Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Exercice 1 [03322] [Correction]
Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi\colon E\times E\to\mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle+k\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 2 [04092] [Correction]
Soit $E=\mathcal{C}^1([0\,;1],\mathbb{R})$. Pour $f,g\in E$, on pose

$$\varphi(f,g)=\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t+f(1)g(0)+f(0)g(1)$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Calculs dans un espace préhilbertien réel

Exercice 3 [00505] [Correction]
Démontrer que la boule unité fermée B d'un espace préhilbertien réel est strictement convexe *i.e.* que pour tout $x,y\in B$ différents et tout $t\in\,]0\,;1[$, $\|(1-t)x+ty\|<1$.

Exercice 4 [00511] [Correction]
On munit $E=\mathcal{C}([a\,;b],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(f\,|\,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

En exploitant le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, établir que l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$.

Exercice 5 [03318] [Correction]
Soient $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E.
On suppose qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,-1\}^n,\left\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_k x_k\right\|\le M$$

Montrer

$$\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2\le M^2$$

Exercice 6 [03321] [Correction]
On munit l'espace $E=\mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour $f\in E$, on note F la primitive de f qui s'annule en 0

$$\forall x\in[0\,;1],F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f)=F$.

(a) Déterminer un endomorphisme v^* vérifiant

$$\forall f,g\in E,\langle v(f),g\rangle=\langle f,v^*(g)\rangle$$

(b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^*\circ v$.

Exercice 7 [03325] [Correction]
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E. Établir

$$F^\perp=\bar{F}^\perp$$

Exercice 8 [00351] [Correction]
Soient $e=(e_i)_{1\le i\le n}$ et $f=(f_j)_{1\le j\le n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E.
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On pose

$$A=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(f_i\,|\,u(e_j))^2$$

Montrer que A ne dépend pas des bases orthonormales choisies

Représentation d'une forme linéaire

Exercice 9 [03024] [Correction]
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \langle A, P\rangle ?$$

Exercice 10 [01573] [Correction]
Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

(b) Soit $\theta\colon E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\theta(P) = P(0)$.
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme Q tel que pour tout $P \in E$ on ait $\theta(P) = \varphi(P, Q)$.

Polynômes orthogonaux

Exercice 11 [03079] [Correction]
On définit

$$Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

(a) Soit $n \geq 1$. Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1\,;1[$.

(b) Montrer que

$$Q_n = X^n + (X^2-1)R_n(X)$$

avec $R_n \in \mathbb{R}[X]$. En déduire $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

(c) On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(d) Calculer $\|Q_n\|^2$.

Exercice 12 [03657] [Correction]
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.

(b) Étudier la parité des polynômes P_n.

(c) Prouver que pour chaque $n \geq 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

(d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$$

Exercice 13 [01332] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Justifier la définition de $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1, F)$. On note $(P_0, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, \dots, X^n)$.

(b) Calculer $P_k(0)^2$.

(c) Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, \dots, P_n)$. En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Familles obtusangles

Exercice 14 [03157] [Correction]
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n \geq 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel. On suppose

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, (x_i \,|\, x_j) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 15 [01574] [Correction]
(Famille obtusangle) Soit $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il est impossible que

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+2,\ (x_i \,|\, x_j) < 0$$

Éléments propres d'endomorphismes euclidiens

Exercice 16 [00517] [Correction]
Soit a un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme

$$f_\alpha : x \mapsto x + \alpha(a\,|\,x)a$$

(a) Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les f_α bijectives ?

(b) Déterminer les éléments propres de f_α.

Projections orthogonales

Exercice 17 [03766] [Correction]
On pose $E = \mathcal{C}^1([0\,;1],\mathbb{R})$ et

$$\forall f,g \in E, \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

(b) On pose

$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \left\{f \in E \mid f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\right\}$$

Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.

(c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t$$

Exercice 18 [00529] [Correction]
On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

(c) Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at+b))^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 19 [02735] [Correction]
Calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Familles totales

Exercice 20 [00530] [Correction]
(Formule de Parseval) On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale totale d'un espace préhilbertien E. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|(e_n\,|\,x)\right|^2$$

Produit scalaire et transposition matricielle

Exercice 21 [03936] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq \|X\|$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.
Établir

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left\|{}^tAX\right\| \leq \|X\|$$

Exercice 22 [03938] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq \|X\|$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.

(a) Établir
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left\|{}^t AX\right\| \leq \|X\|$$

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $AX = X$ alors ${}^t AX = X$

(c) Établir
$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n)$$

Exercice 23 [00354] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir
$$\operatorname{rg}({}^t AA) = \operatorname{rg} A$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Il est immédiat que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
On a
$$\varphi(x,x) = \|x\|^2 + k\langle x,a\rangle^2$$
En particulier
$$\varphi(a,a) = \|a\|^2 + k\|a\|^4 = (1+k)$$
Pour que la forme bilinéaire symétrique φ soit définie positive, il est nécessaire que $1+k>0$.
Inversement, supposons $1+k>0$.
Si $k\geq 0$ alors $\varphi(x,x)\geq \|x\|^2$ et donc
$$\forall x\in E\setminus\{0_E\}, \varphi(x,x)>0$$
Si $k\in\,]-1\,;0[$, $k=-\alpha$ avec $\alpha\in\,]0\,;1[$ et
$$\varphi(x,x) = \|x\|^2 - \alpha\langle x,a\rangle^2$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\langle x,a\rangle^2 \leq \|x\|^2\|a\|^2 = \|x\|^2$$
donc
$$\varphi(x,x) \geq \|x\|^2 - \alpha\|x\|^2 = (1-\alpha)\|x\|^2$$
de sorte que
$$\forall x\in E\setminus\{0_E\}, \varphi(x,x)>0$$
Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.
Finalement, φ est un produit scalaire si, et seulement si, $1+k>0$.

Exercice 2 : [énoncé]
L'application φ est bien définie de $E\times E\to\mathbb{R}$ et clairement bilinéaire et symétrique.
Soit $f\in E$.
$$\varphi(f,f) = \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t + 2f(0)f(1)$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geq (f(1)-f(0))^2$$
puis
$$\varphi(f,f)\geq f(1)^2+f(0)^2\geq 0$$
Au surplus, si $\varphi(f,f)=0$ alors $f(0)=f(1)=0$, mais aussi $\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t=0$. La fonction f est donc constante égale à 0.

Exercice 3 : [énoncé]
Par l'inégalité triangulaire
$$\|(1-t)x+ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| \leq 1$$
De plus, s'il y a égalité alors $\|x\|=1$, $\|y\|=1$ et les vecteurs $(1-t)x$ et ty sont positivement liés.
Les vecteurs x et y étant unitaires et positivement liés, ils sont égaux. Ceci est exclu.

Exercice 4 : [énoncé]
Soit $f\in F^\perp$. Puisque f est continue sur le segment $[a\,;b]$, par le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass :
$$\forall\varepsilon>0, \exists P\in\mathbb{R}[X], \|f-P\|_{\infty,[a;b]}\leq\varepsilon$$
On a alors
$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f-P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f-P)$$
avec
$$\left|\int_a^b f(f-P)\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty\|f-P\|_\infty \leq (b-a)\|f\|_\infty\varepsilon$$
En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|f\|^2=0$ donc $f=0$. Ainsi $F^\perp\subset\{0\}$ puis $F^\perp=\{0\}$.

Exercice 5 : [énoncé]
Cas $n=1$, c'est immédiat.
Cas $n=2$:

Si $\|x+y\| \leq M$ et $\|x-y\| \leq M$ alors

$$\|x\|^2 + 2(x\,|\,y) + \|y\|^2 \leq M^2 \text{ et } \|x\|^2 - 2(x\,|\,y) + \|y\|^2 \leq M^2$$

Si $(x\,|\,y) \geq 0$ alors première identité donne $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq M^2$, si $(x\,|\,y) \leq 0$, c'est la deuxième identité qui permet de conclure.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$.
Supposons

$$\forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{1, -1\}^{n+1}, \left\|\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k x_k\right\| \leq M$$

Par l'étude du cas $n = 2$ appliquée au vecteur

$$x = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \text{ et } y = x_{n+1}$$

on obtient

$$\forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \leq M^2$$

donc

$$\forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\| \leq \sqrt{M^2 - \|x_{n+1}\|^2}$$

Par hypothèse de récurrence

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq M^2 - \|x_{n+1}\|^2$$

et l'on peut conclure.
Récurrence établie.
Une variante probabiliste élégante : On introduit des variables $r_1, \dots, r_n$ indépendantes et uniformes sur $\{\pm 1\}$. Par hypothèse

$$\mathrm{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\|^2\right) \leq M^2$$

Or en développant

$$\mathrm{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\|^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{E}(r_i r_j)(x_i\,|\,x_j) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

car $\mathrm{E}(r_i r_j) = \delta_{i,j}$.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(1)G(1) - \int_0^1 f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\left(G(1) - G(x)\right)\mathrm{d}x$$

Ainsi pour

$$v^*(g) \colon x \mapsto G(1) - G(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

on vérifie que v^* est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall f, g \in E, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^*(g)\rangle$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $(v^* \circ v)(f) = \lambda f$.
La fonction f est nécessairement dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ v(f)(x) = -\lambda f'(x) \end{cases}$$

La fonction f est donc nécessairement deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ \lambda f'(0) = 0 \\ f(x) = -\lambda f''(x) \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda > 0$ alors en écrivant $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$, l'équation différentielle $\lambda y'' + y = 0$ donne la solution générale

$$y(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

La condition $f'(0) = 0$ donne $\beta = 0$ et la condition $f(1) = 0$ donne $\alpha\cos(\omega) = 0$.
Si $\omega \notin \pi/2 + \pi\mathbb{N}$ alors $f = 0$ et $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ n'est pas valeur propre.
En revanche, si $\omega \in \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, alors par la reprise des calculs précédents donne $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ valeur propre associé au vecteur propre associé $f(x) = \cos(\omega x)$.
Si $\lambda < 0$ alors la résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec les conditions proposées donne $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.

Exercice 7 : [énoncé]
Puisque $F \subset \bar{F}$, on a déjà
$$\bar{F}^{\perp} \subset F^{\perp}$$
Soit $a \in F^{\perp}$.
Pour tout $x \in \bar{F}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de F telle que $x_n \to x$.
Puisque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle x_n, a\rangle = 0$$
à la limite (le produit scalaire étant continue)
$$\langle x, a\rangle = 0$$
et donc $a \in \bar{F}^{\perp}$.
Finalement, par double inclusion $F^{\perp} = \bar{F}^{\perp}$.

Exercice 8 : [énoncé]
Puisque la base f est orthonormale, on a
$$A = \sum_{j=1}^{n} \|u(e_j)\|^2$$
et donc
$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (e_i \,|\, u(e_j))^2$$
Notons $M = (m_{i,j})$ la matrice de u dans la base orthonormale e. On a
$$m_{i,j} = (e_i \,|\, u(e_j))$$
et donc
$$A = \operatorname{tr}\left({}^tMM\right)$$
Si $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base orthonormale de E et si M' est la matrice de u dans e', on peut écrire
$$M' = {}^tPMP \text{ avec } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$
et alors
$$\operatorname{tr}({}^tM'M') = \operatorname{tr}({}^tP{}^tMMP) = \operatorname{tr}({}^tMMP{}^tP) = \operatorname{tr}({}^tMM)$$
Finalement, la quantité A ne dépend ni de choix de f ni de celui de e.

Exercice 9 : [énoncé]
Supposons l'existence d'un tel polynôme A et considérons $P(X) = XA(X)$.
On a
$$0 = P(0) = \langle A, P\rangle = \int_0^1 tA(t)^2 \,\mathrm{d}t$$
Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on obtient
$$\forall t \in [0\,;1], tA(t)^2 = 0$$
Le polynôme A admet une infinité de racine, c'est donc le polynôme nul ce qui est absurde.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) ras

(b) Supposons qu'un tel polynôme Q existe et considérons $P = XQ$.
On a $\theta(P) = 0 = \int_0^1 tQ^2(t)\,\mathrm{d}t$ donc $Q = 0$ d'où $\theta = 0$. Absurde.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) 1 et -1 sont racines de multiplicité n du polynôme $(X^2-1)^n$.
1 et -1 sont donc racines des polynômes
$$(X^2-1)^n, \left((X^2-1)^n\right)', \dots, \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$
En appliquant le théorème de Rolle, on peut alors montrer par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ que $\left((X^2-1)^n\right)^{(k)}$ possède au moins k racines dans l'intervalle $]-1\,;1[$.
En particulier Q_n possède au moins n racines dans $]-1\,;1[$, or $\deg Q_n = n$ donc il n'y a pas d'autres racines que celles-ci et elles sont simples.

(b) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, c'est immédiat.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(2(n+1)X(X^2-1)^n\right)^{(n)}$$
Par la formule de Leibniz
$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!}\left(X\left((X^2-1)^n\right)^{(n)} + nX\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}\right)$$

1 et -1 sont racines du polynôme $\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$ et donc celui-ci peut s'écrire $(X^2-1)S(X)$.
En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$Q_{n+1}(X) = X^{n+1}+X(X^2-1)R_n(X)+2nX(X^2-1)S(X) = X^{n+1}+(X^2-1)R_{n+1}(X)$$

Récurrence établie

(c) Par intégration par parties successives et en exploitant l'annulation en 1 et -1 des polynômes

$$(X^2-1)^n, \left((X^2-1)^n\right)', \ldots, \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$

on obtient

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P^{(n)}(t)(t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$$

En particulier, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(d) Par la relation qui précède

$$\int_{-1}^{1} (Q_n(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} Q_n^{(n)}(t)(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$$

Puisque le polynôme $(X^2-1)^n$ est unitaire et de degré $2n$

$$\left[(X^2-1)^n\right]^{(2n)} = (2n)! \text{ et } Q_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

De plus, par intégration par parties successives

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} (1-t)^n(1+t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Au final

$$\|Q_n\|^2 = \frac{2}{(2n+1)}$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n \geq 0$, établissons l'existence et l'unicité de la sous-famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que voulue.
Cas $n = 0$: le polynôme P_0 vaut 1.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.
Les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont alors déterminés de façon unique par l'hypothèse de récurrence et il reste seulement à former P_{n+1}. Celui-ci peut s'écrire

$$P_{n+1} = X^{n+1} + Q(X) \text{ avec } Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$$

On veut $\langle P_{n+1}, P_k\rangle = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Le polynôme Q doit donc vérifier

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, (Q(X) \mid P_k) = -\langle X^{n+1}, P_k\rangle$$

Ces relations détermine entièrement le polynôme Q puisque $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$Q = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle X^{n+1}, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k$$

Le polynôme P_{n+1} existe donc et est unique.
Récurrence établie.

(b) La famille $((-1)^n P_n(-X))$ vérifie les mêmes conditions que celles ayant défini la suite (P_n). On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$$

(c) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.
On peut écrire $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k P_k$ et donc

$$\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0.$$

On peut aussi écrire $XQ = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k P_k$ et donc

$$\langle XP_n, Q\rangle = \langle P_n, XQ\rangle = 0.$$

On en déduit

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \langle P_{n+1} - XP_n, Q\rangle = 0$$

(d) Par simplification des termes de plus haut degré

$$P_{n+1} - XP_n \in \mathbb{R}_n[X]$$

On peut donc écrire

$$P_{n+1} - XP_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$$

Or $P_{n+1}-XP_n$ est orthogonal à $P_0,\dots,P_{n-2}$ donc

$$P_{n+1}-XP_n=\alpha_nP_n+\alpha_{n-1}P_{n-1}$$

Enfin, par parité, $\alpha_n=0$ et donc

$$P_{n+1}-XP_n=\alpha_{n-1}P_{n-1}$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Pour $P,Q\in E$, la fonction $t\mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et vérifie

$$t^2P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.
On vérifie aisément que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
Si $\langle P,P\rangle=0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

$$\forall t\in[0\,;+\infty[,P(t)^2\mathrm{e}^{-t}=0$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P=0$.

(b) Pour $k\geq 1$ ou $k=0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P_k' sont orthogonaux car

$$P_k'\in\mathrm{Vect}(P_1,\dots,P_{k-1})$$

Par une intégration par parties

$$0=\int_0^{+\infty}P_k'(t)P_k(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$P_k(0)^2=\|P_k\|^2=1$$

(c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P\mapsto P(0)$). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire

$$Q=\sum_{k=0}^n\langle P_k,Q\rangle P_k$$

Or

$$\langle P_k,Q\rangle=\langle P_k-P_k(0),Q\rangle+P_k(0)\langle 1,Q\rangle$$

Puisque le polynôme $P_k-P_k(0)$ est élément de F, il est orthogonal à Q et l'on obtient

$$\langle P_k,Q\rangle=P_k(0)\langle 1,Q\rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q=\lambda\sum_{k=0}^nP_k(0)P_k\text{ avec }\lambda=\langle 1,Q\rangle\neq 0$$

On en déduit

$$d(1,F)=\frac{|\langle 1,Q\rangle|}{\|Q\|}=\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^nP_k(0)^2}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2=d(1,F)^2+d(1,F^\perp)^2$$

et l'on obtient

$$d(1,F^\perp)=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice 14 : [énoncé]

Raisonnons par récurrence sur $n\geq 2$.
Pour $n=2$ la propriété est immédiate car aucun vecteur ne peut être nul.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 2$.
Soit $(x_1,\dots,x_{n+1})$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall 1\leq i\neq j\leq n+1,(x_i\,|\,x_j)<0$$

Par projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $D=\mathrm{Vect}\,x_{n+1}$, on peut écrire pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$

$$x_i=y_i+\lambda_ix_{n+1}$$

avec y_i un vecteur orthogonal à x_{n+1} et $\lambda_i<0$ puisque $(x_i\,|\,x_{n+1})<0$.
On remarque alors

$$(x_i\,|\,x_j)=(y_i\,|\,y_j)+\lambda_i\lambda_j\|x_{n+1}\|^2$$

et on en déduit

$$\forall 1\leq i\neq j\leq n,(y_i\,|\,y_j)<0$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que la famille $(y_2,\dots,y_n)$ est libre et puisque ses vecteurs sont orthogonaux au vecteur x_{n+1} non nul, on peut aussi

dire que la famille $(y_2,\dots,y_n,x_{n+1})$ est libre. Enfin, on en déduit que la famille $(x_2,\dots,x_n,x_{n+1})$ car cette dernière engendre le même espace que la précédente et est formée du même nombre de vecteurs.
Par permutation des indices, ce qui précède vaut pour toute sous-famille formée de n vecteurs de la famille initiale $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$.
Récurrence établie.

Exercice 15 : [énoncé]
Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$
Pour $n=1$: Soit u un vecteur unitaire de E. On peut écrire
$x_1=\lambda_1.u, x_2=\lambda_2.u, x_3=\lambda_3.u$
On a alors

$$(x_1\,|\,x_2)=\lambda_1\lambda_2, (x_2\,|\,x_3)=\lambda_2\lambda_3, (x_3\,|\,x_1)=\lambda_3\lambda_1$$

Ces trois quantités ne peuvent être négatives car

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_2\lambda_3\lambda_3\lambda_1=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2\geq 0$$

Supposons la propriété établie au rang $(n-1)\in\mathbb{N}^*$:
Par l'absurde, supposons que la configuration soit possible :
Nécessairement $x_{n+2}\neq 0$.
Posons $F=\operatorname{Vect}(x_{n+2})^\perp$. On a $\dim F=n-1$.

$$\forall 1\leq i\leq n+1, x_i=y_i+\lambda_i.x_{n+2}$$

avec $y_i\in F$ et $\lambda_i\in\mathbb{R}$.
Comme $(x_i\,|\,x_{n+2})<0$ on a $\lambda_i<0$.

$$\forall 1\leq i\neq j\leq n+1, (x_i\,|\,x_j)=(y_i\,|\,y_j)+\lambda_i\lambda_j\left\|x_{n+2}\right\|^2<0$$

donc $(y_i\,|\,y_j)<0$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(y_1,\dots,y_{n+1})$ formée de vecteurs qui évoluent dans F. Récurrence établie.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) $f_\alpha\circ f_\beta=f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.
Si $\alpha=-1$ alors $a\in\operatorname{Ker}f_\alpha$ et donc f_α n'est pas bijective.
Si $\alpha\neq-1$ alors, pour $\beta=-\frac{\alpha}{1+\alpha}$,

$$f_\beta\circ f_\alpha=f_\alpha\circ f_\beta=f_0=\mathrm{Id}$$

d'où la bijectivité de f_α.

(b) Tout vecteur non nul orthogonal à a est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Tout vecteur non nul colinéaire à a est vecteur propre associé à la valeur propre $1+\alpha$.
Pour une raison de dimension, il ne peut y avoir d'autres vecteurs propres.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Vérification sans peine.

(b) Soit $(f,g)\in V\times W$. On a

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g''(t)+f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=\left[f(t)g'(t)\right]_0^1=0$$

et les espaces V et W sont donc en somme directe.
Soit $f\in E$. Posons

$$\lambda=f(0)\text{ et }\mu=\frac{f(1)-f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}$$

On a $f=g+h$ avec $h=\lambda\operatorname{ch}+\mu\operatorname{sh}\in W$ et $g=f-h\in V$ par construction.
Les espaces V et W sont donc supplémentaires orthogonaux et l'on peut introduire la projection orthogonale p sur W. Par ce qui précède

$$p(f)=f(0)\operatorname{ch}+\frac{f(1)-f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}$$

(c) Soit g la fonction de $E_{\alpha,\beta}$ définie par

$$g=\alpha\operatorname{ch}+\frac{\beta-\alpha\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}$$

Les fonctions de $E_{\alpha,\beta}$ sont alors de la forme $f=g+h$ avec h parcourant V et par orthogonalité de g et h

$$\int_0^1\left(f(t)^2+f'(t)^2\right)\mathrm{d}t=\|f\|^2=\|g\|^2+\|h\|^2$$

On en déduit

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\int_0^1\left(f(t)^2+f'(t)^2\right)\mathrm{d}t=\|g\|^2=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch}(1)-2\alpha\beta}{\operatorname{sh}(1)}$$

Exercice 18 : [énoncé]

(a) symétrie, bilinéarité et positivité : ok
Si $\varphi(P,P)=0$ alors $\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle)
$$\forall t\in\mathbb{R}_+, P(t)=0$$
Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

(b) Par intégration par parties successives, $\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=n!$ donc
$$\varphi(X^p,X^q)=(p+q)!$$

(c) On interprète
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t=d(X^2,\mathbb{R}_1[X])^2=\left\|X^2-\pi\right\|^2$$
avec $\pi=aX+b$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$
$(X^2-\pi\,|\,1)=(X^2-\pi\,|\,X)=0$ donne
$$\begin{cases}a+b=2\\2a+b=6\end{cases}$$
Après résolution $a=4$, $b=-2$ et
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t=4$$

Exercice 19 : [énoncé]

En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0\,;1]$ telles que $t\mapsto(tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire
$$(f\,|\,g)=\int_0^1 t^2f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
la quantité cherchée est : $m=d(f,F)^2$ avec $f\colon t\mapsto\ln t$ et $F=\mathrm{Vect}(f_0,f_1)$ où $f_0(t)=1$ et $f_1(t)=t$.
$m=\|f-p(f)\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F.
$p(f)(t)=a+bt$ avec $(p(f)\mid f_0)=(f\,|\,f_0)$ et $(p(f)\mid f_1)=(f\,|\,f_1)$.
La résolution du système ainsi obtenu donne $a=5/3$ et $b=-19/12$.
$m=\|f-p(f)\|^2=(f-p(f)\mid f)=1/432$.

Exercice 20 : [énoncé]

On sait déjà
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\,|\,x)^2\le\|x\|^2$$
en vertu de l'inégalité de Bessel.
Par totalité de la famille, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $y\in\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|x-y\|\le\varepsilon$.
Le vecteur y est une combinaison linéaire de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $y\in\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_N)$ et donc
$$\varepsilon\ge\|x-y\|\ge\|x-p(x)\|$$
avec $p(x)$ le projeté de x sur $\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_N)$ c'est-à-dire
$$p(x)=\sum_{n=0}^{N}(e_n\,|\,x)e_n$$
Par suite $\big|\|x\|-\|p(x)\|\big|\le\|x-p(x)\|\le\varepsilon$ donne
$$\|x\|\le\|p(x)\|+\varepsilon=\sqrt{\sum_{n=0}^{N}(e_n\,|\,x)^2}+\varepsilon\le\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\,|\,x)^2}+\varepsilon$$
Ceci valant pour tout $\varepsilon>0$, on obtient $\|x\|\le\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\,|\,x)^2}$ et finalement
$$\|x\|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\,|\,x)^2$$

Exercice 21 : [énoncé]

On a
$$\left\|{}^tAX\right\|^2={}^tXA{}^tAX=\langle X,A{}^tAX\rangle$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left\|{}^tAX\right\|^2=\langle X,A{}^tAX\rangle\le\|X\|\left\|A{}^tAX\right\|\le\|X\|\left\|{}^tAX\right\|$$
Ainsi
$$\left\|{}^tAX\right\|\le\|X\|$$
et ce que ${}^tAX=0$ ou non.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) On a

$$\left\|{}^tAX\right\|^2 = {}^tXA{}^tAX = \langle X, A{}^tAX\rangle$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|{}^tAX\right\|^2 = \langle X, A{}^tAX\rangle \leq \|X\| \left\|A{}^tAX\right\| \leq \|X\| \left\|{}^tAX\right\|$$

Ainsi

$$\left\|{}^tAX\right\| \leq \|X\|$$

et ce que ${}^tAX = 0$ ou non.

(b) Si $AX = X$ alors

$$\left\|{}^tAX - X\right\|^2 = \left\|{}^tAX\right\|^2 - 2\langle{}^tAX, X\rangle + \|X\|^2 \leq 2\left(\|X\|^2 - {}^tXAX\right) = 0$$

On en déduit ${}^tAX = X$.

(c) Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n)$.
On a $AX = X$ (et donc ${}^tAX = X$) et il existe $Y \in E$ vérifiant $X = AY - Y$.

$$\|X\|^2 = \langle X, AY - Y\rangle = {}^tXAY - {}^tXY$$

Or

$${}^tXAY = {}^t\left({}^tAX\right)Y = {}^tXY$$

et donc $\|X\|^2 = 0$. Ainsi

$$\operatorname{Ker}(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n) = \{0\}$$

Enfin, le théorème du rang

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) + \operatorname{rg}(A - I_n) = \dim E$$

permet de conclure

$$E = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n)$$

Exercice 23 : [énoncé]

Si $X \in \operatorname{Ker} A$ alors $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$.
Inversement, si $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$ alors ${}^tAAX = 0$ donc ${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = 0$
d'où $AX = 0$ puis $X \in \operatorname{Ker} A$.
Ainsi

$$\operatorname{Ker}({}^tAA) = \operatorname{Ker} A$$

puis par la formule du rang

$$\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg} A$$