

Fonctions usuelles

Radicaux

Exercice 1 [05020] [Correction]

Résoudre l'équation d'inconnue x réelle

$$(1+x)^{1/3} + (1-x)^{1/3} = 5^{1/3}.$$

Logarithmes

Exercice 2 [01827] [Correction]

Établir, pour tout $x \geq 0$, l'encadrement

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 3 [01828] [Correction]

(a) Montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leq x.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 4 [01829] [Correction]

Montrer que pour tout $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 5 [01830] [Correction]

Soit $0 < a \leq b$. On pose $f: x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur \mathbb{R}_+^* .

Étudier la monotonie de f et en déduire que $\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$.

Exercice 6 [01831] [Correction]

Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier $n > 0$ est $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$.

Exercice 7 [03626] [Correction]

(Lemme de Gibbs)

(a) Justifier

$$\forall x > 0, \ln x \leq x - 1.$$

(b) Soient (p_1, \dots, p_n) et (q_1, \dots, q_n) des n -uplets formés de réels strictement positifs vérifiant

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1.$$

Établir

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i.$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité?

Puissances et exponentielles

Exercice 8 [01833] [Correction]

Simplifier a^b pour $a = \exp x^2$ et $b = \frac{1}{x} \ln x^{1/x}$.

Exercice 9 [01834] [Correction]

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes :

(a) $(a^b)^c = a^{bc}$

(c) $a^{2b} = (a^b)^2$

(e) $(a^b)^c = a^{(b^c)}$

(b) $a^b a^c = a^{bc}$

(d) $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$

(f) $(a^b)^c = (a^c)^b$?

Exercice 10 [01835] [Correction]

Comparer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x.$$

Exercice 11 [01836] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

Exercice 12 [01837] [Correction]

Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^x + e^{1-x} = e + 1$ (b) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ (c) $\frac{2^{2x} - 3^{x-1/2}}{3^{x+1/2} - 2^{2x-1}} =$

Exercice 13 [01838] [Correction]

Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$

Exercice 14 [03652] [Correction]

Résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ e^a + e^b + e^c = 3 \end{cases}$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Fonctions trigonométriques

Exercice 15 [01839] [Correction]Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin x \leq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.**Exercice 16** [01840] [Correction]

Développer :

(a) $\cos(3a)$ (b) $\tan(a + b + c)$

Exercice 17 [01841] [Correction]Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ en observant $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.**Exercice 18** [01842] [Correction]

Simplifier

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$$

En déduire la valeur de

$$\tan \frac{\pi}{24}$$

Exercice 19 [01845] [Correction]Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b \neq 0 [2\pi]$, calculer simultanément

$$\sum_{k=0}^n \cos(a + kb) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(a + kb).$$

Exercice 20 [01846] [Correction]Soit $x \neq 0 [2\pi]$.

(a) Montrer

$$\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(b) En exploitant les nombres complexes.

Exercice 21 [01847] [Correction]Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$ (d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
 (b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$ (e) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}$
 (c) $\sin x + \sin 3x = 0$ (f) $2 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos 2x = 0$

Exercice 22 [01848] [Correction]

Résoudre l'équation

$$\tan x \tan 2x = 1.$$

Exercice 23 [02645] [Correction]

Calculer

$$\sum_{k=1}^4 \cos^2 \frac{k\pi}{9}$$

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 24 [01849] [Correction]

Simplifier les expressions suivantes :

- (a) $\cos(2 \arccos x)$ (c) $\sin(2 \arccos x)$ (e) $\sin(2 \arctan x)$
 (b) $\cos(2 \arcsin x)$ (d) $\cos(2 \arctan x)$ (f) $\tan(2 \arcsin x)$

Exercice 25 [01850] [Correction]

Simplifier la fonction $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ sur son intervalle de définition.

Exercice 26 [01851] [Correction]

Simplifier

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 27 [01853] [Correction]

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ à l'aide d'un changement de variable judicieux.

Exercice 28 [01854] [Correction]

Étudier les fonctions suivantes afin de les représenter :

- (a) $f: x \mapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$ (c) $f: x \mapsto \arccos \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
 (b) $f: x \mapsto \arcsin(\sin x) + \frac{1}{2} \arccos(\cos 2x)$ (d) $f: x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Exercice 29 [01855] [Correction]

Simplifier :

- (a) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$.
 (b) $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2 + \sqrt{3})$.
 (c) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65}$.

Exercice 30 [01858] [Correction]

Simplifier $\arctan a + \arctan b$ pour $a, b \geq 0$.

Exercice 31 [01859] [Correction]

Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\arctan(p+1) - \arctan(p).$$

Étudier la limite de la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{p=0}^n \arctan \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

Fonctions hyperboliques

Exercice 32 [01861] [Correction]

Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{sh} x \geq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 33 [01862] [Correction]

Soit $y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Montrer que $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \tan \frac{y}{2}$, $\operatorname{th} x = \sin y$ et $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercice 34 [01864] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ en calculant

$$P_n(x) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Exercice 35 [01865] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, observer

$$\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(nx) \operatorname{ch}((n+1)x)}.$$

Calculer

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((k+1)x)}.$$

Exercice 36 [01866] [[Correction](#)]

Soient a et α deux réels.

Résoudre le système d'inconnues x et y

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2a \operatorname{ch} \alpha \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2a \operatorname{sh} \alpha. \end{cases}$$

Exercice 37 [01869] [[Correction](#)]

Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan(\operatorname{sh} x)| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

L'équation étudiée a du sens pour $x \in [-1; 1]$.

On élève les deux membres de l'équation au cube en employant la formule de développement

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

Soit $x \in [-1; 1]$ solution de l'équation étudiée. Par élévation au cube des deux membres de l'équation,

$$2 + 3(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3} \underbrace{\left((1+x)^{1/3} + (1-x)^{1/3} \right)}_{=5^{1/3}} = 5$$

ce qui donne après simplification

$$(1-x^2)^{1/3} = 5^{-1/3}.$$

Après une nouvelle élévation au cube, on parvient à $x^2 = 4/5$ et donc

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Inversement¹, on vérifie par substitution dans l'équation que ces réels sont solutions en écrivant

$$2 + \sqrt{5} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{5} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^3.$$

Exercice 2 : [énoncé]

L'étude des variations des fonctions $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ montre que celles-ci sont croissantes sur \mathbb{R}_+ , puisqu'elles s'annulent en 0, on peut conclure.

Exercice 3 : [énoncé]

1. Cette vérification est nécessaire : les mêmes calculs menés avec un second membre égal à -1 au lieu de $5^{1/3}$ conduit à la valeur $x = 0$ qui n'est pas solution.

(a) Posons $f:]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$. f est dérivable, $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{x}{1+x}$.

Le tableau de variation de f donne f positive.

(b) D'une part

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \leq e^{n \times \frac{1}{n}} \leq e$$

et d'autre part

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln(1 - \frac{1}{n})} \geq e$$

car

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}.$$

Exercice 4 : [énoncé]

On a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

or

$$a + b = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \geq 2\sqrt{ab}$$

donc

$$\ln \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geq 0.$$

Exercice 5 : [énoncé]

$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx) \ln(1+bx)^2}$ avec $g(x) = a(1+bx) \ln(1+bx) - b(1+ax) \ln(1+ax)$.
 $g(0) = 0$ et $g'(x) = ab \ln \frac{1+bx}{1+ax} \geq 0$ donc g est positive et par suite f croissante.

$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ donc $f\left(\frac{1}{b}\right) \leq f\left(\frac{1}{a}\right)$ ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 6 : [énoncé]

Notons m le nombre de décimale dans l'écriture de n .

On a $10^{m-1} \leq n < 10^m$ donc $m-1 \leq \log_{10} n < m$ puis $m = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) Une étude de la fonction $x \mapsto \ln x - x + 1$ assure l'inégalité écrite.
 De plus on observe qu'il y a égalité si, et seulement si, $x = 1$.

(b) On étudie la différence

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i}.$$

Par l'inégalité précédente

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) = 0.$$

De plus il y a égalité si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq i \leq n, p_i = q_i.$$

Cette inégalité est fameuse lorsqu'on s'intéresse à l'entropie d'une source d'information...

Exercice 8 : [énoncé]

$$(\exp x^2)^{\frac{\ln x^{1/x}}{x}} = x.$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) c) f)

Exercice 10 : [énoncé]

Quand $x \rightarrow 0^+$

$$x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln x) = \exp(\exp(x \ln x) \ln x) \rightarrow 0$$

et

$$(x^x)^x = \exp(x \ln x^x) = \exp(x^2 \ln x) \rightarrow 1.$$

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}} = 1$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0.$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) $\mathcal{S} = \{0, 1\}$

(b) $\mathcal{S} = \{0, 1, 4\}$

(c) Obtenir $2^{2x-3} = 3^{x-3/2}$ puis $\mathcal{S} = \{3/2\}.$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) $x = 1/2, y = \sqrt{2}/5$

(b) Obtenir un système somme/produit en x et $2y$ puis le résoudre.

Exercice 14 : [énoncé]

Il est clair que le triplet nul est solution de ce système.

Inversement, soit (a, b, c) solution. Posons $x = e^a, y = e^b$ de sorte que $e^c = e^{-(a+b)} = 1/xy.$

On a donc $x, y > 0$ et

$$x + y + \frac{1}{xy} = 3.$$

Pour $y > 0$ fixé, étudions la fonction $f: x \mapsto x + y + 1/xy.$

Cette fonction est dérivable et admet un minimum strict en $x = 1/\sqrt{y}$ valant

$$g(y) = y + 2/\sqrt{y}.$$

La fonction g est dérivable et admet un minimum strict en $y = 1$ valant $g(1) = 3.$

On en déduit que si $(x, y) \neq (1, 1)$ alors $f(x, y) > 3$ et donc

$$f(x, y) = 3 \implies x = y = 1.$$

On peut alors conclure $a = b = c = 0.$

Exercice 15 : [énoncé]

Posons $f(x) = x - \sin x$ définie sur $\mathbb{R}_+.$

f est dérivable, $f' \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc f est positive.

Posons $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}.$

g est deux fois dérivable, $g'' \geq 0, g'(0) = g(0) = 0$ permet de dresser les tableaux de variation et de signe de g' puis de $g.$ On conclut g positive.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) $\cos(3a) = \cos(2a + a)$ puis

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$$

(b) $\tan(a + b + c) = \tan((a + b) + c)$ puis

$$\tan(a + b + c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan c \tan a}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

On sait $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ donc

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puis

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

et enfin

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

Exercice 18 : [énoncé]

Par factorisation

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\frac{\sin \frac{p-q}{2}}{\cos \frac{p-q}{2}} = -\tan \frac{p-q}{2}.$$

Pour $p = \frac{\pi}{4}$ et $q = \frac{\pi}{6}$ on obtient

$$\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}.$$

Exercice 19 : [énoncé]

En passant aux nombres complexes

$$\sum_{k=0}^n \cos(a + kb) + i \sum_{k=0}^n \sin(a + kb) = \sum_{k=0}^n e^{i(a+kb)}.$$

Par sommation géométrique puis factorisation de l'exponentielle équilibrée

$$\sum_{k=0}^n e^{i(a+kb)} = e^{ia} \frac{e^{i(n+1)b} - 1}{e^{ib} - 1} = e^{i(a+nb/2)} \frac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}}.$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^n \cos(a + kb) = \frac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \cos \left(a + \frac{nb}{2} \right)$$

et

$$\sum_{k=0}^n \sin(a + kb) = \frac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \sin \left(a + \frac{nb}{2} \right).$$

Exercice 20 : [énoncé]

(a) L'hérédité de la récurrence s'obtient via :

$$\begin{aligned} \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2} + \sin(n+1)x \sin \frac{x}{2} \\ = \sin \frac{(n+1)x}{2} \left(\sin \frac{nx}{2} + 2 \cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{x}{2} \right) \\ \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2} \end{aligned}$$

en exploitant

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

avec

$$p = \frac{(n+2)x}{2} \text{ et } q = \frac{nx}{2}.$$

(b) Par les nombres complexes

$$\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) = \text{Im} \left(\frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right)$$

donc

$$\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = \text{Im} \left(e^{i \frac{(n+1)x}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right) = \sin \frac{(n+1)x}{2} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos(2x - \pi/3) = \cos(x + \pi/4).$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{7\pi}{12} [2\pi] \text{ et } x = \frac{\pi}{36} \left[\frac{2\pi}{3} \right].$$

(b) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2$$

soit encore

$$2 \cos^2 x \sin^2 x = 0.$$

On obtient pour solutions

$$x = 0 \text{ } [\pi/2].$$

(c) L'équation étudiée équivaut à

$$2 \sin 2x \cos x = 0.$$

On obtient pour solutions

$$x = 0 \text{ } [\pi/2].$$

(d) L'équation étudiée équivaut à

$$2 \sin(2x) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

On obtient pour solutions

$$x = 0 \text{ } [\pi/2], x = \frac{2\pi}{3} \text{ } [2\pi] \text{ et } x = -\frac{2\pi}{3} \text{ } [2\pi].$$

(e) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = \sqrt{6}$$

soit encore

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4}.$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ } [2\pi] \text{ et } x = -\frac{5\pi}{12} \text{ } [2\pi].$$

(f) L'équation étudiée équivaut à

$$2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = 0$$

soit encore

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ } [\pi] \text{ et } x = -\frac{\pi}{6} \text{ } [\pi].$$

Exercice 22 : [énoncé]

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$ et $x \neq \frac{\pi}{4} \text{ } [\frac{\pi}{2}]$, $\tan x \tan 2x = 1 \iff \sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x = 0 \iff \cos 3x = 0 \iff x = \frac{\pi}{6} \text{ } [\frac{\pi}{3}]$.

Exercice 23 : [énoncé]

En linéarisant et en faisant quelques transformations angulaires de simplification

$$\sum_{k=1}^4 \cos^2 \frac{k\pi}{9} = \frac{7}{4}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) $\cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$

(b) $\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2 \sin^2 \arcsin x = 1 - 2x^2.$

(c) $\sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

(d) $\cos(2 \arctan x) = 2 \cos^2 \arctan x - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

(e) $\sin(2 \arctan x) = 2 \sin(\arctan x) \cos(\arctan x) = \frac{2x}{1+x^2}.$

(f) $\tan(2 \arcsin x) = \frac{2 \tan(\arcsin x)}{1 - \tan^2(\arcsin x)} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}.$

Exercice 25 : [énoncé]

$f: x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ est définie sur $[-1; 1]$.

Pour $x \in [-1; 1]$, posons $\theta = \arccos x$, on a alors

$$f(x) = \arccos(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) = \arccos(\cos 3\theta).$$

Si $\theta \in [0; \pi/3]$ i.e. $x \in [1/2; 1]$ alors $f(x) = 3\theta = 3 \arccos x$.

Si $\theta \in [\pi/3; 2\pi/3]$ i.e. $x \in [-1/2; 1/2]$ alors $f(x) = 2\pi - 3\theta = 2\pi - 3 \arccos x$.

Si $\theta \in [2\pi/3; \pi]$ i.e. $x \in [-1; -1/2]$ alors $f(x) = 3\theta - 2\pi = 3 \arccos x - 2\pi$.

Exercice 26 : [énoncé]

La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable et à valeurs dans $]-1; 1[$ donc

$x \mapsto \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable et

$$\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x + C.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $C = 0$.

Exercice 27 : [énoncé]

Quand $x \rightarrow 0^+$: $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \frac{y}{\sqrt{1-\cos(y)}}$ avec $y = \arccos(1-x) \rightarrow 0^+$.

Or $1 - \cos(y) \sim \frac{y^2}{2}$ donc $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \frac{y}{\sqrt{1-\cos(y)}} \rightarrow \sqrt{2}$.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) f est 2π périodique.

Sur $[-\pi/2; 0]$: $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arccos(\cos x) = -x$ donc $f(x) = 0$.

Sur $[0; \pi/2]$: $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arccos(\cos(x)) = x$ donc $f(x) = 2x$.

Sur $[\pi/2; \pi]$: $\arcsin(\sin x) = \pi - x$ et $\arccos(\cos x) = x$ donc $f(x) = \pi$.

Sur $[-\pi; -\pi/2]$: $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$ et $\arccos(\cos(x)) = -x$ donc $f(x) = -2x - \pi$.

(b) f est 2π périodique.

Sur $[0; \pi/2]$, $f(x) = x + x = 2x$. Sur $[\pi/2; \pi]$, $f(x) = \pi - x + \pi - x = 2\pi - 2x$.

Sur $[-\pi/2; 0]$, $f(x) = x - x = 0$. Sur $[-\pi; -\pi/2]$, $f(x) = -x - \pi + \pi + x = 0$.

(c) $f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \arccos |\cos(x/2)|$. f est 2π périodique, paire, sur $[0; \pi]$ $f(x) = x/2$.

(d) $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \arctan |\tan x/2|$. f est 2π périodique, paire. Sur $[0; \pi]$, $f(x) = x/2$. On retrouve la fonction ci-dessus.

Exercice 29 : [énoncé]

(a) Posons $\theta = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$.

On a $0 \leq \theta < 3 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/2$ et $\tan \theta = 1$ donc $\theta = \pi/4$.

(b) Posons $\theta = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2 + \sqrt{3})$.

On a $3 \arctan 1 = \frac{3\pi}{4} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ et $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

(c) $\cos\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right) = \frac{3}{5} \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \frac{5}{13} = \frac{16}{65}$ et

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{16}{65}\right) = \sin\left(\arcsin \frac{16}{65}\right) = \frac{16}{65}$.

Or $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{16}{65} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ d'où l'égalité $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 30 : [énoncé]

On a $\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{a+b}{1-ab}$ donc $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) [\pi]$.

Si $ab = 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \pi/2$.

Si $ab < 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

Si $ab > 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$.

Exercice 31 : [énoncé]

Posons $\theta = \arctan(p+1) - \arctan(p)$. Comme $0 \leq \arctan p \leq \arctan(p+1) < \pi/2$ on a $\theta \in [0; \pi/2[$.

De plus $\tan \theta = \frac{1}{p^2+p+1}$ donc

$$\theta = \arctan \frac{1}{p^2+p+1}.$$

Par télescopage $S_n = \sum_{p=0}^n \arctan \frac{1}{p^2+p+1} = \arctan(n+1) \rightarrow \pi/2$.

Exercice 32 : [énoncé]

Posons $f(x) = \operatorname{sh} x - x$ définie sur \mathbb{R}_+ . f est dérivable, $f' \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc f est positive.

Posons $g(x) = \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$ définie sur \mathbb{R} . g est deux fois dérivable, $g'' \geq 0$, $g'(0) = g(0) = 0$ permet de dresser les tableaux de variation et de signe de g' puis de g . On conclut g positive.

Exercice 33 : [énoncé]

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \frac{x}{2} &= \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1} = \frac{\sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{y}{2} \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{y}{2} \sin \frac{\pi}{4}} = \tan \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{\tan^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\tan^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1} = \sin^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\sin^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2 \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos y}. \end{aligned}$$

Exercice 34 : [énoncé]

Si $x = 0$ alors $P_n(x) = 1$, sinon $P_n(x) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \dots = \frac{1}{2^n} \operatorname{sh}(x)$ donc

$$P_n(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2^n \operatorname{sh}(x/2^n)}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

Après quelques calculs

$$\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}((n+1)x)}.$$

Par télescopage

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)} = \frac{\operatorname{th}((n+1)x)}{\operatorname{sh}(x)}.$$

Exercice 36 : [énoncé]

Si $a < 1$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.

Si $a = 1$ alors $\mathcal{S} = \{(\alpha, \alpha)\}$.

Si $a > 1$ alors en faisant apparaître un système somme produit :

$$\mathcal{S} = \{(\ln(a - \sqrt{a^2 - 1}) + \alpha, \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + \alpha), (\ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + \alpha, \ln(a - \sqrt{a^2 - 1}) + \alpha)\}.$$

Exercice 37 : [énoncé]

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) - \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \frac{1}{\operatorname{sh} x} = 0.$$

Donc f est constante sur $]0; +\infty[$ puis sur \mathbb{R}_+ par continuité.

Puisque $f(0) = 0$, on peut conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |\arctan(\operatorname{sh} x)| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

Par parité, le résultat se prolonge aussi à $x \in \mathbb{R}_-$.