

# Fonctions réelles

## Technique obsolète

### Exercice 1 [03223] [Correction]

Montrer que lorsque  $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$$

## Difféomorphisme

### Exercice 2 [02818] [Correction]

Soit  $f: ]-1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

- Trouver le plus grand intervalle ouvert  $I$  contenant 0 sur lequel  $f$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme.
- On note  $g$  l'application réciproque de  $f|_I$ . Montrer que les coefficients du développement limité de  $g$  en 0 à un ordre quelconque sont positifs.

## Étude de branche asymptotique

### Exercice 3 [01409] [Correction]

Soit  $f: ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Montrer que  $f$  admet un point d'inflexion.  
Étudier les branches infinies de la courbe représentative de  $f$  et en donner l'allure.

### Exercice 4 [01408] [Correction]

Étudier la fonction

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + x}{|x| + 1}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

### Exercice 5 [01407] [Correction]

Étudier la fonction

$$f: x \mapsto \frac{2 \ln x + 3}{x}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

### Exercice 6 [01406] [Correction]

Étudier la fonction

$$f: x \mapsto x^2 e^{-x}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

### Exercice 7 [01467] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto (x+1)e^{1/x}$$

définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Former un développement asymptotique de  $f$  à la précision  $1/x$  en  $+\infty$ .

En déduire l'existence d'une droite asymptote en  $+\infty$  à la courbe représentative de  $f$ .

Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en  $+\infty$ .

### Exercice 8 [01468] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$$

définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Former un développement asymptotique de  $f$  à la précision  $1/x$  en  $+\infty$ .

En déduire l'existence d'une droite asymptote en  $+\infty$  à la courbe représentative de  $f$ .

Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en  $+\infty$ .

### Exercice 9 [01469] [Correction]

Étudier les asymptotes de

$$x \mapsto \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$$

**Exercice 10** [01825] [Correction]

Étudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln x}$$

**Exercice 11** [01826] [Correction]

Étudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x-1| + x}$$

**Fonctions hyperboliques inverses****Exercice 12** [01867] [Correction]

Simplifier les expressions suivantes :

- |                                |                                 |                                |
|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| (a) $\text{ch}(\text{argsh}x)$ | (c) $\text{sh}(2\text{argsh}x)$ | (e) $\text{th}(\text{argch}x)$ |
| (b) $\text{th}(\text{argsh}x)$ | (d) $\text{sh}(\text{argch}x)$  | (f) $\text{ch}(\text{argth}x)$ |

**Exercice 13** [01868] [Correction]

Simplifier :

- |                              |                                    |
|------------------------------|------------------------------------|
| (a) $\text{argch}(2x^2 - 1)$ | (b) $\text{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$ |
|------------------------------|------------------------------------|

**Exercice 14** [01870] [Correction]

Résoudre l'équation

$$\text{argsh}x + \text{argch}x = 1$$

**Exercice 15** [01871] [Correction]Soit  $G: ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $G(t) = \text{argsh}(\tan t)$ .Montrer que  $G$  est dérivable et que pour tout  $t \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,  $G'(t) = \text{ch} G(t)$ .**Exercice 16** [02454] [Correction]Convergence et calcul de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  où  $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ .**Exercice 17** [02846] [Correction]Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}$$

Rayon de convergence et somme de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  ?**Exercice 18** [01567] [Correction]

Résoudre

$$(1+x^2)y'' + xy' - 4y = 0$$

en posant  $x = \text{sh}(t)$ .

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

On découpe l'intégrale en deux

$$\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt$$

et on procède à une intégration par parties

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x \frac{2t}{2t} e^{t^2} dt = \left[ \frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$$

Ainsi

$$\int_0^x e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + C^{te}$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ , sachant que la constante est négligeable devant  $e^{x^2}/2x \rightarrow +\infty$ , il suffit pour conclure de montrer

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = o\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $A \geq 1$  tel que

$$\forall t \geq A, \frac{1}{t^2} \leq \varepsilon$$

et alors

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + \varepsilon \int_A^x e^{t^2} dt$$

puis

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + \varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

Or

$$\int_1^x e^{t^2} dt \geq \int_1^x 1 dt \geq x - 1 \rightarrow +\infty$$

donc pour  $x$  assez grand

$$\int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

puis

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq 2\varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

et on peut conclure.

### Exercice 2 : [énoncé]

(a) La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$f'(x) \neq 0$  si, et seulement si,  $x \neq e - 1$ .

Le plus grand intervalle cherché est  $I = ]-1; e - 1[$  sur lequel  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et sa dérivée ne s'annule pas,  $f$  réalise donc un  $\mathcal{C}^\infty$  difféomorphisme de  $I$  vers  $]-\infty; 1/e[$ .

(b) On a

$$\ln(1 + g(x)) = x(1 + g(x))$$

En dérivant

$$g'(x) = 1 + 2g(x) + g^2(x) + xg'(x) + xg'(x)g(x)$$

En dérivant à l'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  et en évaluant en 0 on obtient

$$g^{(n+1)}(0) = 2g^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0) + ng^{(n)}(0) + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k+1)}(0)g^{(n-k)}(0)$$

On peut alors appliquer un raisonnement par récurrence forte pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) \geq 0$$

Ceci suffit pour conclure via la formule de Taylor-Young.

### Exercice 3 : [énoncé]

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Ses dérivées premières et secondes sont

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, f''(x) = -\frac{1}{x^3} - 2\frac{1 - \ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

On en déduit les variations suivantes

$x$	0	e	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1/e$	$\searrow 0$

$x$	$e^{3/2}$
$f''(x)$	$- \quad 0 \quad +$

La fonction  $f$  présente un point d'inflexion en  $e^{3/2}$ .

Puisque  $\lim_0 f = -\infty$ , il y a une asymptote d'équation  $x = 0$ .

Puisque  $\lim_{+\infty} f = 0$ , il y a une asymptote d'équation  $y = 0$ .

$f : x \rightarrow \ln(x)/x$ :

$a := \exp(3/2)$ :

`plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a)], x=0..2*a, y=-2..1);`

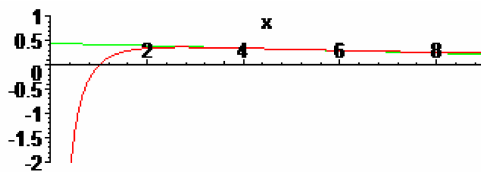


FIGURE 1 – La fonction  $x \mapsto (\ln x)/x$

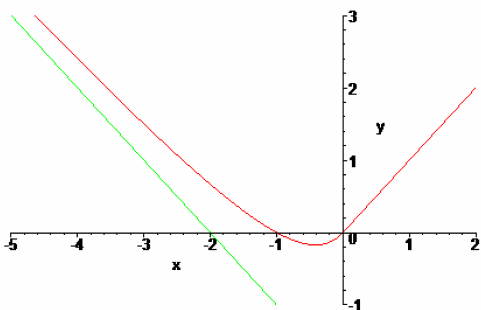


FIGURE 2 – La fonction  $x \mapsto \frac{x^2+x}{|x|+1}$

**Exercice 4 : [énoncé]**

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et dérivable (par opérations) sur  $\mathbb{R}^*$ .  
 Par limite de taux de variation on constate que  $f$  est aussi dérivable en 0 avec  $f'(0) = 1$ .  
 Sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = x$  ce qui achève l'étude sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 Sur  $\mathbb{R}_-$ ,

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x}$$

présente un minimum en  $1 - \sqrt{2}$  de valeur  $2\sqrt{2} - 3$  et  $f$  présente une asymptote d'équation  $y = -x - 2$ , courbe au dessus.  
`plot([(x^2+x)/(abs(x)+1), -x-2], x=-5..2, y=-1..3);`

**Exercice 5 : [énoncé]**

$f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^2} \text{ et } f''(x) = \frac{4 \ln x}{x^3}$$

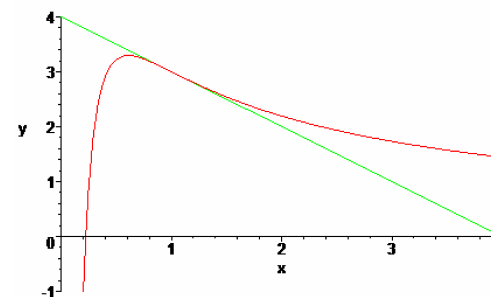


FIGURE 3 – La fonction  $x \mapsto \frac{2 \ln x + 3}{x}$

$x$	0	$1/\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$2\sqrt{e}$	0

En 0 :  $(Oy)$  est asymptote.  
 En  $+\infty$  :  $(Ox)$  est asymptote.  
 En 1 :  $f''$  s'annule avec changement de signe, point d'inflexion.  
 L'équation de la tangente en ce point est  $y = -(x - 1) + 3$ .  
`plot([(2*ln(x)+3)/x, -(x-1)+3], x=0..4, y=-1..4);`

**Exercice 6 : [énoncé]**

$f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = x(2 - x)e^{-x} \text{ et } f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

$f$  présente un minimum absolu en 0 de valeur 0 et un maximum local en 2 de valeur  $4/e^2$ .  
 $f$  présente des points d'inflexion en  $2 + \sqrt{2}$  et  $2 - \sqrt{2}$ .  
 $f$  présente une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  en  $+\infty$ .  
 $f$  présente une branche parabolique verticale en  $-\infty$ .  
`f:=x->x^2*exp(-x);`  
`a:=2+sqrt(2):b:=2-sqrt(2);`  
`plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a), D(f)(b)*(x-b)+f(b)], x=-1..5,`  
`color=[red, blue, green]);`

**Exercice 7 : [énoncé]**

On a

$$f(x) = (x + 1)e^{1/x} = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

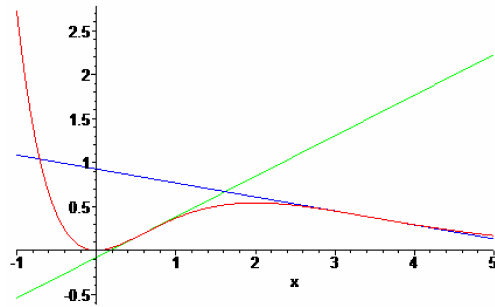


FIGURE 4 – La fonction  $x \mapsto x^2 e^{-x}$

Par suite, la droite d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à la courbe et la courbe est au dessus de celle-ci.

**Exercice 8 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$f(x) = x(\ln(2x + 1) - \ln(x)) = \ln 2 \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation  $y = \ln 2 \cdot x + \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe et la courbe est en dessous de celle-ci.

**Exercice 9 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)} = x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}} = x + 1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).  
Courbe en dessous (resp. au dessus) de l'asymptote en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

**Exercice 10 :** [\[énoncé\]](#)

$f$  est définie et continue sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{f(x)}{x} \sim \frac{x \ln x}{x \ln x} = 1, f(x) - x = \frac{\ln(x + 1) + x \ln(1 + 1/x)}{\ln x} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1$$

et

$$f(x) - (x + 1) = \frac{(x + 1) \ln(1 + 1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0^+$$

La droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote en  $+\infty$  et la courbe  $y = f(x)$  est au dessus.

Quand  $x \rightarrow 1^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote.

Quand  $x \rightarrow 1^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote.

Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x) \rightarrow 0$ , on prolonge par continuité en posant  $f(0) = 0$ .

**Exercice 11 :** [\[énoncé\]](#)

$f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x - 1}$$

On a

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow \frac{1}{2}, f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{5x}{4x - 2} \rightarrow \frac{5}{4} \text{ et } f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{8x - 4} \rightarrow 0^+$$

La droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$  est asymptote en  $+\infty$  courbe au dessus.

Quand  $x \rightarrow -\infty$ ,

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Il y a une branche parabolique verticale.

`plot([f(x), x/2+5/4], x=-3..5);`

**Exercice 12 :** [\[énoncé\]](#)

(a)  $\operatorname{ch} a = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 a}$  donc  $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1 + x^2}$ .

(b)  $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

(c)  $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x) = 2 \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = 2x\sqrt{1+x^2}$ .

(d)  $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

(e)  $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ .

(f)  $\operatorname{th}^2 a = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a}$  donc  $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Exercice 13 :** [\[énoncé\]](#)

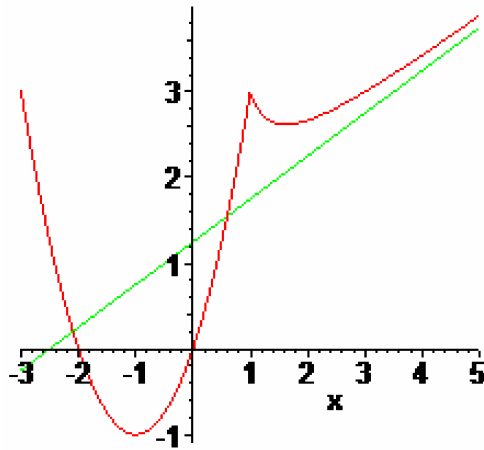


FIGURE 5 – La fonction  $x \mapsto \frac{x^2+2x}{|x-1|+x}$

- (a) Pour  $x \geq 1$ , posons  $\alpha = \operatorname{argch} x$   
On a

$$\operatorname{argch}(2x^2 - 1) = \operatorname{argch}(2 \operatorname{ch}^2 \alpha - 1) = \operatorname{argch}(\operatorname{ch} 2\alpha) = 2\alpha = 2 \operatorname{argch} x$$

Par parité, pour  $x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ ,

$$\operatorname{argch}(2x^2 - 1) = 2 \operatorname{argch} |x|$$

- (b) Posons  $\alpha = \operatorname{argsh} x$ .

On a  $2x\sqrt{1+x^2} = 2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha = \operatorname{sh} 2\alpha$  donc

$$\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) = 2\alpha = 2 \operatorname{argsh} x$$

**Exercice 14 :** [\[énoncé\]](#)

La fonction  $f: x \mapsto \operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x$  est continue et strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ .

$f(1) = \operatorname{argsh}(1)$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ . Puisque  $\operatorname{sh} 1 \geq 1$ ,  $\operatorname{argsh}(1) \leq 1$ .

L'équation possède donc une unique solution  $a$ . Déterminons-la.

$$\operatorname{sh}(1) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a + \operatorname{argch} a) = a^2 + \sqrt{1+a^2} \sqrt{a^2-1} = a^2 + \sqrt{a^4-1}$$

donc

$$\sqrt{a^4-1} = \operatorname{sh}(1) - a^2$$

puis

$$a^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 1}{2 \operatorname{sh} 1}$$

et enfin

$$a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2 \operatorname{sh} 1}}$$

**Exercice 15 :** [\[énoncé\]](#)

$G$  est dérivable par composition et  $G'(t) = \sqrt{1 + \tan^2 t}$ . Or

$$\operatorname{ch} G(t) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 G(t)} = \sqrt{1 + \tan^2 t}.$$

**Exercice 16 :** [\[énoncé\]](#)

À l'aide d'une intégration par partie :

$$a_{n+1} = 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt = 2(n+1)(a_n - a_{n+1})$$

donc

$$a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n.$$

$a_n \neq 0$  et  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1$  donc  $R = 1$ .

Pour  $x \in ]-1; 1[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 ((1-t^2)x)^n dt.$$

On peut permuter somme infinie et intégrale (par un argument de convergence uniforme par exemple) et affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{dt}{1-x+xt^2}.$$

Pour  $x = 0$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

Pour  $x > 0$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\frac{1-x}{x} + t^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \arctan \left( \sqrt{\frac{x}{1-x}} \right).$$

Pour  $x < 0$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \operatorname{argth} \left( \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right).$$

### Exercice 17 : [\[énoncé\]](#)

On a  $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} a_n$ . Par application de la règle de d'Alembert, on obtient  $R = 2$ . La relation  $(2n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$  avec  $a_0 = 1$  permet d'affirmer que la somme  $S$  de la série entière  $\sum a_n x^n$  est solution sur  $] -2; 2[$  de l'équation différentielle

$$x(x-2)S'(x) + (x-1)S(x) + 1 = 0$$

La recherche de solution définie et continue en 0 donne

$$S(x) = \frac{\arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x(2-x)}} \text{ pour } x > 0$$

et

$$S(x) = \frac{\operatorname{arg ch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}} \text{ pour } x < 0$$

### Exercice 18 : [\[énoncé\]](#)

Soit  $y$  une fonction deux fois dérivable définie sur  $\mathbb{R}$ .

Posons  $z$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $z(t) = y(\operatorname{sh}(t))$ .  $z$  est deux fois dérivable.

Après calculs :  $y$  est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si,  $z$  est solution de l'équation  $z'' - 4z = 0$ .

On obtient

$$z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

puis

$$y(x) = C_1 e^{2 \operatorname{argsh} x} + C_2 e^{-2 \operatorname{argsh} x} = C_1 (x + \sqrt{1+x^2})^2 + \frac{C_2}{(x + \sqrt{1+x^2})^2}$$