2+t^2)| + |\ln(t^2)|}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par suite f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Il est immédiat que f est paire. Poursuivons, en étudiant f sur \mathbb{R}_+^*

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2} \right) = \frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}$$

$t \mapsto \frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$,
 $x \mapsto t \mapsto \frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}$ est continue sur \mathbb{R} et pour $x \in [a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)} \right| \leq \frac{2b}{(a^2 + t^2)(1 + t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable. Par suite f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Pour $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)} = \frac{2x}{x^2 - 1} \left(\frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{x^2 + t^2} \right)$$

donc

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)} dt = \frac{\pi}{x + 1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 1$ par continuité.

En procédant au changement de variable $u = 1/t$, on obtient $f(0) = 0$ et donc on peut conclure

$$f(x) = \pi \ln(x + 1)$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$ en exploitant un argument de continuité.

Exercice 97 : [énoncé]

(a) Posons

$$g(x, t) = \frac{\ln(1 + 2t \cos(x) + t^2)}{t}.$$

Puisque $\cos(x) \geq 0$,

$$1 + 2t \cos(x) + t^2 \geq 1 + t^2$$

donc $t \mapsto g(x, t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0; 1]$.

De plus

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2t \cos(x) + t^2)}{t} = \cos(x)$$

on peut donc prolonger $t \mapsto g(x, t)$ par continuité en 0. Par suite, $F(x)$ est bien définie.

La dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $[0; \pi/2] \times]0; 1]$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2 \sin(x)}{1 + 2t \cos(x) + t^2}$$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$,
 $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0; \pi/2]$ et

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2 = \varphi(t)$$

avec φ est intégrable. Par domination F est de classe \mathcal{C}^1 .

(b) Pour $x = 0$, $F'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^1 \frac{2 \sin(x)}{1 + 2t \cos(x) + t^2} dt \\ &= -\int_0^1 \frac{2 \sin(x)}{(t + \cos(x))^2 + \sin^2(x)} dt \\ &= -\left[2 \arctan\left(\frac{t + \cos(x)}{\sin(x)}\right) \right]_0^1. \end{aligned}$$

Or

$$\arctan\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \arctan(\tan(\pi/2 - x))$$

avec $\pi/2 - x \in]-\pi/2; \pi/2[$ donc

$$\arctan\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \pi/2 - x$$

et

$$\arctan\left(\frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)}\right) = \arctan\left(\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\right) = \pi/2 - x/2.$$

Finalement,

$$F'(x) = 2((\pi/2 - x) - (\pi/2 - x/2)) = -x.$$

(c)

$$F(0) = \int_0^1 \frac{2 \ln(1 + t)}{t} dt = 2 \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt$$

or la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} t^n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ puisque la série numérique satisfait au critère spécial ce qui permet d'écrire

$$|R_N(t)| \leq \frac{t^{n+1}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

d'où $\|R_N\|_\infty \rightarrow 0$.

Par suite

$$F(0) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

puis

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 98 : [énoncé]

(a) Posons

$$g_n(x, t) = \frac{1}{(x^2 + t^2)^n}$$

$t \rightarrow g_n(x, t)$ est définie continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ et $g_n(x, t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ donc l'intégrale définissant $I_n(x)$ existe.

(b)

$$I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \left[\frac{1}{x} \arctan \frac{t}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}.$$

(c) $\frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t) = \frac{-2nx}{(x^2 + t^2)^{n+1}}$ existe sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

$t \mapsto \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0; +\infty[$ et pour tout $0 < a < b$,

$$\forall x \in [a; b], \left| \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2nb}{(a^2 + t^2)^{n+1}} = \varphi_{a,b}(t)$$

avec $\varphi_{a,b}$ intégrable sur \mathbb{R}_+ . Par domination sur tout segment, I_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$ puis sur \mathbb{R}_+^* et

$$I_n'(x) = -2nx I_{n+1}(x).$$

(d) $I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n+1}}$ avec $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda_{n+1} = \frac{2n+1}{2n} \lambda_n$ d'où

$$\lambda_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \pi.$$

Exercice 99 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$,

$t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $O(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur \mathbb{R}_+

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$,

$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0; +\infty[$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$, donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

(b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.

Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

Exercice 100 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x, t) = \frac{e^{-xt} \sin t}{t}$$

définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable car

$$f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1 \quad \text{et} \quad t^2 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t).$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $]0; +\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient F de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt.$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{it} dt \right)$$

on obtient

$$F'(x) = - \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) On en déduit

$$F(x) = - \arctan x + C^{te} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

Montrons $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. On a $|\sin t| \leq t$ pour tout $t > 0$ et donc

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

(c)

Exercice 101 : [énoncé]

(a) Introduisons la fonction $u:]-1; +\infty[\times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln(t)}.$$

Pour chaque $x > -1$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; 1[$.

Pour obtenir un équivalent de $t^x - 1$ lorsque t tend vers 0^+ , il est nécessaire de discuter selon le signe de x .

La fonction $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1/2[$. En effet, si $x \geq 0$,

$$\frac{t^x - 1}{\ln(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{car} \quad t^x \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et, si $x < 0$,

$$\frac{t^x - 1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t^x}{\ln(t)} = o(t^x) = o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right) \quad \text{avec} \quad -x < 1.$$

La fonction $t \mapsto u(x, t)$ est aussi intégrable sur $[1/2; 1[$ car il est possible de la prolonger par continuité en 1 puisque

$$\frac{t-1}{\ln(t)} t^x \underset{t \rightarrow 1^-}{=} \frac{h}{\ln(1+h)} (1+h)^x \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{h}{h} 1^x \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 1.$$

La fonction f est donc bien définie sur $]-1; +\infty[$.

(b) Pour tout $t \in]0; 1[$, la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 et la dérivée partielle donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{x \ln(t)} - 1}{\ln(t)} \right) = e^{x \ln(t)} = t^x$$

est continue par morceaux en la variable t . Il n'est pas possible de proposer une domination de la dérivée partielle qui soit valable pour x parcourant l'intégralité $]-1; +\infty[$.

On raisonne par domination sur tout segment inclus dans $]-1; +\infty[$.

Soit $[a; b]$ un segment inclus dans $] -1; +\infty[$. Pour tout $x \in [a; b]$ et tout $t \in]0; 1[$,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = t^x \leq t^a = \frac{1}{t^{-a}} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable car $-a < 1$. Par domination, on peut affirmer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment $[a; b]$ inclus dans $] -1; +\infty[$ donc de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1; +\infty[$. De plus, pour tout $x > -1$,

$$f'(x) = \int_0^1 t^x dt = \left[\frac{1}{x+1} t^{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1}.$$

Par intégration, il existe une constante C réelle telle que, pour tout $x > -1$,

$$f(x) = \ln(x+1) + C.$$

Par intégration de la fonction nulle, on remarque $f(0) = 0$ ce qui détermine la valeur de C . Finalement,

$$F(x) = \ln(x+1) \quad \text{pour tout } x > -1.$$

Exercice 102 : [énoncé]

$S \times [a; b]$ est compact et toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue. Étudions la continuité de F en $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons $S = [\alpha - 1; \alpha + 1]$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, t), (x', t') \in S \times [a; b], \|(x, t) - (x', t')\|_\infty \leq \eta \implies |f(x, t) - f(x', t')| \leq \varepsilon. \quad \text{On a donc}$$

Donc pour $|x - \alpha| \leq \eta$, on a

$$|F(x) - F(\alpha)| \leq \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b - a).$$

Ainsi F est continue en α .

$(x, t) \mapsto e^{xt}$ est continue par opérations donc g l'est aussi par intégration sur un segment.

Pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ et $g(0) = 1$.

Sans difficultés, on vérifie g est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 103 : [énoncé]

Réalisons le changement de variable $t = u(x) + \theta(v(x) - u(x))$

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt = (v(x) - u(x)) \int_0^1 f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x))) d\theta.$$

Considérons la fonction

$$g: (x, \theta) \mapsto f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x))).$$

Pour $[a; b] \subset I$, la fonction g est continue sur le compact $[a; b] \times [0; 1]$ et donc bornée. Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x, \theta) \in [a; b] \times [0; 1], |g(x, \theta)| \leq M = \varphi(\theta).$$

La fonction φ est intégrable sur $[0; 1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 g(x, \theta) d\theta.$$

On en déduit la continuité de la fonction étudiée par produit.

Exercice 104 : [énoncé]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt \stackrel{t=xu}{=} x \int_0^1 f'(xu) du.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \int_0^1 f'(xu) du.$$

Posons $h(x, u) = f'(xu)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$.

La fonction h admet des dérivées partielles $\frac{\partial^n h}{\partial x^n}$ à tout ordre n avec

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, u) = u^n f^{(n+1)}(xu).$$

Celles-ci sont continues en x et continues par morceaux en u .

Soit $[-a; a] \subset \mathbb{R}$. Puisque la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[-a; a]$, elle y est bornée et donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x, u) \in [-a; a] \times [0; 1], \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, u) \right| \leq M = \varphi(u).$$

Puisque la fonction φ est intégrable, on peut affirmer par domination sur tout segment, que la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 f'(xu) \, du$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\int_0^1 f'(xu) \, du \right) = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(xu) \, du.$$

On en déduit que la fonction g se prolonge en une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec

$$g^{(n)}(0) = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(0) \, du = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 105 : [énoncé]

- (a) On applique la formule de Taylor reste-intégrale à f en a .
- (b) On réalise le changement de variable $t = a + \theta(x - a)$ et l'on obtient

$$f(x) = (x - a)^\alpha \int_0^1 \frac{(1 - \theta)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} f^{(\alpha)}(a + \theta(x - a)) \, d\theta.$$

Posons

$$h(x, \theta) = \frac{(1 - \theta)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} f^{(\alpha)}(a + \theta(x - a)).$$

La fonction h admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, \theta) = \frac{(1 - \theta)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} (x - a)^k f^{(\alpha+k)}(a + \theta(x - a)).$$

Celles-ci sont continues en x et continues par morceaux en θ .

Soit $[a - b; a + b] \subset \mathbb{R}$. La fonction $f^{(\alpha+k)}$ est continue sur ce segment et y est donc bornée par un certain M .

Puisque

$$\forall x \in [a - b; a + b], \forall \theta \in [0; 1], a + \theta(x - a) \in [a - b; a + b]$$

on a

$$\forall (x, \theta) \in [a - b; a + b] \times [0; 1], \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, \theta) \right| \leq M = \varphi(\theta)$$

avec φ fonction intégrable sur $[0; 1]$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que la fonction

$$g: x \mapsto \int_0^1 \frac{(1 - \theta)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} f^{(\alpha)}(a + \theta(x - a)) \, d\theta$$

est de classe \mathcal{C}^∞ .

Exercice 106 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$, on écrit

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos t \, dt \stackrel{t=xs}{=} \int_0^1 \cos(xs) \, ds.$$

La relation obtenue vaut aussi pour $x = 0$.

Introduisons la fonction $u: \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u(x, s) = \cos(xs).$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable en x avec

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, s) = s^n \cos\left(xs + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Cette dérivée partielle est dominée par 1 qui est intégrable.

Par théorème de domination, la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec

$$f^{(n)}(x) = \int_0^1 s^n \cos\left(xs + \frac{n\pi}{2}\right) \, ds$$

et donc

$$|f^{(n)}(x)| \leq \int_0^1 s^n \, ds = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 107 : [énoncé]

- (a) $t \mapsto g(x, t) = e^{(-1+ix)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.

Puisque $t \mapsto |g(x, t)| = e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, la fonction z est bien définie.

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = it^2 e^{(-1+ix)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0; +\infty[$,
 $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t^2 e^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0; +\infty[$.

La fonction z est donc définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec

$$z'(x) = \int_0^{+\infty} \underset{\text{ipp}}{it^2 e^{(-1+ix)t^2}} \, dt = -\frac{1}{2(x+i)} z(x).$$

(b) En multipliant par la quantité conjuguée

$$\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x) = C \exp\left(i \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1)\right) = \frac{C e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Puisque $z(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{2(x^2+1)^{1/4}}.$$

Exercice 108 : [énoncé]

(a) Posons $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \frac{e^{itx}}{1+t^2}.$$

La fonction f est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $[0; +\infty[$.

On en déduit que φ est définie et continue sur \mathbb{R} .

(b) Par intégration par parties

$$\varphi(x) = -\frac{1}{ix} + \frac{1}{ix} \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt.$$

La fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en vertu de la domination

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} \right) \right| = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{2}{1+t^2}.$$

On en déduit que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* avec

$$\varphi'(x) = \frac{1}{ix^2} - \frac{1}{ix^2} \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt.$$

Or par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{e^{itx}}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} + ix \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

donc

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2} e^{itx} dt.$$

Enfin, une dernière intégration par parties donne

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} \left[-\frac{2t}{1+t^2} e^{itx} \right]_0^{+\infty} + i \int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2} e^{itx} dt$$

et la relation voulue...

(c) Par le changement de variable $u = tx$, on obtient l'expression proposée.

On peut décomposer

$$\varphi'(x) = i \int_0^1 \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} du + \int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} du.$$

D'une part, par intégration par parties

$$\int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} du = \left[\frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2} e^{iu} du$$

avec

$$\left[\frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} \right]_1^{+\infty} = -\frac{e^i}{x^2+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -e^i$$

et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2} e^{iu} du \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2} du = \frac{1}{x^2+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1.$$

D'autre part

$$\int_0^1 \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} du = \int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2} du + \int_0^1 \frac{u(e^{iu}-1)}{x^2+u^2} du$$

avec

$$\int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2} du = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+u^2) \right]_0^{x \rightarrow 0^+} \sim \ln x$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{u(e^{iu}-1)}{x^2+u^2} du \right| \leq \int_0^1 \frac{|e^{iu}-1|}{u} du < +\infty.$$

Au final

$$\varphi'(x) = i \ln x + o(\ln x) + o(1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} i \ln x.$$

(d) En vertu de ce qui précède

$$\operatorname{Im}(\varphi'(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x \rightarrow -\infty.$$

On en déduit que la fonction réelle $\operatorname{Im} \varphi$ n'est pas dérivable en 0, il en est a fortiori de même de φ .

Exercice 109 : [énoncé]

Posons $u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$.

(a) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc intégrable sur $[0; +\infty[$. La fonction f est définie sur \mathbb{R} .

(b) La fonction $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ et $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

Pour $x \in [0; +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2}$$

avec $t \mapsto te^{-t^2}$ intégrable sur $[0; +\infty[$, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences,

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} xe^{-t^2} \cos(xt) dt = -\frac{1}{2} x f(x)$$

f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $f(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

(c) On peut écrire

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2} dt.$$

Posons $u_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2}$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

La série $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \cos(xt)$ elle aussi continue par morceaux.

Les fonctions u_n sont intégrables sur \mathbb{R}_+ et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt.$$

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{2n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{2(n-1)} e^{-t^2} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Cette quantité étant sommable, on peut intégrer terme à terme et on retrouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

Exercice 110 : [énoncé]

Posons $u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$.

La fonction u est définie sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$ et admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -te^{-t^2} \sin(xt)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0; +\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.

$\forall t \in [0; +\infty[, x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

Enfin

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0; +\infty[$.

Par domination, la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 et

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

Procédons à une intégration par parties avec les fonctions \mathcal{C}^1

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{-t^2} \text{ et } v(t) = \sin(xt).$$

Puisque le produit uv converge en 0 et $+\infty$, l'intégration par parties généralisée est possible et

$$g'(x) = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} xe^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

Ainsi on obtient

$$g'(x) = -\frac{1}{2}xg(x)$$

g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $g(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

Exercice 111 : [énoncé]

Posons $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ car

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$ car

$$t^a (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ pour } a \in]1-x; 1[\text{ et } t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $[a; b] \subset]0; +\infty[$,

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq (\ln t)^k (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t} = \varphi(t)$$

car

$$t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1} \text{ que } t \leq 1 \text{ ou } t \geq 1.$$

La fonction φ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$

Exercice 112 : [énoncé]

(a) Posons $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable car

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction Γ est donc définie sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $t \in]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^*

Pour $x \in [a; b] \subset]0; +\infty[$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ ou $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ selon que $t \leq 1$ ou $t \geq 1$ et donc

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, |f(x, t)| \leq f(a, t) + f(b, t) = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable et donc, par domination sur tout segment, Γ est continue sur $]0; +\infty[$.

car

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Pour $k = 1$ ou 2.

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \text{ existe et } \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t}.$$

Pour tout $x > 0 : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$ car

$$t^a \ln(t) t^{x-1} e^{-t} \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ pour } a \in]1-x; 1[\text{ et } t^2 \times \ln(t) t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t .

Pour tout $[a; b] \subset]0; +\infty[$

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq (\ln(t))^2 (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t} = \varphi(t).$$

Par des arguments analogues aux précédents, on obtient que φ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ avec

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(c) La dérivée seconde de $\ln \circ \Gamma$ est du signe de

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{+\infty} \sqrt{t^{x-1}e^{-t}} \sqrt{(\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}} dt \right) \\ & \leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t} dt \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

et donc

$$(\ln \circ \Gamma)'' \geq 0.$$

Finalement $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe.

Exercice 113 : [énoncé]

(a) Puisque $\ln(1+u) \leq u$, on a

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{(n-1)t}{n}\right) = e^{-t}e^{t/n} \leq e \cdot e^{-t}.$$

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\ln(t)e^{-t}$ est limite simple de la suite de fonction (u_n)

définie par $u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ si $t \in]0; n[$ et $u_n(t) = 0$ sinon.

Puisque $|\ln(t)u_n(t)| \leq e \cdot \ln(t)e^{-t}$, par convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt.$$

(c) Par le changement de variable $u = nt$

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt = \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \ln(nu) du$$

avec

$$\int_0^1 n(1-u)^{n-1} \ln(nu) du = \ln n + \int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du$$

et

$$\int_\varepsilon^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du = \left[\ln(u)(1 - (1-u)^n) \right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du.$$

On notera que la fonction $u \mapsto n(1-u)^{n-1}$ est primitivée en $(1 - (1-u)^n)$ qui s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties donne à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du = \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du.$$

(d) Par le changement de variable $u = 1 - v$

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \int_0^1 \frac{v^n - 1}{v-1} dv = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k dv$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1).$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt = -\gamma.$$

Exercice 114 : [énoncé]

(a) Posons $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ car

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

La fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$ car

$$t^a (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ pour } a \in]1-x; 1[\text{ et } t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour $[a; b] \subset]0; +\infty[$,

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq (\ln t)^k (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t} = \varphi(t)$$

car

$$t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1} \text{ que } t \leq 1 \text{ ou } t \geq 1.$$

La fonction φ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$

(b) Par intégration par parties avec $u'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = t^x$, on obtient

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

Sachant $\Gamma(1) = 1$, on obtient par récurrence $\Gamma(n + 1) = n!$.

(c) Par le changement de variable proposé

$$\Gamma(n + 1) = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy$$

avec

$$f_n(y) = 0 \text{ sur }]-\infty; -\sqrt{n}], f_n(y) = e^{-y\sqrt{n}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \text{ sur }]-\sqrt{n}; +\infty[.$$

Sur $]-\sqrt{n}; 0]$, une étude fonctionnelle montre $n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leq -\frac{y^2}{2}$

qui donne $0 \leq f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$.

Sur $[0; +\infty[$, une étude fonctionnelle montre

$n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leq -y + \ln(1 + y)$ pour $t \geq 1$. Cela donne

$0 \leq f_n(y) \leq (1 + y)e^{-y}$.

(d) La fonction

$$\varphi: y \rightarrow \begin{cases} e^{-y^2/2} & \text{si } y \leq 0 \\ (1 + y)e^{-y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est intégrable sur \mathbb{R} .

Quand $n \rightarrow +\infty$, en réalisant un développement limité du contenu de l'exponentielle

$$f_n(y) = e^{-y\sqrt{n} + n \ln(1 + \frac{y}{\sqrt{n}})} \rightarrow e^{-y^2/2}.$$

Par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$$

d'où

$$\Gamma(n + 1) = n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}.$$

Exercice 115 : [énoncé]

(a) La fonction Γ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f: t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Puisque $t^2 f(t) = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, la fonction f est assurément intégrable sur $[1; +\infty[$.

De plus, $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si, et seulement si, $x - 1 > -1$ i.e. $x > 0$.

Ainsi f est intégrable sur $]0; +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

Enfin, la fonction f étant positive, l'intégrabilité équivaut à l'existence de l'intégrale.

(b) Par intégration par parties

$$I_n(x) = \left[\frac{t^x}{x} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right]_0^n + \int_0^n \frac{t^x}{x} \frac{n}{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt.$$

En répétant l'opération

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)n^n} \int_0^n t^{x+n-1} dx$$

et finalement

$$I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

(c) Quand $n \rightarrow +\infty$

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \rightarrow e^{-t}.$$

Considérons la suite des fonctions

$$f_n: t \mapsto \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0; n[\\ 0 & \text{si } t \in [n; +\infty[. \end{cases}$$

Soit $t > 0$ fixé. Pour n assez grand $t \in]0; n[$ et

$$f_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow t^{x-1} e^{-t}.$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f introduite dans la première question.

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.

Enfin, pour $t \in]0; n[$, on a

$$|f_n(t)| = t^{x-1} \exp(n \ln(1 - t/n)) \leq t^{x-1} e^{-t} = f(t)$$

car il est connu $\ln(1 + u) \leq u$ pour tout $u > -1$. On a aussi $|f_n(t)| \leq f(t)$ pour $t \in [n; +\infty[$ et donc

$$\forall t \in]0; n[, |f_n(t)| \leq f(t).$$

La fonction f étant intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

on peut conclure

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Exercice 116 : [énoncé]

Notons que $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ est bien définie.

Pour tout $t \in]0; 1[$,

$$t^{x-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \int_{]0;1[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; 1[$ et est de somme $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ continue par morceaux.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0; 1[$ et

$$\int_{]0;1[} |f_n(t)| dt = \frac{1}{n!(x+n)}.$$

La série $\sum \int_{]0;1[} |f_n|$ converge donc on peut intégrer terme à terme

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

Exercice 117 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(1+t)}}$$

définie sur $[0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

Soit $x \geq 0$. L'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et

$$0 \leq f(x, t) \leq \frac{1}{\sqrt{t(1+t)}}$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{t(1+t)}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t(1+t)}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$$

donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et l'intégrale généralisée définissant $F(x)$ est bien convergente.

(b) Pour chaque $t \in]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-xt}}{\sqrt{t(1+t)}}.$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$

Pour tout $t \in]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0; +\infty[$

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. Pour $(x, t) \in [a; +\infty[\times]0; +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t} e^{-at} = \varphi(t)$$

avec $\varphi:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable.

Par domination sur tout segment, F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{\sqrt{t(1+t)}} dt.$$

On constate alors

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \underset{xt=u}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

(c) On a

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}} \underset{t=u^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2du}{1+u^2} = \pi$$

et

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt = \frac{I}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc, par encadrement, $F \xrightarrow{+\infty} 0$.

(d) Après résolution (avec méthode de variation de la constante) de l'équation

$$y - y' = \frac{I}{\sqrt{x}}$$

avec la condition initiale $y(0) = \pi$, on obtient

$$\forall x \geq 0, F(x) = e^x \left(\pi - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right).$$

La nullité de la limite de F en $+\infty$ impose alors

$$I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pi$$

et donc

$$I = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 118 : [\[énoncé\]](#)

(a) La fonction

$$\varphi: t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

est intégrable sur $]0; +\infty[$ car

$$\varphi(t) = O(1/t^2) \text{ quand } t \rightarrow +\infty \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1/2.$$

La fonction $g: (x, t) \mapsto e^{-xt} \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times]0; +\infty[$ et dominée par φ donc F est continue.

De plus la fonction φ est bornée donc, pour $x > 0$

$$|F(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^x e^{-xt} dt = \frac{\|\varphi\|_\infty}{x}$$

et on en déduit que F tend vers 0 en $+\infty$.

(b) Les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}_+^* \times]0; +\infty[$.
 $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$.
 Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 2e^{-at} = \psi(t).$$

La fonction ψ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par domination sur tout segment, F est de classe \mathcal{C}^2 et

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1 - \cos t) dt = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

(c) On a

$$F'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

car $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et

$$F(x) = x \ln x - x \ln \sqrt{x^2 + 1} - \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

car $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Par continuité, on obtient $F(0) = \pi/2$.

Par intégrations par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(t/2)}{t^2} dt = \left[-\frac{2 \sin^2(t/2)}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 119 : [\[énoncé\]](#)

(a) Posons $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = 1/t$.

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et le produit uv converge en 0 et $+\infty$:

$$u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2} \rightarrow 0 \text{ et } u(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(1/t) \rightarrow 0.$$

Par intégration par parties généralisée, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$$

sont de même nature. Or

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

converge car

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Cela permet de conclure à la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

(b) Posons

$$f(x, t) = \frac{e^{-xt} \sin t}{t}$$

définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable car

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad t^2 f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, puisque $|\sin t| \leq t$ pour tout $t > 0$, on a

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(c) f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t).$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $]0; +\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient F de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt.$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{it} dt \right)$$

on obtient

$$F'(x) = - \frac{1}{1+x^2}.$$

(d) On en déduit

$$F(x) = - \arctan x + C^{te} \text{ sur }]0; +\infty[$$

et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Par continuité en 0,

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 120 : [énoncé]

(a) On réalise le changement de variable $t = u + n\pi$:

$$u_n(x) = (-1)^n \int_0^\pi e^{-x(u+n\pi)} \frac{\sin u}{u+n\pi} du.$$

Ici

$$g_n(x, u) = e^{-x(u+n\pi)} \frac{\sin u}{u+n\pi}.$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $u \in [0; \pi]$, $g_n(x, u) \geq 0$ et $g_{n+1}(x, u) \leq g_n(x, u)$ donc $u_n(x) = (-1)^n |u_n(x)|$ avec $(|u_n(x)|)_{n \geq 0}$ décroissante. De plus

$$|u_n(x)| \leq \int_0^\pi \frac{du}{n\pi} = \frac{1}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

donc $|u_n(x)| \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$. Par application du critère spécial, la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge et

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

ce qui donne la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$.

(c) La fonction g_n est continue en x , continue par morceaux en u et

$$\forall x \in [0; +\infty[\times [0; \pi], |g_n(x, u)| \leq |\operatorname{sinc} u| \leq 1.$$

Par domination, les fonctions u_n sont continues.

Comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur \mathbb{R}_+ , la fonction U est continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, par sommation d'intégrales contiguës

$$U(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

avec cette intégrale qui est définie quand $x > 0$ et connue convergente quand $x = 0$.

(d) Posons

$$h(x, t) = \frac{e^{-xt} \sin t}{t}$$

définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable car

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1 \text{ et } t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

h admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = e^{-xt} \sin(t).$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $]0; +\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient U de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$U'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt.$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{it} dt \right)$$

on obtient

$$U'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

(e) En intégrant

$$U(x) = C - \arctan x \quad \text{sur }]0; +\infty[.$$

Or

$$|U(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc $C = \pi/2$.

Par continuité en 0,

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 121 : [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, $t^2 \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$.

Pour $x = 0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente bien que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.

(b) Pour $x \in [a; b] \subset]0; +\infty[$,

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right) \right| \leq e^{-ax} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

(c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t) e^{-tx} dt = \operatorname{Im} \left(- \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

donc $f(x) = C - \arctan x$.

Or

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

(d) En découpant l'intégrale, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt.$$

Posons

$$u_n(t) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt.$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établit que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction f , est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 122 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $[0; +\infty[\times]0; +\infty[$,
 $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $O(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur \mathbb{R}_+

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $[0; +\infty[\times]0; +\infty[$,
 $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0; +\infty[$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$,
 donc F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

(b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.

Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

(c) En intégrant par parties, on obtient $\pi \ln 2$.

Exercice 123 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x, t) = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}.$$

La fonction f est définie et continue sur $] -1; +\infty[\times [0; 1]$.
 Pour $t \in [0; 1]$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}.$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $] -1; +\infty[\times [0; 1]$.
 Par intégration sur un segment, on peut affirmer que la fonction

$$F: x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$$

est définie, de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} dt.$$

Par décomposition en éléments simples (en la variable t)

$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{-x}{(x^2+1)(1+xt)} + \frac{x+t}{(x^2+1)(1+t^2)}$$

donc

$$F'(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x^2+1} + \frac{\pi}{4} \frac{x}{x^2+1} + \frac{\ln 2}{2} \frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque $F(0) = 0$, on peut écrire

$$F(x) = \int_0^x F'(t) dt = -\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t^2+1} dt + \frac{\pi}{8} \ln(x^2+1) + \frac{\ln 2}{2} \arctan x.$$

(b) Pour $x = 1$, la relation précédente donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

Exercice 124 : [\[énoncé\]](#)

(a) Posons

$$f(x, \theta) = \frac{\arctan(x \tan \theta)}{\tan \theta}.$$

La fonction \arctan étant définie sur \mathbb{R} , la fonction f est définie pour tout couple (x, θ) de $\mathbb{R} \times]0; \pi/2[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est continue par morceaux sur $]0; \pi/2[$ et

$$f(x, \theta) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} x \quad \text{et} \quad f(x, \theta) \xrightarrow{x \rightarrow (\pi/2)^-} 0.$$

L'intégrale est faussement généralisée en ses deux bornes et donc converge.

Finalement, F est définie sur \mathbb{R} .

(b) La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta) = \frac{1}{1+x^2 \tan^2 \theta}.$$

Cette dérivée partielle est continue en x , continue par morceaux en θ et, pour tout $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times]0; \pi/2[$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, \theta) \right| \leq 1 = \varphi(\theta)$$

avec φ intégrable. Par domination, F est de classe \mathcal{C}^1 et

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+x^2 \tan^2 \theta}.$$

On poursuit le calcul à l'aide du changement de variable \mathcal{C}^1 bijectif $t = \tan \theta$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)}.$$

Pour $x^2 \neq 0$ et $x^2 \neq 1$, on décompose en éléments simples la fraction

$$\frac{1}{(1+x^2 X)(1+X)}$$

et on en déduit en prenant t^2 au lieu de X

$$\frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} = \frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+x^2 t^2} + \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+t^2}.$$

On peut alors poursuivre le calcul de $F'(x)$. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$,

$$F'(x) = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

La fonction F' étant continue et paire, on obtient l'expression sur \mathbb{R}

$$F'(x) = \frac{1}{|x|+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, sachant $F(0) = 0$, on conclut

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(c) Pour $x = 1$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Par intégration par parties généralisée

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta = \underbrace{\left[-\theta \ln(\sin \theta) \right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$