

# Espaces vectoriels

## Structure d'espace vectoriel

### Exercice 1 [01680] [Correction]

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On munit le produit cartésien  $E \times E$  de l'addition usuelle

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par

$$(a + i.b).(x, y) = (a.x - b.y, a.y + b.x)$$

Montrer que  $E \times E$  est alors un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Celui-ci est appelé complexifié de  $E$ .

## Sous espaces vectoriels

### Exercice 2 [01681] [Correction]

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ | (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$     |
| (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$   | (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ |
| (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$    | (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ |

### Exercice 3 [01682] [Correction]

Soient  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$  et

$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .

- Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer  $F \cap G$ .

### Exercice 4 [01683] [Correction]

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ?

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$   | (c) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$  |
| (b) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$ | (d) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$ |

### Exercice 5 [01684] [Correction]

Soit  $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$ .

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

### Exercice 6 [01685] [Correction]

Les parties de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est monotone}\}$   | (c) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule}\}$    |
| (b) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en } 0\}$ | (d) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$ |

### Exercice 7 [01686] [Correction]

Montrer que les parties de  $\mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$  suivantes sont des sous-espaces vectoriels :

- $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$
- $G = \{f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t) dt = 0\}$

### Exercice 8 [01687] [Correction]

Soit  $\omega \in \mathbb{C}$ . On note  $\omega.\mathbb{R} = \{\omega x \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

Montrer que  $\omega.\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}$  vu comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

À quelle condition  $\omega.\mathbb{R}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}$  vu comme  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

### Exercice 9 [01688] [Correction]

Soient  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Montrer que l'ensemble  $F = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant les vecteurs  $u_1, \dots, u_n$ .

### Exercice 10 [01689] [Correction]

Soient  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions de  $E$  croissantes et

$$\Delta = \{f - g \mid f, g \in \mathcal{C}\}$$

Montrer que  $\Delta$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice 11** [01690] [Correction]

Démontrer que le sous-ensemble constitué des suites réelles périodiques est un sous-espace vectoriel d'une structure que l'on précisera.

**Opérations sur les sous-espaces vectoriels****Exercice 12** [01691] [Correction]

Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
Montrer

$$F \cap G = F + G \iff F = G$$

**Exercice 13** [00160] [Correction]

Soient  $F$ ,  $G$  et  $H$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  
Comparer :

- (a)  $F \cap (G + H)$  et  $(F \cap G) + (F \cap H)$ .  
(b)  $F + (G \cap H)$  et  $(F + G) \cap (F + H)$ .

**Exercice 14** [00161] [Correction]

À quelle condition la réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle est un sous-espace vectoriel ?

**Exercice 15** [01694] [Correction]

Soient  $F$ ,  $G$  et  $H$  trois sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  
Montrer que

$$F \subset G \implies F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

**Exercice 16** [01695] [Correction]

Soient  $F, G, F', G'$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $F \cap G = F' \cap G'$ .  
Montrer que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$

**Espaces engendrés par une partie****Exercice 17** [01696] [Correction]

Comparer  $\text{Vect}(A \cap B)$  et  $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ .

**Exercice 18** [01625] [Correction]

On considère les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$

$$u = (1, 1, 1) \text{ et } v = (1, 0, -1)$$

Montrer

$$\text{Vect}(u, v) = \{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

**Exercice 19** [01626] [Correction]

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère  $x = (1, -1, 1)$  et  $y = (0, 1, a)$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $u = (1, 1, 2)$  appartienne à  $\text{Vect}(x, y)$ . Comparer alors  $\text{Vect}(x, y)$ ,  $\text{Vect}(x, u)$  et  $\text{Vect}(y, u)$ .

**Espaces supplémentaires****Exercice 20** [01698] [Correction]

Soient  $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$  et  $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .  
Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 21** [01699] [Correction]

Soient  $F = \{f \in \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0\}$  et

$$G = \{f \in \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}.$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{C})$ .

**Exercice 22** [01700] [Correction]

Soient

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

et  $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n$ .

Montrer que  $H$  et  $\text{Vect}(u)$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{K}^n$ .

**Exercice 23** [01701] [Correction]

Dans l'espace  $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$  on considère les parties

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\} \text{ et } G = \text{Vect}(\sin, \cos)$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

**Exercice 24** [01702] [Correction]

Soit  $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\}$ .

- Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel.
- Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

## Familles de vecteurs

**Exercice 25** [01627] [Correction]

Les familles suivantes de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont-elles libres ?

Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

- $(x_1, x_2)$  avec  $x_1 = (1, 0, 1)$  et  $x_2 = (1, 2, 2)$
- $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (1, 0, 0)$ ,  $x_2 = (1, 1, 0)$  et  $x_3 = (1, 1, 1)$
- $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (1, 2, 1)$ ,  $x_2 = (2, 1, -1)$  et  $x_3 = (1, -1, -2)$
- $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (1, -1, 1)$ ,  $x_2 = (2, -1, 3)$  et  $x_3 = (-1, 1, -1)$ .

**Exercice 26** [01628] [Correction]

On pose  $f_1, f_2, f_3, f_4: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions définies par :  
 $f_1(x) = \cos x$ ,  $f_2(x) = x \cos x$ ,  $f_3(x) = \sin x$  et  $f_4(x) = x \sin x$ .  
 Montrer que la famille  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est libre.

**Exercice 27** [01629] [Correction]

Pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ , on pose  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  
 $f_k(x) = e^{k \cdot x}$ .  
 Montrer que la famille  $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille libre de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 28** [01632] [Correction]

Soit  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  une famille libre de vecteurs de  $E$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ .  
 On pose

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{x}_n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n, \vec{y}_i = \vec{x}_i + \vec{u}$$

À quelle condition sur les  $\alpha_i$ , la famille  $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$  est-elle libre ?

**Exercice 29** [01633] [Correction]

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .  
 Montrer que pour tout  $a \in E \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , la famille  $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$  est libre.

**Exercice 30** [02464] [Correction]

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Les fonctions  $x \mapsto \sin(x + a)$ ,  $x \mapsto \sin(x + b)$  et  $x \mapsto \sin(x + c)$  sont-elles linéairement indépendantes ?

**Exercice 31** [00167] [Correction]

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $f_a$  l'application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f_a(x) = |x - a|$ .  
 Montrer que la famille  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  est une famille libre d'éléments de l'espace  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 32** [00169] [Correction]

Pour  $a \in \mathbb{R}_+$ , on note  $f_a$  l'application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par

$$f_a(t) = \cos(at)$$

Montrer que la famille  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}_+}$  est une famille libre d'éléments de l'espace de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 33** [00171] [Correction]

Soit  $E$  l'ensemble des applications  $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que les restrictions  $f|_{[-1; 0]}$  et  $f|_{[0; 1]}$  soient affines.

- Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Donner une base de  $E$ .

## Somme d'un nombre fini de sous-espaces

**Exercice 34** [00190] [Correction]

Soient  $F, G, F', G'$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  vérifiant

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \text{ et } F' \subset G$$

Montrer

$$F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$$

**Exercice 35** [00217] [Correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on note

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$$

Montrer que les  $F_i$  sont des sous-espaces vectoriels et que

$$E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$$

**Exercice 36** [00220] [Correction]

Pour  $d \in \mathbb{N}$ , notons  $H_d$  l'ensemble formé des fonctions polynomiales de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  homogènes de degré  $d$  i.e. pouvant s'écrire comme combinaison linéaire de fonction monôme de degré  $d$ .

Montrer que  $(H_d)_{0 \leq d \leq n}$  est une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe.

**Exercice 37** [00222] [Correction]

Soient  $E_1, \dots, E_n$  et  $F_1, \dots, F_n$  sous-espaces vectoriels de  $E$  tel que  $E_i \subset F_i$  et

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i$$

Montrer que  $E_i = F_i$ .

**Sous espaces affines****Exercice 38** [01727] [Correction]

À quelle condition simple le sous-espace affine  $V = \vec{a} + F$  est-il un sous-espace vectoriel ?

**Exercice 39** [01728] [Correction]

Soient  $V = \vec{a} + F$  et  $W = \vec{b} + G$  deux sous-espaces affines d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

Montrer que

$$V \cap W \neq \emptyset \iff \vec{b} - \vec{a} \in F + G$$

**L'espace des polynômes****Exercice 40** [02146] [Correction]

Soient  $P_1 = X^2 + 1$ ,  $P_2 = X^2 + X - 1$  et  $P_3 = X^2 + X$ .

Montrer que la famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

**Exercice 41** [02147] [Correction]

Pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on pose  $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1}$ .

Montrer que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Exercice 42** [02150] [Correction]

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On considère  $F$  la partie de  $E$  constituée des applications de la forme :

$$x \mapsto P(x) \sin x + Q(x) \cos x \text{ avec } P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

- Montrer que  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Montrer que  $F$  est de dimension finie et déterminer  $\dim F$ .

**Exercice 43** [02151] [Correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $A \in \mathbb{K}_n[X]$  un polynôme non nul.

Montrer que  $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid A \mid P\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}_n[X]$  et en déterminer la dimension et un supplémentaire.

**Exercice 44** [02665] [Correction]

Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , qu'il existe un unique  $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$  tel que  $P_n(0) = 0$  et  $P_n(X + 1) - P_n(X) = X^n$ .

**Exercice 45** [01761] [Correction]

- Montrer que la famille  $(X + k)^n$  pour  $k \in \{0, \dots, n\}$  constitue une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Redémontrer la formule donnant l'expression du déterminant de Vandermonde

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

Il est aisé de constater que l'addition sur  $E \times E$  est commutative, associative, possède un neutre  $(0_E, 0_E)$  et que tout élément est symétrisable dans  $(E \times E, +)$ , le symétrique de  $(x, y)$  étant  $(-x, -y)$ .

Ainsi  $(E \times E, +)$  est un groupe abélien.

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  et  $u, v \in E \times E$ . On peut écrire  $\lambda = a + ib$ ,  $\mu = a' + ib'$  avec  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$  et  $u = (x, y)$ ,  $v = (x', y')$  avec  $x, y, x', y' \in E$ . On a

$$\begin{aligned}\lambda.(u+v) &= (a+ib).(x+x', y+y') \\ &= (ax+ax' - by-by', ay+ay' + bx+bx') = \lambda.u + \lambda.v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu).u &= ((a+a') + i(b+b')).(x, y) \\ &= (ax+a'x - by-b'y, ay+a'y + bx+b'x) = \lambda.u + \mu.u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda.(\mu.u) &= (a+ib)(a'x - b'y, a'y + b'x) \\ &= ((aa' - bb')x - (ab' + a'b)y, (aa' - bb')y + (ab' + a'b)x) \\ &= (\lambda\mu).u\end{aligned}$$

et

$$1.u = u$$

On peut donc conclure que  $(E \times E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

### Exercice 2 : [énoncé]

- (a) non : pas stable par multiplication scalaire :  $(0, 1)$  appartient mais pas  $-(0, 1)$
- (b) non : pas stable par addition :  $(1, 0) + (0, 1)$
- (c) oui
- (d) non : ne passe pas par  $(0, 0)$ .
- (e) non : pas stable par addition :  $(1, 1) + (1, -1)$
- (f) oui (c'est l'espace nul!)

### Exercice 3 : [énoncé]

- (a)  $F \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\sigma} = (0, 0, 0) \in F$  car  $0+0-0=0$  et pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in F$ , on peut écrire  $\vec{u} = (x, y, z)$  et  $\vec{v} = (x', y', z')$  avec  $x+y-z=0$  et  $x'+y'-z'=0$ . On a alors  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$  avec  $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(x+y-z) + \mu(x'+y'-z') = 0$  donc  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$ .

$G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\sigma} = (0, 0, 0) \in G$  car  $(0, 0, 0) = (a-b, a+b, a-3b)$  pour  $a=b=0$ .

Pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in G$ , on peut écrire  $\vec{u} = (a-b, a+b, a-3b)$  et

$\vec{v} = (a'-b', a'+b', a'-3b')$  avec  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ . On a alors

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \dots = (a''-b'', a''+b'', a''-3b'')$  avec  $a'' = \lambda a + \mu a'$  et  $b'' = \lambda b + \mu b'$  donc  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in G$ . Finalement  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

- (b)  $\vec{u} = (x, y, z) \in F \cap G$  si, et seulement s'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \\ a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4b \\ y = -2b \\ z = -6b \\ a = -3b \end{cases}$$

Ainsi  $F \cap G = \{(-4b, -2b, -6b) \mid b \in \mathbb{R}\} = \{(2c, c, 3c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

- (a) oui
- (b) non
- (c) oui
- (d) oui.

### Exercice 5 : [énoncé]

$F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $0 = (0)_{n \in \mathbb{N}} \in F$  car  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = n \cdot 0 + 0$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $(u_n), (v_n) \in F$ . On a

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$$

avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(nu_{n+1} + u_n) + \mu(nv_{n+1} + v_n) = n(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + \lambda u_n + \mu v_n$$

donc  $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in F$ .

Ainsi,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Exercice 6 :** [énoncé]

- (a) non  
 (b) oui  
 (c) non  
 (d) oui.

**Exercice 7 :** [énoncé]

- (a)  $F \subset \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$  et  $\tilde{0} \in F$ .  
 Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in F$ . La fonction  $\lambda f + \mu g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$  et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) = \lambda f'(b) + \mu g'(b) = (\lambda f + \mu g)'(b)$$

donc  $\lambda f + \mu g \in F$ .

- (b)  $G \subset \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$  et  $\tilde{0} \in G$ .  
 Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in G$ . La fonction  $\lambda f + \mu g$  est continue sur  $[a; b]$  et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt = 0$$

donc  $\lambda f + \mu g \in G$ .

**Exercice 8 :** [énoncé]

$\omega\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et  $0 \in \omega\mathbb{R}$  car  $0 = \omega \times 0$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $z, z' \in \omega\mathbb{R}$  on peut écrire  $z = \omega x$  et  $z' = \omega x'$  avec  $x, x' \in \mathbb{R}$  et on a  $(\lambda z + \mu z') = \omega(\lambda x + \mu x')$  avec  $\lambda x + \mu x' \in \mathbb{R}$  donc  $\lambda z + \mu z' \in \omega\mathbb{R}$ .

Ainsi  $\omega\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

Si  $\omega\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  alors puisque  $\omega = \omega \times 1 \in \omega\mathbb{R}$  et  $i \in \mathbb{C}$ , on a  $i\omega \in \omega\mathbb{R}$ . Cela n'est possible que si  $\omega = 0$ .

Inversement, si  $\omega = 0$  alors  $\omega\mathbb{R} = \{0\}$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 9 :** [énoncé]

$F \subset E$  et  $0_E \in F$  car

$$0_E = 0.u_1 + \dots + 0.u_n$$

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  et  $x, y \in F$ . On peut écrire

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \text{ et } y = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n$$

avec  $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$ . On a alors

$$\alpha x + \beta y = (\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1) u_1 + \dots + (\alpha \lambda_n + \beta \mu_n) u_n$$

avec  $\alpha \lambda_i + \beta \mu_i \in \mathbb{K}$  donc  $\alpha x + \beta y \in F$ . Ainsi  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
 De plus

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, u_i = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

avec

$$\lambda_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi  $u_i \in F$ .

**Exercice 10 :** [énoncé]

$\Delta \subset E$ .  $0 = 0 - 0$  avec  $0 \in \mathcal{C}$  donc  $0 \in \Delta$ .

Soient  $h, h' \in \Delta$ . On peut écrire  $h = f - g$  et  $h' = f' - g'$  avec  $f, g, f', g' \in \mathcal{C}$ . On a alors  $h + h' = (f + f') - (g + g')$  avec  $(f + f'), (g + g') \in \mathcal{C}$ .

Soit  $h \in \Delta$ . On peut écrire  $h = f - g$  avec  $f, g \in \mathcal{C}$ .

$\forall \lambda \geq 0$ , on a  $\lambda h = \lambda f - \lambda g$  avec  $\lambda f, \lambda g \in \mathcal{C}$ .

$\forall \lambda < 0$ , on a  $\lambda h = (-\lambda)g - (-\lambda)f$  avec  $(-\lambda)g, (-\lambda)f \in \mathcal{C}$ .

Dans les deux cas  $\lambda h \in \Delta$ .

**Exercice 11 :** [énoncé]

Montrons que l'ensemble  $F$  étudié est un sous-espace vectoriel de l'ensemble  $E$  des suites réelles.

Assurément  $F \subset E$ . La suite nulle est périodique donc  $0 \in F$ . Pour  $u, v \in F$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on peut affirmer que  $\lambda u + \mu v$  est  $TT'$ -périodique (et même ppcm( $T, T'$ )-périodique) en notant  $T$  et  $T'$  des périodes non nulles de  $u$  et  $v$ .

Ainsi,  $\lambda u + \mu v \in F$ .

**Exercice 12 :** [énoncé]

( $\Leftarrow$ ) ok

( $\Rightarrow$ ) Supposons  $F \cap G = F + G$ .  $F \subset F + G = F \cap G \subset G$  et de même  $G \subset F$  et  $F = G$ .

**Exercice 13 :** [énoncé]

- (a) Soit  $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$ , on peut écrire  $x = u + v$  avec  $u \in F \cap G$  et  $v \in F \cap H$ .  
Comme  $u, v \in F$  on a  $x \in F$  et comme  $u \in G$  et  $v \in H$  on a  $u + v \in G + H$ .  
Par suite  $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$ .  
L'égalité n'est pas possible, prendre  $F, G, H$  trois droites distinctes d'un même plan.
- (b) Soit  $x \in F + (G \cap H)$ , on peut écrire  $x = u + v$  avec  $u \in F$  et  $v \in G \cap H$ .  
Comme  $u \in F$  et  $v \in G$  on a  $x \in F + G$  et de même  $x \in F + H$  donc  $x \in (F + G) \cap (F + H)$ .  
L'égalité n'est pas possible, prendre à nouveau trois droites distinctes d'un même plan.

**Exercice 14 :** [énoncé]

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  
Si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$  alors  $F \cup G$  vaut  $F$  ou  $G$  et est évidemment un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Inversement, supposons que  $F \cup G$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $F \not\subset G$ .  
Il existe  $x \in F$  tel que  $x \notin G$ . Pour tout  $y \in G$ ,  $x + y \in F \cup G$  par stabilité du sous-espace vectoriel  $F \cup G$ . Si  $x + y \in G$  alors  $x = (x + y) - y \in G$  ce qui est exclu. Il reste  $x + y \in F$  et alors  $y = (x + y) - x \in F$ . Ainsi  $G \subset F$ .

**Exercice 15 :** [énoncé]

$F + (G \cap H) \subset F + G$  et  $F + (G \cap H) \subset F + H$  donc  
 $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$ .

Supposons de plus  $F \subset G$ .

Soit  $\vec{x} \in (F + G) \cap (F + H)$ . On a  $\vec{x} \in F + G = G$  et  $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$  avec  $\vec{u} \in F$  et  $\vec{v} \in H$ .

$\vec{v} = \vec{x} - \vec{u} \in G$  donc  $\vec{v} \in G \cap H$  puis  $x \in F + (G \cap H)$ .

**Exercice 16 :** [énoncé]

$\supset$  : ok

Soit  $\vec{x} \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$ .

On peut écrire  $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$  avec  $\vec{u} \in F$  et  $\vec{v} \in G \cap F'$  et  $\vec{x} = \vec{u}' + \vec{v}'$  avec  $\vec{u}' \in F$  et  $\vec{v}' \in G \cap G'$ .

$\vec{u} - \vec{u}' = \vec{v}' - \vec{v} \in F \cap G = F' \cap G'$ .  $\vec{v} = -(\vec{v}' - \vec{v}) + \vec{v}' \in G'$  donc

$\vec{v} \in G \cap F' \cap G' = F \cap G \subset F$  puis  $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \in F$ . Ainsi

$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) \subset F$  puis l'égalité

**Exercice 17 :** [énoncé]

$A \cap B \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$  et  $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$  est un sous-espace vectoriel donc

$$\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$$

L'inclusion réciproque n'est pas vraie : prendre  $A = \{u\}$  et  $B = \{2u\}$  avec  $u \neq 0_E$

**Exercice 18 :** [énoncé]

On peut écrire

$$\{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x, y)$$

avec  $x = (2, 1, 0)$  et  $y = (0, 1, 2)$ .

On a  $u = \frac{1}{2}(x + y)$  et  $v = \frac{1}{2}(x - y)$  donc  $u, v \in \text{Vect}(x, y)$  puis  $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(x, y)$ .

Aussi  $x = u + v$  et  $y = u - v$  donc  $x, y \in \text{Vect}(u, v)$  puis  $\text{Vect}(x, y) \subset \text{Vect}(u, v)$ .

Par double inclusion l'égalité.

**Exercice 19 :** [énoncé]

On a

$$u = \lambda x + \mu y \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ -\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + a\mu = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

Ainsi

$$u \in \text{Vect}(x, y) \iff a = 1/2$$

et alors  $u = x + 2y$ .

$x, u \in \text{Vect}(x, y)$  donc  $\text{Vect}(x, u) \subset \text{Vect}(x, y)$ .

$x, y \in \text{Vect}(y, u)$  donc  $\text{Vect}(x, y) \subset \text{Vect}(y, u)$ .

$y, u \in \text{Vect}(x, u)$  donc  $\text{Vect}(y, u) \subset \text{Vect}(x, u)$ .

Finalement les trois espaces sont égaux.

**Exercice 20 :** [énoncé]

$F \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\tilde{o} \in F$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in F$ ,

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$$

et

$$(\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$$

donc  $\lambda f + \mu g \in F$ .

$G \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\tilde{o} \in G$  (en prenant  $a = b = 0$ ).

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in G$ , il existe  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ et } g(x) = cx + d$$

et on a alors

$$(\lambda f + \mu g)(x) = ex + f$$

avec

$$e = \lambda a + \mu c \in \mathbb{R} \text{ et } f = \lambda b + \mu d \in \mathbb{R}$$

donc  $\lambda f + \mu g \in G$ .

Soit  $h \in F \cap G$ . Il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = ax + b$$

car  $h \in G$ . Or  $h \in F$  donc  $h(0) = b = 0$  et  $h'(0) = a = 0$  puis  $h(x) = 0$  i.e.  $h = \tilde{o}$ .

Ainsi

$$F \cap G = \{\tilde{o}\}$$

Soit  $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Posons  $a = h'(0) \in \mathbb{R}$ ,  $b = h(0)$ ,  $g: x \mapsto ax + b$  et  $f = h - g$ .

Clairement  $g \in G$  et  $h = f + g$ .

De plus  $f(0) = h(0) - b = 0$  et  $f'(0) = h'(0) - a = 0$  donc  $f \in F$ .

Ainsi

$$F + G = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Finalement,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

### Exercice 21 : [énoncé]

$F \subset \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{C})$  et  $\tilde{0} \in F$  car  $\int_{-1}^1 0 dt = 0$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  et  $f, g \in F$ , on a

$$\int_{-1}^1 (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_{-1}^1 f(t) dt + \mu \int_{-1}^1 g(t) dt = 0$$

donc  $\lambda f + \mu g \in F$ .

$G \subset \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$  et  $\tilde{0} \in G$  car c'est une fonction constante.

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  et  $f, g \in G$ . On a  $\lambda f + \mu g \in G$  car il est clair que c'est une fonction constante.

Soit  $h \in F \cap G$ . On a  $h$  constante car  $h \in G$ . Posons  $C$  la valeur de cette constante.

Puisque  $h \in F$ , on a

$$\int_{-1}^1 h(t) dt = \int_{-1}^1 C dt = 2C = 0$$

et donc  $h = \tilde{0}$ . Ainsi

$$F \cap G = \{\tilde{0}\}$$

Soit  $h \in \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{C})$ . Posons  $C = \int_{-1}^1 h(t) dt$ ,  $g$  la fonction constante égale à  $\frac{1}{2}C$  et  $f = h - g$ .

Clairement  $g \in G$  et  $f + g = h$ . De plus  $\int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 h(t) dt - C = 0$  donc  $f \in F$ .

Ainsi

$$F + G = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{C})$$

Finalement  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{C})$ .

### Exercice 22 : [énoncé]

$H \subset \mathbb{K}^n$ ,  $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in H$  car  $0 + \dots + 0 = 0$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in H$ . On a

$$\lambda x + \mu \vec{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$$

avec

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \dots + x_n) + \mu(y_1 + \dots + y_n) = 0$$

donc  $\lambda x + \mu \vec{y} \in H$ .

$\text{Vect}(u) = \mathbb{K}u$  est un sous-espace vectoriel.

Soit  $v \in H \cap \text{Vect}(u)$ . On peut écrire  $v = \lambda u = (\lambda, \dots, \lambda)$  car  $v \in \text{Vect}(u)$ .

Or  $v \in H$  donc  $\lambda + \dots + \lambda = 0$  d'où  $\lambda = 0$  et donc  $v = 0$ . Ainsi

$$H \cap \text{Vect}(u) = \{0\}$$

Soit  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ . Posons  $\lambda = \frac{1}{n}(v_1 + \dots + v_n)$ ,  $\vec{y} = \lambda u$  et  $x = v - \vec{y}$ .

Clairement  $x + \vec{y} = v$ ,  $\vec{y} \in \text{Vect}(u)$ . De plus  $x = (x_1, \dots, x_n)$  avec

$$x_1 + \dots + x_n = (v_1 - \lambda) + \dots + (v_n - \lambda) = (v_1 + \dots + v_n) - n\lambda = 0$$

donc  $x \in H$ . Ainsi

$$H + \text{Vect}(u) = \mathbb{K}^n$$

Finalement,  $H$  et  $\text{Vect}(u)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{K}^n$ .

### Exercice 23 : [énoncé]

$F$  et  $G$  sont clairement des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Soit  $f \in F \cap G$ . On peut écrire  $f = \lambda \sin + \mu \cos$ .

De plus  $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$  donne :  $\mu = \lambda = -\mu$  d'où  $\lambda = \mu = 0$  puis  $f = 0$ .



Soit  $f \in E$ . Posons  $\lambda = \frac{2f(\pi/2)-f(0)-f(\pi)}{2}$ ,  $\mu = \frac{f(0)-f(\pi)}{2}$ ,  $h = \lambda \sin + \mu \cos$  et  $g = f - h$ .

On a  $f = g + h$  avec  $g \in F$  et  $h \in G$ .

Ainsi  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 24 :** [énoncé]

(a) sans peine

(b) L'ensemble des fonctions constantes convient.

**Exercice 25 :** [énoncé]

(a) oui b) oui c) non  $x_3 = x_2 - x_1$  d) non  $x_3 = -x_1$ .

**Exercice 26 :** [énoncé]

Supposons

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$$

On a

$$\forall x \in [0; 2\pi], (a + bx) \cos x + (c + dx) \sin x = 0$$

Pour  $x = 0$  et  $x = \pi$  on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b\pi = 0 \end{cases}$$

d'où  $a = b = 0$ .

Pour  $x = \frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{3\pi}{2}$  on obtient le système

$$\begin{cases} c + d\pi/2 = 0 \\ c + 3d\pi/2 = 0 \end{cases}$$

d'où  $c = d = 0$ .

Finalement ; la famille étudiée est libre.

**Exercice 27 :** [énoncé]

Supposons  $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ .

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 e^x + \dots + \lambda_n e^{nx} = 0$$

Quand  $x \rightarrow -\infty$ , en passant la relation ci-dessus à la limite, on obtient  $\lambda_0 = 0$ .

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 e^x + \dots + \lambda_n e^{nx} = 0$$

donc

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^x + \dots + \lambda_n e^{(n-1)x} = 0$$

En reprenant la démarche ci-dessus, on obtient  $\lambda_1 = 0$ , puis de même  $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

**Exercice 28 :** [énoncé]

Supposons  $\lambda_1 \vec{y}_1 + \dots + \lambda_n \vec{y}_n = \vec{0}$ . On a

$$(\lambda_1 + \alpha_1(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)) \cdot \vec{x}_1 + \dots + (\lambda_n + \alpha_n(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)) \cdot \vec{x}_n = \vec{0}$$

donc

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \alpha_1(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)) = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_n + \alpha_n(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)) = 0 \end{cases}$$

En sommant les équations on obtient :

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(1 + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)) = 0$$

Si  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq -1$  alors  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$  puis, par le système,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Si  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -1$  alors  $\alpha_1 \vec{y}_1 + \dots + \alpha_n \vec{y}_n = \vec{0}$ .

Finalement, la famille  $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$  est libre si, et seulement si,

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq -1.$$

**Exercice 29 :** [énoncé]

Supposons

$$\lambda_1(e_1 + a) + \dots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E$$

On a  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_p) \cdot a$ .

Si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p \neq 0$  alors

$$a = -\frac{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$$

C'est exclu.

Si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 0$  alors  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E$  puis  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ .

**Exercice 30 :** [énoncé]

Non car ces trois fonctions sont combinaisons linéaires des deux suivantes

$$x \mapsto \sin x \text{ et } x \mapsto \cos x$$

**Exercice 31 :** [énoncé]

Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  des réels deux à deux distincts. Supposons  $\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n} = 0$ . Pour tout  $i \in \{1 | \dots, n\}$ , si  $\lambda_i \neq 0$  alors  $\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n}$  n'est pas dérivable en  $a_i$  alors que la fonction nulle l'est. Nécessairement  $\lambda_i = 0$  et la famille étudiée est donc libre.

**Exercice 32 :** [énoncé]

Montrons que toute sous-famille finie à  $n$  éléments de  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}_+}$  est libre.

Par récurrence sur  $n \geq 1$ .

Pour  $n = 1$  : ok

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 1$ .

Soient  $a_1, \dots, a_{n+1}$  des réels positifs distincts et supposons

$$\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0 \quad (1)$$

En dérivant 2 fois cette relation :

$$a_1^2 \lambda_1 f_{a_1} + \dots + a_{n+1}^2 \lambda_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0 \quad (2)$$

La combinaison  $a_{n+1}^2(1) - (2)$  donne

$$\lambda_1(a_{n+1}^2 - a_1^2)f_{a_1} + \dots + \lambda_n(a_{n+1}^2 - a_n^2)f_{a_n} = 0$$

Par hypothèse de récurrence et en exploitant que les  $a_i^2$  sont deux à deux distincts, on obtient  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  puis ensuite aisément  $\lambda_{n+1} = 0$ . Récurrence établie.

**Exercice 33 :** [énoncé]

(a)  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ .

(b)  $x \mapsto 1$ ,  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto |x|$  forment une base de  $E$ .

**Exercice 34 :** [énoncé]

Supposons  $x + x' + y = 0$  avec  $x \in F$ ,  $x' \in F'$  et  $y \in G \cap G'$ .

Puisque  $x' \in F' \subset G$  et  $y \in G \cap G' \subset G$ , on a  $x' + y \in G$ .

Or  $F$  et  $G$  sont en somme directe donc  $x + (x' + y) = 0$  avec  $x \in F$  et  $x' + y \in G$  entraîne  $x = 0$  et  $x' + y = 0$ .

Sachant  $x' + y = 0$  avec  $x \in F'$ ,  $y \in G'$  et  $F', G'$  en somme directe, on a  $x' = y = 0$ .

Finalement  $x = x' = y = 0$  et on peut affirmer que les espaces  $F, F'$  et  $G \cap G'$  sont en somme directe.

Soit  $a \in E$ . Puisque  $E = F \oplus G$ , on peut écrire  $a = x + b$  avec  $x \in F$  et  $b \in G$ .

Sachant  $E = F' \oplus G'$ , on peut écrire  $b = x' + y$  avec  $x' \in F'$  et  $y \in G'$ .

Or  $y = b - x'$  avec  $b \in G$  et  $x' \in F' \subset G$  donc  $y \in G$  et ainsi  $y \in G \cap G'$ .

Finalement, on obtient  $a = x + x' + y$  avec  $x \in F$ ,  $x' \in F'$  et  $y \in G \cap G'$ .

On peut conclure  $E \subset F \oplus F' \oplus (G \cap G')$  puis  $E = F \oplus F' \oplus (G \cap G')$ .

**Exercice 35 :** [énoncé]

Les  $F_i$  sont clairement des sous-espaces vectoriels.

Supposons  $P_0 + \dots + P_n = 0$  avec  $P_i \in F_i$ .

$P_i$  possède par définition  $n$  racines et  $(P_0 + \dots + P_n)(i) = 0$  donc  $P_i(i) = 0$  ce qui fournit une  $n + 1$ ème racine. Par suite  $P_i = 0$  car  $\deg P_i \leq n$ .

Soit  $P \in E$ .

Analyse : Supposons  $P = P_0 + \dots + P_n$  avec  $P_i \in F_i$ .

On a  $P(i) = P_i(i)$  car  $P_j(i) = 0$  pour  $j \neq i$ .

Par suite

$$P_i = P(i) \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(X - j)}{(i - j)}$$

Synthèse : Les  $P_i$  précédemment proposés conviennent car

$P_i \in F_i$  par construction et  $P = P_0 + \dots + P_n$  puisque  $P - (P_0 + \dots + P_n)$  est le polynôme nul car de degré  $\leq n$  et possédant au moins  $n + 1$  racines :  $0, 1, \dots, n$ .

**Exercice 36 :** [énoncé]

$H_d$  est défini comme le sous-espace vectoriel engendré par les monômes de degré  $d$ , c'est donc un sous-espace vectoriel. Si  $\sum_{k=0}^n P_k = 0$  avec  $P_k \in H_k$  alors l'unicité de l'écriture d'un polynôme en somme de monôme permet de conclure  $P_k = 0$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ . La famille  $(H_d)_{0 \leq d \leq n}$  est donc bien une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe.

**Exercice 37 :** [énoncé]

Soit  $x \in F_i$ .

Puisque  $x \in \bigoplus_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ , on peut écrire  $x = x_1 + \dots + x_n$  avec  $x_i \in E_i$ .

On a alors

$$x_1 + \dots + (x_i - x) + \dots + x_n = 0_E$$

avec  $x_1 \in F_1, \dots, x_i - x \in F_i, \dots, x_n \in F_n$ .

Or les espaces  $F_1, \dots, F_n$  sont en somme directe, donc les vecteurs précédents sont nuls et en particulier

$$x = x_i \in E_i$$

**Exercice 38 :** [énoncé]

Si  $\vec{a} \in F$  alors  $V = \vec{a} + F = F$  est un sous-espace vectoriel.

Inversement, si  $V$  est un sous-espace vectoriel alors  $\vec{o} \in V$  donc il existe  $\vec{b} \in F$  tel que  $\vec{o} = \vec{a} + \vec{b}$ .

On a alors  $\vec{a} = -\vec{b} \in F$ . La condition cherchée et  $\vec{a} \in F$ .

**Exercice 39 :** [énoncé]

( $\implies$ ) Supposons  $V \cap W \neq \emptyset$ . Soit  $\vec{x} \in V \cap W$ . On peut écrire  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{u} = \vec{b} + \vec{v}$  avec  $\vec{u} \in F$  et  $\vec{v} \in G$ .

On a alors  $\vec{b} - \vec{a} = \vec{u} + (-\vec{v}) \in F + G$ .

( $\impliedby$ ) Inversement, si  $\vec{b} - \vec{a} \in F + G$  alors on peut écrire  $\vec{b} - \vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$  avec  $\vec{u} \in F$  et  $\vec{v} \in G$ .

On alors  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{u} = \vec{b} - \vec{v} \in V \cap W$ .

**Exercice 40 :** [énoncé]

Supposons  $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$ . Par égalité de coefficients de polynômes :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

La famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est une famille libre formée de  $3 = \dim \mathbb{K}_2[X]$  polynômes de  $\mathbb{K}_2[X]$ , c'est donc une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

**Exercice 41 :** [énoncé]

On remarque que  $\deg P_k = k$  donc  $P_k \in \mathbb{K}_n[X]$ .

Supposons  $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$ .

Si  $\lambda_n \neq 0$  alors  $\deg(\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n) = n$  car

$\deg(\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}) \leq n-1$  et  $\deg \lambda_n P_n = n$

Ceci est exclu, donc  $\lambda_n = 0$ .

Sachant  $\lambda_n = 0$ , le même raisonnement donne  $\lambda_{n-1} = 0$  et ainsi de suite

$\lambda_{n-2} = \dots = \lambda_0 = 0$ .

La famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une famille libre de  $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$  éléments de  $\mathbb{K}_n[X]$ , c'est donc une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Exercice 42 :** [énoncé]

(a)  $F \subset E$  et la fonction nulle appartient à  $F$  (en prenant  $P = Q = 0 \in \mathbb{R}_n[X]$ )  
Soient  $f, g \in F$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On peut écrire  $f(x) = P(x) \sin x + Q(x) \cos x$  et  $g(x) = \hat{P}(x) \sin x + \hat{Q}(x) \cos x$  avec  $P, Q, \hat{P}, \hat{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$ .

On a alors  $\lambda f + \mu g = (\lambda P + \mu \hat{P})(x) \sin x + (\lambda Q + \mu \hat{Q})(x) \cos x$  avec  $\lambda P + \mu \hat{P}, \lambda Q + \mu \hat{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$  donc  $\lambda f + \mu g \in F$  et finalement  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(b) Posons  $f_k(x) = x^k \sin x$  et  $g_k(x) = x^k \cos x$  avec  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

Les fonctions  $f_0, \dots, f_n, g_0, \dots, g_n$  sont des fonctions de  $F$  formant clairement une famille génératrice.

Supposons  $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n + \mu_0 g_0 + \dots + \mu_n g_n = 0$  alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :  $(\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n) \sin x + (\mu_0 + \mu_1 x + \dots + \mu_n x^n) \cos x = 0$ .

Pour  $x = \pi/2 + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , on obtient une infinité de racine au polynôme  $\lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n$ .

Ceci permet d'affirmer  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Pour  $x = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , on peut affirmer  $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ .

On peut conclure que  $(f_0, \dots, f_n, g_0, \dots, g_n)$  est libre et donc une base de  $F$  puis  $\dim F = 2(n+1)$ .

**Exercice 43 :** [énoncé]

$F \subset \mathbb{K}_n[X]$ ,  $0 \in F$  car  $A \mid 0$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $P, Q \in F$ .

$A \mid P$  et  $A \mid Q$  donc  $A \mid \lambda P + \mu Q$  puis  $\lambda P + \mu Q \in F$ .

Ainsi,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

Notons  $p = \deg(A)$ . On a

$$F \oplus \mathbb{K}_{p-1}[X] = \mathbb{K}_n[X]$$

ce qui détermine un supplémentaire de  $F$  et donne  $\dim F = n+1-p$ .

**Exercice 44 :** [énoncé]

Considérons l'application  $\varphi: \mathbb{R}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  définie par

$\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ . L'application  $\varphi$  est bien définie, linéaire et de noyau

$\mathbb{R}_0[X]$ . Par le théorème du rang elle est donc surjective et les solutions de l'équation  $\varphi(P) = X^n$  se déduisent les unes des autres par l'ajout d'un élément de  $\mathbb{R}_0[X]$  c'est-à-dire d'une constante. Ainsi il existe une unique solution vérifiant  $P(0) = 0$ .

**Exercice 45 :** [\[énoncé\]](#)

- (a) La matrice de la famille étudiée dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  a pour coefficient général

$$a_{i,j} = \binom{n}{i} j^i \text{ avec } 0 \leq i, j \leq n$$

En factorisant par ligne le déterminant de cette matrice est

$$\prod_{i=0}^n \binom{n}{i} V_{n+1}(0, 1, \dots, n) \neq 0$$

avec  $V_{n+1}(a_0, \dots, a_n)$  déterminant de Vandermonde.

- (b) cf. cours.