Familles sommables

Ensemble dénombrable

Exercice 1 [00245] [Correction]
Existe-t-il une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoyant les rationnels dans les irrationnels et les irrationnels dans les rationnels ?

Exercice 2 [04005] [Correction]
On souhaite établir que l'ensemble $\wp(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable. Pour cela on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\wp(\mathbb{N})$.
Établir une absurdité en introduisant l'ensemble

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n \notin \varphi(n)\right\}$$

Exercice 3 [04063] [Correction]
On appelle nombre algébrique, tout nombre complexe x solution d'une équation de la forme

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ avec } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0.$$

On appelle degré d'un nombre algébrique x, le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que x soit solution d'une équation comme ci-dessus.

(a) Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
(b) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré au plus n est dénombrable.
(c) L'ensemble de tous les nombres algébriques est-il dénombrable ?

Exercice 4 [04064] [Correction]

(a) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$
(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0\,;1]$. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, [0\,;1] \setminus \bigcup_{k=0}^{n} [u_k - \frac{1}{2^{k+2}}\,; u_k + \frac{1}{2^{k+2}}] \neq \emptyset$$
(c) On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0\,;1]$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin \bigcup_{k=0}^{n} [u_k - \frac{1}{2^{k+2}}\,; u_k + \frac{1}{2^{k+2}}]$$
Justifier qu'on peut extraire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un élément ℓ de $[0\,;1]$.
(d) Exploiter les idées précédentes pour établir que $[0\,;1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 5 [04140] [Correction]
Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Étude de sommabilité

Exercice 6 [03896] [Correction]
Pour quels $\alpha > 0$, la famille suivante est-elle sommable ?

$$\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$

Sommation par paquets

Exercice 7 [02424] [Correction]
Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

Exercice 8 [02636] [Correction]
On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sommables.

(a) Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
(b) Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on pose $(u * v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u * v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u * v)_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(c) Montrer que la loi $*$ ainsi définie est commutative, associative et possède un neutre.

(d) La structure $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ est-elle un groupe ?

Exercice 9 [04065] [Correction]
Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$.
Montrer que la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 10 [04066] [Correction]
Soit $r \in [0\,;1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Justifier l'existence et calculer

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}$$

Permutation des termes

Exercice 11 [01030] [Correction]
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente et $v_n = u_{\sigma(n)}$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente de même somme de $\sum u_n$.

Exercice 12 [01031] [Correction]
Soit $\sigma\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application bijective.

(a) Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$$

(b) Même question pour

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$$

Exercice 13 [02963] [Correction]
Si σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$, montrer la divergence de la série

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$$

Exercice 14 [03678] [Correction]
Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.
Quelle est la nature de

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}?$$

Exercice 15 [03426] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle qu'il y ait convergence de la série $\sum u_n^2$
Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ et (v_n) la suite déterminée par

$$v_n = u_{\sigma(n)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(a) Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum v_n^2$.

(b) Quelle est la nature de la série $\sum |u_n v_n|$?

(c) Déterminer les bornes supérieure et inférieure de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n|$$

pour σ parcourant l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$.

Exercice 16 [03412] [Correction]
Soit (z_n) une suite de complexes non nuls telles que

$$n \neq m \implies |z_n - z_m| \geq 1$$

Montrer la convergence de la série de terme général $1/z_n^3$.

Sommes doubles

Exercice 17 [01093] [Correction]

(a) Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

(b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(c) Montrer qu'alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Exercice 18 [01095] [Correction]
Soit a un complexe de module strictement inférieur à 1. En introduisant la famille des nombres $u_{p,q}=a^{p(2q-1)}$ (pour $p,q\geq 1$), établir l'identité

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^p}{1-a^{2p}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}$$

Exercice 19 [01096] [Correction]
On pose

$$a_{p,q}=\frac{2p+1}{p+q+2}-\frac{p}{p+q+1}-\frac{p+1}{p+q+3}$$

Calculer

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{p,q}\text{ et }\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{p,q}$$

Qu'en déduire ?

Exercice 20 [03447] [Correction]
Existence et valeur de

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

Exercice 21 [01094] [Correction]
Justifier

$$\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4p^2}$$

En déduire

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$$

Qu'en déduire ?

Produit de Cauchy

Exercice 22 [03445] [Correction]
Existence et calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$$

Exercice 23 [03446] [Correction]
Soit (u_n) une suite numérique. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$v_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}2^ku_k$$

(a) On suppose dans cette question la série $\sum u_n$ absolument convergente.
En observant un produit de Cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

(b) On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 0. Déterminer la limite de (v_n)

(c) On suppose dans cette dernière question la série $\sum u_n$ convergente.
Montrer la convergence de $\sum v_n$ et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 24 [03637] [Correction]
Établir

$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n!}$$

avec

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Exercice 25 [04135] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$v_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}2^ku_k$$

Montrer que la famille $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de celle de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 26 [04201] [Correction]

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$$

Pour quels α la série de terme général u_n converge ?

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Une telle fonction ne prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs, or si celle-ci n'est pas constante, elle prend toutes les valeurs d'un intervalle non singulier ce qui constitue un nombre non dénombrable de valeurs. Une telle fonction ne peut donc exister.

Exercice 2 : [énoncé]
L'ensemble A est par définition une partie de $\mathbb{N}$. Puisque l'application φ est bijective, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A = \varphi(n)$. Étudions alors l'appartenance de n à la partie A.
Si $n \in A$ alors $n \notin \varphi(n)$ mais $A = \varphi(n)$: c'est absurde.
Si $n \notin A$ alors $n \notin \varphi(n)$ et donc $n \in A$: c'est à nouveau absurde.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Ce sont les nombres rationnels.

(b) Les nombres algébriques de degré au plus n sont les solutions des équations
$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ avec } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0.$$
Puisque $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n$ est un ensemble dénombrable, ces équations sont en nombre dénombrable. De plus, chacune possède au plus n solutions. On peut donc percevoir l'ensemble des nombres algébriques comme une réunion dénombrable d'ensembles tous finis, c'est donc un ensemble dénombrable.

(c) L'ensemble des nombres algébriques est la réunion dénombrable des ensembles précédents, c'est donc un ensemble dénombrable.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Par sommation géométrique
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2}$$

(b) La somme des longueurs des intervalles réunis vaut
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$$
La réunion de ces intervalles ne peut donc recouvrir $[0\,;1]$.

(c) (x_n) est une suite bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente et cette dernière a sa limite dans $[0\,;1]$.

(d) Par l'absurde, supposons $[0\,;1]$ dénombrable et considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de ses éléments.
On reprend la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite comme ci-dessus et la limite ℓ introduite.
Puisque celle-ci est élément de $[0\,;1]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = \ell$. Puisqu'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant vers ℓ, il existe une infinité de termes de cette suite dans l'intervalle
$$[\ell - 1/2^{N+2}\,; \ell + 1/2^{N+2}] = [u_N - 1/2^{N+2}\,; u_N + 1/2^{N+2}]$$
Or, par construction, pour tout $n \geq N$, l'élément x_n est extérieur à cet intervalle. C'est absurde !

Exercice 5 : [énoncé]
Notons E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et E_n l'ensemble des parties finies de $[\![0\,;n]\!]$. Puisque toute partie finie de $\mathbb{N}$ est nécessairement majorée, on peut affirmer l'égalité
$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$
Les ensembles E_n étant finis et la réunion dénombrable, on peut affirmer que E est dénombrable en tant qu'ensemble infini réunion dénombrable de parties au plus dénombrables. On peut aussi propose un dénombrement expliciter. Si l'on note $i_1, \ldots, i_k$ les éléments d'une partie A finie de $\mathbb{N}$, on peut lui associer l'entier
$$n(A) = 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}.$$
L'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier en somme de puissances de 2 assurant la bijectivité de cette association.

Exercice 6 : [énoncé]
On a l'encadrement
$$\frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2} \leq \frac{2}{(p+q)^2}$$
La sommabilité de la famille étudiée équivaut à celle de
$$\left(\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

En regroupant par paquets selon

$$I_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid p+q=n\right\}$$

celle-ci équivaut à la sommabilité de

$$\left(\frac{n-1}{n^{2\alpha}}\right)_{n\geq 2}$$

qui est vraie si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 7 : [énoncé]
Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n,k \in \mathbb{N}$$

On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m\in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Puisque $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $v_n \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$ et donc (v_n) est bornée par un certain M.
On a $|u_k v_{n-k}| \leq M\,|u_k|$ donc la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

(b) Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable avec

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$$

et la famille $\left(|u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi sommable, donc, par sommation par paquets, la famille $(u_k v_{n-k})_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable.
Par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2} |u_k v_{n-k}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|\,|v_{n-k}| < +\infty$$

Puisque

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|\,|v_{n-k}|$$

on a obtient $u * v \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
De plus, par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2} u_k v_{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

ce qui donne

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u*v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} v_\ell$$

(c) On a

$$(u*v)_n = \sum_{k+\ell=n} u_k v_\ell = (v*u)_n$$

et

$$((u*v)*w)_n = \sum_{k+\ell+m=n} u_k v_\ell w_m = (u*(v*w))_n$$

Pour ε définie par $\varepsilon_n = \delta_{n,0}$, $u * \varepsilon = u$ donc ε est élément neutre.

(d) Considérons u définie par $u_n = \delta_{0,n} - \delta_{1,n}$.
Si u est inversible et v son inverse, la relation $u * v = \varepsilon$ donne
$v_n - v_{n-1} = \varepsilon_n = \delta_{0,n}$.
Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0$ et puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 0$. De même pour tout $n < 0, v_n = 0$
Mais alors, pour $n = 0$, $v_n - v_{n-1} = \delta_{0,n}$ donne $0 = 1$.
L'élément u n'est pas inversible et donc $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ n'est pas un groupe.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 9 : [énoncé]
Étudions la sommabilité de $\left(|q|^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On peut décomposer
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-^*$$
La sous-famille $\left(|q|^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable car la série géométrique $\sum |q|^n$ converge.
De même, la sous-famille $\left(|q|^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}_-^*}$ est sommable.
Par sommation par paquets $\left(|q|^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. De plus
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^n + 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}_-^*} q^{-n} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1+q}{1-q}$$

Exercice 10 : [énoncé]
Étudions la sommabilité de $\left(\left|r^{|n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\right|\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On peut décomposer
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-^*$$
La sous-famille $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable car la série géométrique $\sum r^n$ converge.
De même, la sous-famille $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}_-^*}$ est sommable.
Par sommation par paquets $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
La somme étudiée existe donc et en sommant par paquets
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}_-^*} r^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 + \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

Exercice 11 : [énoncé]
On a
$$\sum_{k=0}^{n} |v_k| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$$
donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente.
Pour $n\in\mathbb{N}$, posons
$$p(n) = \max\left\{\sigma^{-1}(k) \mid 0 \leq k \leq n\right\}$$
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\geq N+1} |u_n| \leq \varepsilon$.
Pour tout $M \geq p(N)$:
$$\left|\sum_{n=0}^{M} v_n - \sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n\geq N+1} |u_n| \leq \varepsilon$$
donc
$$\left|\sum_{n=0}^{M} v_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq 2\varepsilon$$
Par suite
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument donc la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est sommable. Il en est de même de la famille permutée $\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)_{n\geq 1}$ et donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge.

(b) C'est analogue, mais cette fois la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ n'est pas sommable et la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge.

Exercice 13 : [énoncé]
Posons
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$$
On a
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$$
Or les entiers $\sigma(n+1),\dots,\sigma(2n)$ sont, à l'ordre près, au moins égaux à $1,\dots,n$ et donc
$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{8n} \geq \frac{1}{8}$$
On en déduit que (S_n) diverge.

Exercice 14 : [énoncé]
Posons
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2 \ln k}$$
On a
$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{1}{2^{2(n+1)} \ln 2^{n+1}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \sigma(k) \geq \frac{1}{2^{2(n+1)} \ln 2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^n} k$$
car les entiers $\sigma(k)$ de la première somme sont aux moins égaux aux entiers k de la seconde.
On en déduit
et donc
$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{2^n(2^n+1)}{2^{2n+3}(n+1)\ln 2} \sim \frac{1}{8\ln 2}\frac{1}{n}$$
Puisque la série $\sum 1/n$ diverge, il en de même de la série télescopique $\sum S_{2^{n+1}} - S_{2^n}$ et donc la suite (S_{2^n}) tend vers $+\infty$. On en déduit la divergence de la série étudiée.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) La permutation des termes d'une série à termes positifs ne change ni sa nature, ni sa somme. On peut donc affirmer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$$

(b) En vertu de la majoration
$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$$
on a
$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$
Par comparaison de série à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série $\sum |u_n v_n|$ ...

(c) et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$$

De plus, cette inégalité est une égalité quand $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ donc
$$\sup\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| / \sigma \text{ bijection de } \mathbb{N}\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$$
On a évidemment
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \geq 0$$
Pour montrer que la borne inférieure cherchée est 0, montrons que l'on peut rendre la somme précédente aussi petite que l'on veut. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de la série $\sum u_n^2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n^2 \leq \varepsilon$$
De plus la suite (u_n) tend vers 0, elle est donc bornée par un certain $M > 0$ et il existe un rang $N' > N$ tel que
$$\forall n \geq N', |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M(N+1)}$$
Considérons alors la bijection σ de $\mathbb{N}$ déterminée par
$$\sigma(n) = \begin{cases} N'+n & \text{si } n \in \{0 \mid \ldots, N\} \\ n - N' & \text{si } n \in \{N', \ldots, N'+N\} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$
Pour cette permutation
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |u_n| \frac{\varepsilon}{M(N+1)} + \sum_{n=N'}^{N'+N-1} \frac{\varepsilon}{M(N+1)} |u_{n-N'}| + \varepsilon \leq 3\varepsilon$$
On peut donc affirmer
$$\inf\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| / \sigma \text{ bijection de } \mathbb{N}\right\} = 0$$

Exercice 16 : [énoncé]
Pour $N \in \mathbb{N}$ posons $A_N = \{n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq N\}$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Pour $n, m \in A_N$ distincts, les disques ouverts de centres z_n et z_m et de rayon $1/2$ sont disjoints. La réunion de ces disques pour n parcourant A_N, est incluse dans le disque de centre 0 et de rayon $N + 1/2$. Par considération d'aire, on obtient

$$\operatorname{Card} A_N \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \pi \left(N + \frac{1}{2}\right)^2$$

et donc

$$\operatorname{Card} A_N \leq (2N+1)^2$$

Quitte à permuter les termes de la suite, supposons la suite $(|z_n|)$ croissante (ceci est possible, car il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite de module inférieur à une constante donnée). En vertu de l'étude qui précède

$$\left|z_{(2N+1)^2+1}\right| > N$$

et on en déduit

$$\frac{1}{|z_p|^3} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right)$$

La série permutée de terme général $1/z_n^3$ est donc absolument convergente et la série initiale l'est donc aussi.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

(b) Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a un sens si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(c) Posons $u_{k,n} = \frac{1}{k^\alpha}$ si $k > n$ et $u_{k,n} = 0$ sinon.
Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k\geq 0} |u_{k,n}|$ converge et $\sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}|$ converge donc on peut appliquer la formule de Fubini et affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$$

avec convergence des séries sous-jacentes.
Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Exercice 18 : [énoncé]
La série $\sum_{p\geq 1} u_{p,q}$ est absolument convergente et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{p,q}| = \frac{|a|^{2q-1}}{1 - |a|^{2q-1}}$$

De plus la série de terme général $\frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}$ est absolument convergente en vertu de la règle de d'Alembert.
La famille $(u_{p,q})_{p,q\geq 1}$ est donc sommable et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$$

ce qui fournit la relation

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a^{2q-1}}{1 - a^{2q-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1 - a^{2p}}$$

Exercice 19 : [énoncé]
D'une part $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$ donc $\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$.
D'autre par $\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$ donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$.
La formule de Fubini ne s'applique pas, la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ n'est donc pas sommable.

Exercice 20 : [énoncé]
Notons que les termes sommés sont positifs.
Pour chaque $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car $\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \sim \frac{1}{p^2}$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Par télescopage

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+q^2}-\frac{1}{p+q^2+1}\right)=\frac{1}{q^2}$$

La série $\sum_{q\geq 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}=\sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^2}$ converge aussi, on peut donc affirmer que la famille

$$\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$$

est sommable et sa somme vaut

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}=\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 21 : [énoncé]

La série converge compte tenu des critères usuels.

$$\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)$$

Par télescopage :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2p}\right)$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}=-\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p-1}+\cdots+1+\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)$$

donc

$$\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}\right)=\frac{3}{4p^2}$$

puis

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}>0$$

Cependant

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{4n^2}=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}$$

donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$$

On en déduit que la familles des $1/(n^2-p^2)$ avec $(p,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, $p\neq n$ n'est pas sommable.

Exercice 22 : [énoncé]

Par produit de Cauchy de série convergeant absolument

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{3^m}\right)=\frac{9}{4}$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a) On a

$$v_n=\sum_{k=0}^{n}u_k\times\frac{1}{2^{n-k}}$$

La série $\sum v_n$ est donc la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum\frac{1}{2^n}$. Puisqu'elles sont toutes deux absolument convergentes, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}v_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\right)=2\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$$

(b) Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geq N,|u_n|\leq\varepsilon$$

On a alors

$$|v_n|\leq\frac{\sum_{k=0}^{N-1}2^k|u_k|}{2^n}+\varepsilon\sum_{k=N}^{n}\frac{2^k}{2^n}\leq\frac{C^{te}}{2^n}+2\varepsilon$$

puis pour n assez grand

$$|v_n|\leq 3\varepsilon$$

On peut donc affirmer que la suite (v_n) converge vers 0.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(c) En permutant les sommes

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{N} u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{2^{n-k}}$$

En évaluant la somme géométrique

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = 2\sum_{k=0}^{N} u_k(1-\frac{1}{2^{N-k+1}}) = 2\sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{N} \frac{u_k}{2^{N-k}}$$

et compte tenu du résultat de la question précédente

$$\sum_{n=0}^{N} v_n \to 2\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

On en déduit à nouveau que la série $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Exercice 24 : [énoncé]
Par produit de Cauchy de séries convergeant absolument

$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Il reste à montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ce qui se fait par

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Exercice 25 : [énoncé]
On peut écrire

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \left(u_k \times \frac{1}{2^{n-k}}\right)$$

La série $\sum v_n$ est donc la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2^n}$. Puisqu'elles sont toutes deux absolument convergentes, la série $\sum v_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Exercice 26 : [énoncé]
Les termes de la somme définissant u_n sont positifs et celui d'indice 1 vaut $1/(n-1)^\alpha$ et donc

$$u_n \geq \frac{1}{(n-1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la divergence de la série de terme général u_n pour tout $\alpha \leq 1$.
Pour $\alpha > 1$, on sait la convergence absolue de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. On réalise alors un produit de Cauchy de cette série par elle-même en considérant

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } a_0 = 0$$

La série produit de Cauchy a alors pour terme général

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} = u_n$$

On peut donc affirmer la convergence absolue de la série de terme général u_n pour $\alpha > 1$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD