

Espaces normés

Normes

Exercice 1 [02639] [Correction]

On définit sur $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ une norme par

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

(a) Soient $a, b \geq 0$ et $u, v > 0$. Établir que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \implies \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}.$$

(b) Soient $f, g \in E$ telles que $f, g > 0$. Montrer

$$N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1}) + N(g)^2 N(g^{-1})}{(N(f) + N(g))^2}.$$

(c) En déduire que

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1})).$$

Exercice 2 [02766] [Correction]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

(a) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

(b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Désormais la norme est euclidienne.

(c) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

(d) Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 3 [00795] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \|P^{-1}AP\|.$$

Exercice 4 [04161] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ la norme uniforme sur $[-1; 1]$.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de degré n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

(b) Soit P unitaire de degré n . Montrer

$$\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On pourra s'intéresser aux valeurs de P et T_n en les $\cos(k\pi/n)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Cas d'égalité. Montrer

$$\|P\| = \frac{1}{2^{n-1}} \iff P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n.$$

Exercice 5 [05057] [Correction]

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n et N une norme quelconque sur \mathbb{R}^n .

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$N^*(x) = \sup_{y \in S} |\langle x, y \rangle| \quad \text{avec} \quad S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid N(y) = 1\}.$$

(a) Vérifier que la borne supérieure définissant $N^*(x)$ existe et que celle-ci détermine un réel positif.

(b) Montrer que N^* définit une norme sur \mathbb{R}^n .

(c) Déterminer N^* lorsque $N = \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ puis $\|\cdot\|_1$.

Étude de normes

Exercice 6 [00457] [Correction]

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|, \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} |a_{i,j}|.$$

Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 7 [00459] [Correction]

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle i.e. que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 8 [03625] [Correction]

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 9 [00460] [Correction]

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq \|A\|$.

Exercice 10 [00462] [Correction]

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p \geq 1$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Montrer

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p.$$

Exercice 11 [00456] [Correction]

Soient $f_1, \dots, f_n: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

À quelle condition l'application

$$N: (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur \mathbb{R}^n ?

Exercice 12 [00455] [Correction]

Montrer que l'application $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, x_2) = \sup_{t \in [0;1]} |x_1 + tx_2|$$

est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Représenter la boule unité fermée pour cette norme et comparer celle-ci à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 13 [03905] [Correction]

On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sommable c'est-à-dire

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| < +\infty \right\}.$$

Montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et que l'on y définit une norme par l'application

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exercice 14 [03903] [Correction]

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} . On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et intégrables i.e.

$$L^1(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \mid \int_I |f| < +\infty \right\}.$$

Montrer que $L^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et que

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt$$

y définit une norme.

Exercice 15 [03904] [Correction]

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} . On note $L^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et de carré intégrable i.e.

$$L^2(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \mid \int_I |f|^2 < +\infty \right\}.$$

Montrer que $L^2(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et que

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

y définit une norme.

Exercice 16 [04096] [Correction]

On introduit une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$$\|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

et l'on note S l'ensemble formé des colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme égale à 1.

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de

$$\sup_{X \in S} \|AX\|.$$

(b) On pose

$$N(A) = \sup_{X \in S} \|AX\|.$$

Justifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leq N(A)\|X\|$.

(c) Vérifier que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer

$$N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Distance

Exercice 17 [03272] [Correction]

On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infinie notée $\|\cdot\|_\infty$. Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel \mathcal{C}_0 des suites réelles convergent vers 0.

Exercice 18 [03273] [Correction]

On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\cdot\|_\infty$. Déterminer la distance de la suite $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel \mathcal{C} des suites réelles convergentes.

Exercice 19 [00470] [Correction]

On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\cdot\|_\infty$. Pour $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on note Δx la suite de terme général

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

puis on forme $F = \{\Delta x \mid x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})\}$.

Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel F .

Exercice 20 [03463] [Correction]

Soit E l'espace des fonctions bornées de $[-1; 1]$ vers \mathbb{R} normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1; 1]} |f(x)|.$$

Déterminer la distance de la fonction

$$f: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in [-1; 0[\end{cases}$$

au sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions continues de $[-1; 1]$ vers \mathbb{R} .

Exercice 21 [05058] [Correction]

Soit N une norme sur un espace réel E de dimension finie.

(a) Soient B_1 et B_2 deux boules fermées de E . À quelle condition l'intersection de ces boules est-elle non vide?

(b) Même question avec des boules ouvertes.

Comparaison de normes

Exercice 22 [00466] [Correction]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f|.$$

- (a) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ mais qu'elle n'équivaut ni à l'une, ni à l'autre.
 (b) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 23 [00467] [Correction]

Soit $E = \mathcal{C}^1([-1; 1], \mathbb{R})$. On définit N_1, N_2 et N_3 par

$$N_1(f) = \sup_{[-1;1]} |f|, N_2(f) = |f(0)| + \sup_{[-1;1]} |f'| \text{ et } N_3(f) = \int_{-1}^1 |f|.$$

- (a) Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E .
 (b) Comparer N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part.

Exercice 24 [00465] [Correction]

Soient $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ et $N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) dt}.$$

- (a) Montrer que N définit une norme sur E .
 (b) Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 25 [00473] [Correction]

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

- (a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

- (b) Étudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} X^n.$$

- (c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 26 [00468] [Correction]

On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On définit des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ en posant

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \right)^{1/2} \text{ et } \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

- (a) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.
 (b) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 27 [00469] [Correction]

On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites réelles sommables. Cet espace est normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

- (a) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrer que u est bornée.
 Cela permet d'introduire la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

- (b) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrer que u est de carré sommable
 Cela permet d'introduire la norme $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \right)^{1/2}.$$

Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 28 [03265] [Correction]

On note $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées normé par $\|\cdot\|_\infty$.

- (a) Soit $a = (a_n)$ une suite réelle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application

$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

- (b) Comparer N_a et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 29 [00039] [Correction]

On note E l'espace des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.

- (a) Montrer que

$$N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

définissent des normes sur l'espace E .

- (b) Montrer que

$$N(u) \leq 2N_\infty(u) \quad \text{pour tout } u \in E.$$

Déterminer une suite non nulle telle qu'il y ait égalité.

- (c) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Comparaison de normes équivalentes

Exercice 30 [03267] [Correction]

Soient l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

- (a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E .
 (b) Montrer que N_2 est dominée par N_1 .
 (c) En exploitant l'identité

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t)) e^t dt$$

montrer que N_1 est dominée par N_2 .

Exercice 31 [00464] [Correction]

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0; 1]} |f'(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x) + f'(x)|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 32 [02411] [Correction]

Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2([0; \pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(\pi) = 0\}.$$

- (a) Montrer que

$$N : f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$

est une norme sur E .

- (b) Montrer que N est équivalente à

$$\nu : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty.$$

Exercice 33 [03262] [Correction]

Soient $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t \in [0; 1]} \left\{ |f(t)| \varphi(t) \right\}.$$

- (a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur E .
 (b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.
 (c) Les normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ sont-elles équivalentes?

Équivalence de normes en dimension finie

Exercice 34 [00458] [Correction]

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

Exercice 35 [00474] [Correction]

Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes réels en l'indéterminée X de degrés inférieurs ou égaux à d .

- (a) Pour $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ famille de $d + 1$ nombres réels distincts et $P \in E$, on pose

$$N_\xi(P) = \sum_{k=0}^d |P(\xi_k)|.$$

Montrer que N_ξ définit une norme sur E .

- (b) Soit (P_n) une suite de polynômes éléments de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$P_n = \sum_{k=0}^d a_{k,n} X^k.$$

Établir que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la suite de fonctions (P_n) converge simplement sur \mathbb{R} ;
- (ii) la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} ;
- (iii) pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, la suite $(a_{k,n})$ converge.

Exercice 36 [01582] [Correction]

Montrer que si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales toutes de degrés inférieurs à N convergeant simplement vers une fonction f sur \mathbb{R} alors f est une fonction polynomiale et la convergence est uniforme sur tout segment de \mathbb{R} .

Exercice 37 [02409] [Correction]

- (a) Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application

$$(x, y) \mapsto N_a(x, y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$$

définit une norme sur \mathbb{R}^2 .

- (b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer

$$\inf_{(x,y) \neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} \text{ et } \sup_{(x,y) \neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}.$$

Suites de vecteurs**Exercice 38** [03143] [Correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose

$$(AB)^n \rightarrow O_p.$$

Montrer que

$$(BA)^n \rightarrow O_p.$$

Exercice 39 [01670] [Correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P \text{ et } B^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} Q.$$

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les matrices P et Q commutent.

Exercice 40 [00471] [Correction]

Soit (A_n) une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On suppose

$$A_n \rightarrow A \text{ et } A_n^{-1} \rightarrow B.$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 41 [03010] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B .

Montrer que B est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1.

Exercice 42 [03036] [Correction]

Soit (A_n) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de limite A_∞ .

Montrer que pour n assez grand

$$\text{rg}(A_n) \geq \text{rg}(A_\infty).$$

Exercice 43 [03413] [Correction]

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On note E_q l'ensemble des $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A^q = I_n.$$

- (a) Que dire de $A \in E_q$ telle que 1 est seule valeur propre de A ?
 (b) Montrer que I_n est un point isolé de E_q .

Exercice 44 [03925] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 Que dire de B ?

Exercice 45 [04980] [Correction]

Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs vérifiant

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \quad \text{pour tout } i \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

On note α le plus petit coefficient de la matrice A et, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\min(X)$ et $\max(X)$ le plus petit et le plus grand coefficient de la colonne X .

- (a) On suppose que les coefficients d'une colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont tous positifs.
 Établir $\min(AY) \geq \alpha \max(Y)$.

Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = X - \min(X)U$ avec U la colonne de hauteur n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- (a) Montrer

$$\min(AX) \geq \alpha \max(X) + (1 - \alpha) \min(X)$$

puis

$$\max(AX) \leq \alpha \min(X) + (1 - \alpha) \max(X).$$

- (b) En déduire que les suites $(\min(A^p X))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\max(A^p X))_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
 (c) Conclure que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer le rang de sa limite.

Séries de vecteurs

Exercice 46 [02728] [Correction]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence de :

- (i) toute valeur propre de M est de module strictement inférieur à 1 ;
 (ii) la suite (M^k) tend vers 0 ;
 (iii) la série de terme général M^k converge.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Par réduction au même dénominateur

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{av(u+v) + bu(u+v) - uv}{uv(u+v)}$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{av} - \sqrt{bu})^2 + (a+b+2\sqrt{ab}-1)uv}{uv(u+v)}$$

et si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ alors

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{av} - \sqrt{bu})^2}{uv(u+v)} \geq 0.$$

(b)

$$N((f+g)^{-1}) = \int_0^1 \frac{dt}{f(t)+g(t)} \leq a \int_0^1 \frac{dt}{f(t)} + b \int_0^1 \frac{dt}{g(t)} = aN(f^{-1}) + bN(g^{-1})$$

qui donne l'inégalité voulue avec

$$a = \frac{N(f)^2}{(N(f) + N(g))^2} \text{ et } b = \frac{N(g)^2}{(N(f) + N(g))^2}$$

qui sont tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$.

(c) Par l'inégalité triangulaire

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq (N(f) + N(g))N((f+g)^{-1})$$

et en vertu de ce qui précède

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1})}{N(f) + N(g)} + \frac{N(g)^2 N(g^{-1})}{N(f) + N(g)}$$

qui donne

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)}{N(f) + N(g)} M + \frac{N(g)}{N(f) + N(g)} M = M$$

avec

$$M = \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1})).$$

Document3

Exercice 2 : [énoncé]

(a) $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

Aussi $\|y\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ donc

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

(b) Sur \mathbb{R}^2 avec $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, il y a égalité pour $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

(c) On a déjà

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Or $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2)$$

aussi

$$\|y\|^2 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$$

donc

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

puis

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$

qui permet de conclure.

(d) Non, sur \mathbb{R}^2 , il y a égalité pour $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

Exercice 3 : [énoncé]

Cas $n = 2$

Par l'absurde supposons qu'une telle norme existe.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et B sont semblables (via $P = \text{diag}(1/2, 1)$) donc $\|A\| = \|B\|$. Or $B = 2A$ donc $\|B\| = 2\|A\|$ puis $\|A\| = 0$.

C'est absurde car $A \neq O_2$.

Cas général : semblable.

Exercice 4 : [énoncé]

- (a) *Unicité*: Si deux polynômes sont solutions, leur différence s'annule sur $[-1; 1]$ et correspond donc au polynôme nul.

Existence: On peut raisonner par récurrence double en introduisant

$$T_0 = 1, T_1 = X \quad \text{et} \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

ou employer la formule de Moivre pour écrire :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} \theta (1 - \cos^2 \theta)^p. \end{aligned}$$

- (b) On vérifie $\|T_n\| = 1$ et on observe

$$T_n(\cos x_k) = (-1)^k \quad \text{avec} \quad x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad x_0 > x_1 > \dots > x_n.$$

Aussi, le polynôme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .

Par l'absurde, supposons $\|P\| < 1/2^{n-1}$ et considérons

$$Q = P - \frac{1}{2^{n-1}} T_n.$$

Le polynôme Q est de degré strictement inférieur à n et prend exactement le signe de $(-1)^k$ en les x_k . Par l'application du théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme Q s'annule sur $]x_n; x_{n-1}[, \dots,]x_1; x_0[$: c'est le polynôme nul ce qui est absurde.

- (c) L'implication indirecte est entendue. Supposons, $\|P\| = 1/2^{n-1}$. Considérons de nouveau le polynôme Q . Au sens large, il prend le signe de $(-1)^k$ en les x_k et on peut assurer l'existence d'au moins une racine dans chaque intervalle $]x_n; x_{n-1}[, \dots,]x_1; x_0[$. Lorsque cela est possible, on choisit cette racine dans l'intervalle ouvert et on note $\alpha_n \leq \dots \leq \alpha_1$ les n racines ainsi obtenues.

Si celles-ci sont distinctes, le polynôme Q est nul et on conclut.

Sinon, lorsqu'il y en a deux qui ne sont pas distinctes, elles correspondent à un même x_k avec $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ pour lequel Q est de signe strict¹ sur $]x_{k+1}; x_k[$ et $]x_k; x_{k-1}[$. Ces signes sont nécessairement identiques et Q présente un extremum en x_k qui est donc racine double de Q . Le polynôme Q admet alors au moins n racines comptées avec multiplicité et on conclut.

1. Car on a choisi les α_k dans l'intervalle ouvert lorsque cela est possible.

Exercice 5 : [énoncé]

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$N^*(x)$ s'interprète comme la borne supérieure d'une fonction continue définie sur une partie fermée et bornée.

L'ensemble S est la sphère unité pour la norme N , il s'agit donc d'une partie fermée et bornée. Aussi, l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire sur \mathbb{R}^n et donc continue. Par conséquent, l'application $x \mapsto |\langle x, y \rangle|$ au départ de S est bornée et atteint ses bornes. On peut donc introduire²

$$N^*(x) = \sup_{y \in S} |\langle x, y \rangle| = \sup\{|\langle x, y \rangle| \mid y \in \mathbb{R}^n \text{ et } N(y) = 1\}$$

Au surplus, cette valeur est positive car il s'agit d'une borne supérieure d'une partie non vide de \mathbb{R}_+ .

- (b) Soit x un vecteur de \mathbb{R}^n . Si $N^*(x) = 0$, on a $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout y de S . Or tout vecteur de \mathbb{R}^n est colinéaire à un vecteur de S et donc, par linéarité, on généralise en écrivant $\langle x, z \rangle = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$. On en déduit que x est le vecteur nul car ce dernier est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Pour y appartenant à S , on a $|\langle \lambda x, y \rangle| = |\lambda| |\langle x, y \rangle|$. Le réel positif $|\lambda|$ ne dépendant pas de y , il vient

$$N^*(\lambda x) = \sup_{y \in S} (|\lambda| |\langle x, y \rangle|) = |\lambda| \sup_{y \in S} |\langle x, y \rangle| = |\lambda| N^*(x).$$

Enfin, soient x et $x' \in \mathbb{R}^n$. Pour tout y de S ,

$$|\langle x + x', y \rangle| = |\langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle| \leq |\langle x, y \rangle| + |\langle x', y \rangle| \leq N^*(x) + N^*(x').$$

En passant à la borne supérieure, on conclut $N^*(x + x') \leq N^*(x) + N^*(x')$. Finalement, N^* définit bien une norme sur \mathbb{R}^n .

- (c) Cas: $N = \|\cdot\|_2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Pour $y \in S$, on obtient donc $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2$.

On détermine un vecteur y de S pour lequel cette inégalité devient une égalité.

2. Cette borne supérieure est atteinte, il s'agit d'un max.

Lorsque x est nul, l'inégalité qui précède est évidemment une égalité. Lorsque x est non nul, le vecteur $y = x/\|x\|_2$ vérifie $\langle x, y \rangle = \|x\|_2$ et $y \in S$. On a donc $N^*(x) = \|x\|_2$. La norme N^* se confond avec la norme $\|\cdot\|_2$.

Cas: $N = \|\cdot\|_\infty$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\|_\infty = 1$, on a

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1.$$

De plus, cette inégalité devient une égalité pour y vérifiant $\|y\|_\infty = 1$ déterminé par

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_k < 0. \end{cases}$$

On obtient donc $N^*(x) = \|x\|_1$. La norme N^* correspond à $\|\cdot\|_1$.

Cas: $N = \|\cdot\|_1$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\|_1 = 1$, on observe

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \sum_{k=1}^n \|x\|_\infty |y_k| = \|x\|_\infty \|y\|_1 = \|x\|_\infty.$$

De plus, si i désigne une indice pour lequel $\|x\|_\infty = |x_i|$, l'inégalité précédente devient une égalité pour le vecteur y vérifiant $\|y\|_1 = 1$ déterminé par

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc $N^*(x) = \|x\|_\infty$. Cette fois-ci, la norme N^* est la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6 : [énoncé]

Ce sont les normes usuelles associées à la base canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 7 : [énoncé]

$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est la norme 2 associée à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{\ell=1}^n b_{\ell,j}^2$$

donc

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i,k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{j,\ell=1}^n b_{\ell,j}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2$$

puis

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) L'application $\|\cdot\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{R}_+ . Si $\|A\| = 0$ alors

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$$

et donc

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = 0$$

ainsi la matrice A est nulle.

De plus

$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| \\ &= \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \\ &= |\lambda| \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \\ &= |\lambda| \|A\| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \\ &= \|A\| + \|B\|.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\|AB\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}|.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \\ &= \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \|B\| \\ &\leq \|A\| \|B\|\end{aligned}$$

donc

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) L'application $\|\cdot\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{R}_+ .
Si $\|A\| = 0$ alors

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$$

et donc

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = 0$$

ainsi la matrice A est nulle.

De plus

$$\|\lambda A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \|A\|$$

et

$$\|A + B\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$$

donc

$$\|A + B\| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| = \|A\| + \|B\|.$$

Enfin

$$\|AB\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}|.$$

Or

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \|B\| \leq \|A\| \|B\|$$

donc

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

(b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe $X \neq 0$, $AX = \lambda X$.

En notant x_1, \dots, x_n les éléments de la colonne X (non tous nuls) on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Considérons $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \neq 0$.

La relation précédente donne :

$$|\lambda| |x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_i|$$

donc

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \|A\|.$$

Exercice 10 : [énoncé]

Si $\|x\|_\infty = 0$ alors $x = 0$ et $\|x\|_p = 0$ donc

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p.$$

Si $\|x\|_\infty \neq 0$. Pour tout $p \geq 1$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (n\|x\|_\infty^p)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$$

donc

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Exercice 11 : [énoncé]

L'application $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie car toute fonction continue sur le segment $[0; 1]$ y est bornée

La liberté de la famille (f_1, \dots, f_n) est une condition nécessaire car, sinon, une relation linéaire sur la famille (f_1, \dots, f_n) détermine un n -uplet (x_1, \dots, x_n) non nul tel que $N(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Inversement, supposons la famille (f_1, \dots, f_n) libre.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $N(x) = 0$ alors $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = 0$ et donc $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ car (f_1, \dots, f_n) libre.

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \|\lambda x_1 f_1 + \dots + \lambda x_n f_n\|_\infty \\ &= \|\lambda(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n)\|_\infty = |\lambda|N(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \|(x_1 + y_1)f_1 + \dots + (x_n + y_n)f_n\|_\infty \\ &= \|(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n) + (y_1 f_1 + \dots + y_n f_n)\|_\infty \\ &\leq N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Finalement N est une norme sur \mathbb{R}^n

Exercice 12 : [énoncé]

Quand t varie de 0 à 1, l'expression $|x_1 + tx_2|$ varie de $|x_1|$ à $|x_1 + x_2|$
Par suite, on peut exprimer plus simplement l'action de N :

$$N(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_1 + x_2|\}.$$

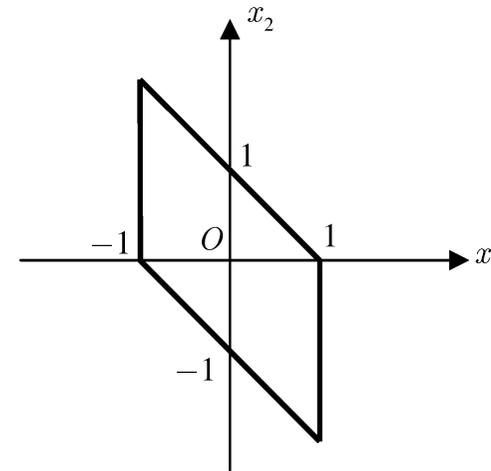


FIGURE 1 – La boule unité fermée pour la norme N

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \max\{|x_1 + y_1|, |x_1 + y_1 + x_2 + y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1| + |y_1|, |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|\} \\ &\leq N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda x) = \max\{|\lambda||x_1|, |\lambda||x_1 + x_2|\} = |\lambda|N(x).$$

Enfin si $N(x) = 0$ alors $|x_1| = |x_1 + x_2| = 0$ et donc $x_1 = x_1 + x_2 = 0$ puis $x = 0$.
Ainsi N définit bien une norme sur \mathbb{R}^2 .

Si $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ alors $N(x) = x_1 + x_2$.

Si $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$ alors $N(x) = \max(-x_1, |x_1 + x_2|)$.

Si $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ alors $N(x) = \max(x_1, |x_1 + x_2|)$.

Si $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ alors $N(x) = -(x_1 + x_2)$.

Ces considérations permettent de représenter la boule unité fermée. De manière immédiate : $N(x) \leq 2\|x\|_\infty$.

Aussi $|x_1| \leq 2N(x)$ et puisque $|x_2| \leq |x_1 + x_2| + |x_1|$ on a aussi $|x_2| \leq 2N(x)$.

On en déduit $\|x\|_\infty \leq 2N(x)$.

Exercice 13 : [énoncé]

$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

$(0)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{K})$.

Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$,

$$|(\lambda u + \mu v)_n| \leq |\lambda| |u_n| + |\mu| |v_n|.$$

Par comparaison de séries à termes positifs

$$\lambda u + \mu v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un \mathbb{K} -espace vectoriel.

L'application $\|\cdot\|_1: \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.

Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Si $\|u\|_1 = 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 0$ et par suite $u = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| |u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1.$$

Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|u + v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

Exercice 14 : [énoncé]

$L^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

$\tilde{0} \in L^1(I, \mathbb{K})$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in L^1(I, \mathbb{K})$.

Pour tout $t \in I$,

$$|(\lambda f + \mu g)(t)| \leq |\lambda| |f(t)| + |\mu| |g(t)|$$

donc par comparaison de fonctions positives $\lambda f + \mu g \in L^1(I, \mathbb{K})$.

Finalement $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et c'est donc un \mathbb{K} -espace vectoriel.

L'application $\|\cdot\|_1: L^1(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.

Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. Si $\|f\|_1 = 0$ alors $\int_I |f(t)| dt = 0$ or $|f|$ est continue et positive sur I d'intérieur non vide donc $f = \tilde{0}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^1(I, \mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda| |f(t)| dt = |\lambda| \|f\|_1.$$

Soient $f, g \in L^1(I, \mathbb{K})$

$$\|f + g\|_1 \leq \int_I |f(t)| + |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$\|\cdot\|_1$ définit bien une norme sur $L^1(I, \mathbb{K})$

Exercice 15 : [énoncé]

$L^2(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

$0 \in L^2(I, \mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I, \mathbb{K})$. Pour tout $t \in I$.

$$|(\lambda f)(t)|^2 = |\lambda|^2 |f(t)|^2$$

donc par comparaison $\lambda f \in L^2(I, \mathbb{K})$.

Soit $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$. Pour tout $t \in I$

$$|(f+g)(t)|^2 \leq (|f(t)| + |g(t)|)^2 = |f(t)|^2 + 2|f(t)||g(t)| + |g(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$$

car $2ab \leq a^2 + b^2$

Par comparaison de fonctions positives $f + g \in L^2(I, \mathbb{K})$.

Finalement $L^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et c'est donc un \mathbb{K} -espace vectoriel.

L'application $\|\cdot\|_2: L^2(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.

Soit $f \in L^2(I, \mathbb{K})$. Si $\|f\|_2 = 0$ alors $\int_I |f(t)|^2 dt = 0$ or $|f|^2$ est continue et positive sur I d'intérieur non vide donc

$$\forall t \in I, |f(t)|^2 = 0$$

puis $f = \tilde{0}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I, \mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_2 = \left(\int_I |\lambda|^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = |\lambda| \|f\|_2.$$

Soit $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$.

$$\|f + g\|_2^2 \leq \int_I (|f(t)| + |g(t)|)^2 dt = \|f\|_2^2 + 2 \int_I |f(t)||g(t)| dt + \|g\|_2^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)^{1/2}.$$

Ici

$$\int_a^b |f(t)||g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Or pour $f: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux intégrable

$$\forall [a; b] \subset I, \int_a^b f(t) dt \leq \int_I f$$

donc ici

$$\int_I |f(t)| |g(t)| dt \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

et enfin

$$\|f + g\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 16 : [\[énoncé\]](#)

(a) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\forall 1 \leq i \leq n, |(AX)_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

et donc

$$\|AX\| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = M.$$

Ainsi, l'ensemble $\{\|AX\| \mid X \in S\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée, elle admet une borne supérieure.

(b) Si $X = 0$, c'est immédiat.

Si $X \neq 0$, on introduit $X' = X/\|X\| \in S$ et l'on exploite $\|AX'\| \leq N(A)$.

(c) L'application N est bien définie à valeurs dans \mathbb{R}_+ en vertu de ce qui précède.

Si $N(A) = 0$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\| = 0$. En particulier, en prenant des colonnes X élémentaires, on obtient que chaque colonne de A est nulle.

$$N(\lambda A) = \sup_{X \in S} \|\lambda AX\| = \sup_{X \in S} |\lambda| \|AX\| = |\lambda| \sup_{X \in S} \|AX\| = |\lambda|.$$

Enfin

$$\begin{aligned} N(A+B) &= \sup_{X \in S} \|(A+B)X\| \\ &\leq \sup_{X \in S} \|AX + BX\| \\ &\leq \sup_{X \in S} \|AX\| + \sup_{X \in S} \|BX\| \\ &= N(A) + N(B). \end{aligned}$$

Finalement, N définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) On a déjà vu

$$N(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Soit i_0 l'indice pour lequel

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|.$$

Prenons ensuite $X = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n)$ avec $x_j = \pm 1$ de sorte que

$$a_{i_0,j} x_j = |a_{i_0,j}|.$$

On a $X \in S$ et $\|AX\| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ donc

$$N(A) \geq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$$

puis l'égalité voulue.

Exercice 17 : [\[énoncé\]](#)

Puisque $0 \in \mathcal{C}_0$, on a déjà

$$d(e, \mathcal{C}_0) \leq d(e, 0) = \|e\|_\infty = 1.$$

Soit $x \in \mathcal{C}_0$. On a

$$|x_n - 1| \leq \|x - e\|_\infty$$

et donc quand $n \rightarrow +\infty$

$$1 \leq \|x - e\|_\infty.$$

On en déduit

$$d(e, \mathcal{C}_0) \geq 1$$

et donc $d(e, \mathcal{C}_0) = 1$.

Exercice 18 : [\[énoncé\]](#)

Puisque $0 \in \mathcal{C}$, on a déjà

$$d(u, \mathcal{C}) \leq d(u, 0) = \|u\|_\infty = 1.$$

Soit $x \in \mathcal{C}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Pour $n = 2p$ pair

$$|x_{2p} - u_{2p}| \leq \|x - u\|_\infty$$

donne $|x_{2p} - 1| \leq \|x - u\|_\infty$ puis à la limite

$$|\ell - 1| \leq \|x - u\|_\infty.$$

De même avec $n = 2p + 1$ impair on obtient

$$|\ell + 1| \leq \|x - u\|_\infty.$$

On en déduit

$$|1| = \left| \frac{1+\ell}{2} + \frac{1-\ell}{2} \right| \leq \frac{1}{2}(|1+\ell| + |1-\ell|) \leq \|x - u\|_\infty.$$

On en déduit

$$d(u, \mathcal{C}) \geq 1$$

et donc $d(u, \mathcal{C}) = 1$.

Exercice 19 : [énoncé]

Puisque $0 \in F$, $d(e, F) \leq d(e, 0) = 1$.

En raisonnant par l'absurde montrons $d(e, F) = 1$ en supposant $d(e, F) < 1$.

Il existe alors une suite $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ vérifiant $\|\Delta x - e\|_\infty = \rho$ avec $\rho < 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\Delta x(k) - 1| \leq \rho$ donc $\Delta x(k) \geq 1 - \rho$.

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n - 1$, on obtient

$x(n) - x(0) \geq n(1 - \rho)$ et donc $x \rightarrow +\infty$.

Ceci contredit $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et permet de conclure.

Exercice 20 : [énoncé]

Par définition

$$d(f, F) = \inf_{g \in F} \|f - g\|_\infty.$$

Puisque la fonction nulle est continue

$$d(f, F) \leq \|f - \tilde{0}\|_\infty = 1.$$

Inversement, soit $g \in F$.

Pour tout $x > 0$,

$$|f(x) - g(x)| = |1 - g(x)| \leq \|f - g\|_\infty$$

donc à la limite quand $x \rightarrow 0^+$

$$|1 - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty.$$

De même, pour $x < 0$,

$$|f(x) - g(x)| = |1 + g(x)| \leq \|f - g\|_\infty$$

et donc à la limite quand $x \rightarrow 0^-$

$$|1 + g(0)| \leq \|f - g\|_\infty.$$

On en déduit

$$2 \leq |1 + g(0)| + |1 - g(0)| \leq 2\|f - g\|_\infty$$

et donc

$$1 \leq \|f - g\|_\infty.$$

Finalement $1 \leq d(f, F)$ puis $d(f, F) = 1$.

Exercice 21 : [énoncé]

- (a) Notons a_1 et a_2 les centres et r_1 et r_2 les rayons respectifs des boules B_1 et B_2 .

Analyse: Supposons l'intersection de B_1 et B_2 non vide et introduisons un élément x de celle-ci. Par l'inégalité triangulaire

$$N(a_2 - a_1) = N((a_2 - x) + (x - a_1)) \leq N(a_2 - x) + N(x - a_1) \leq r_1 + r_2.$$

Synthèse: Supposons $N(a_2 - a_1) \leq r_1 + r_2$.

On détermine un élément de l'intersection des deux boules sur le segment joignant les centres de celles-ci.

Soit x déterminé³ par

$$x = \frac{r_2}{r_1 + r_2} a_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} a_2.$$

On a

$$N(x - a_1) = N\left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}(a_2 - a_1)\right) = \frac{r_1}{r_1 + r_2} N(a_2 - a_1) \leq r_1.$$

Ainsi, x appartient à la boule B_1 et un calcul analogue assure que x est aussi élément de B_2 . L'intersection des deux boules est donc non vide.

3. Cette solution exprime un vecteur x appartenant au segment $[a_1; a_2]$ et qui est proche de chacune des extrémités en proportion du rayon de la boule opposée.

- (b) L'étude est identique à ceci près que des inégalités strictes traduisent les appartenances aux boules ouvertes. On parvient à la condition $N(a_2 - a_1) < r_1 + r_2$.

Exercice 22 : [énoncé]

- (a)

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

et

$$\|f\|_2 \leq \left(\int_0^1 \|f\|_\infty^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty.$$

Posons $f_n(x) = x^n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ alors que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$. Les normes ne sont donc pas équivalentes.

- (b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 1 \times |f(t)| dt \leq \left(\int_0^1 1 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

donc

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2.$$

Pour $f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n$, $\|f_n\|_2 = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \rightarrow 0$, les normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 23 : [énoncé]

- (a) Sans difficultés.
 (b) On a $N_1(f) \leq N_2(f)$ car

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq |f(0)| + |x| \sup_{[-1;1]} |f'|$$

et sans difficultés on a aussi $N_3(f) \leq 2N_1(f)$.

Posons

$$f_n(x) = x^n.$$

On a $N_1(f_n) = 1$, $N_2(f_n) = n$ et $N_3(f_n) = \frac{2}{n+1}$.

On en déduit que les normes N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part, ne sont pas équivalentes.

Exercice 24 : [énoncé]

- (a) Posons $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f, f) \geq 0$ et si $\varphi(f, f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0; 1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.
 (b) Pour tout $x \in [0; 1]$, $|f(x)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$. Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n\pi/\sqrt{2} \rightarrow +\infty$. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 25 : [énoncé]

- (a) $N_1, N_2: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} N_1(P + Q) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |Q^{(k)}(0)| = N_1(P) + N_1(Q). \end{aligned}$$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda P^{(k)}(0)| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = |\lambda| N_1(P).$$

$$N_1(P) = 0 \implies \forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$$

or

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

et donc $P = 0$.

Finalement, N_1 est une norme.

$$\begin{aligned} N_2(P + Q) &= \sup_{t \in [-1;1]} |P(t) + Q(t)| \leq \sup_{t \in [-1;1]} |P(t)| + |Q(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [-1;1]} |P(t)| + \sup_{t \in [-1;1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q). \end{aligned}$$

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t \in [-1;1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t \in [-1;1]} |\lambda| |P(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-1;1]} |P(t)| = |\lambda| N_2(P).$$

$$N_2(P) = 0 \implies \forall t \in [-1; 1], P(t) = 0$$

et par infinité de racines $P = 0$.

- (b) La suite $\left(\frac{1}{n}X^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_2 mais n'est pas bornée et donc diverge pour N_1 .
- (c) Les normes ne peuvent être équivalentes car sinon les suites convergent pour l'une des normes convergerait pour l'autre.

Exercice 26 : [énoncé]

- (a) Aisément $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$
 Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
 On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha \|\cdot\|_\infty$.
 $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
- (b) En introduisant N tel que $n > N \implies u_n = 0$ on a

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=0}^N |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^N |u_n|\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)^2 = \|u\|_1^2.$$

Ainsi $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$.
 Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
 On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha \|\cdot\|_2$.
 $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 27 : [énoncé]

- (a) La suite u étant sommable, elle converge vers 0 et est par conséquent bornée.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

donc

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1.$$

Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.
 On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha \|\cdot\|_\infty$.
 $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

- (b) On a $\sum_{n=0}^N |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^N |u_n|\right)^2$ donc quand $N \rightarrow +\infty$:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)^2 = \|u\|_1^2.$$

Ainsi $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$.
 Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.
 On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha \|\cdot\|_2$.
 $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 28 : [énoncé]

- (a) Supposons que N_a est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
 Pour $m \in \mathbb{N}$, la suite élémentaire $e_m = (\delta_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle donc

$$N_a(e_m) = a_m > 0.$$

De plus, pour la suite constante $u = (1)_{n \in \mathbb{N}}$, la quantité $N_a(u)$ existe et donc la série $\sum a_n$ converge.
 Inversement, si $\sum a_n$ est une série convergente à termes strictement positifs alors on montre que l'application $N_a : \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie et que celle-ci est une norme sur l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

- (b) On a aisément $N_a \leq k \|\cdot\|_\infty$ avec $k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
 Inversement, supposons $\|\cdot\|_\infty \leq k' N_a$. Pour la suite élémentaire e_m , on obtient $\|e_m\|_\infty \leq k' N_a(e_m)$ et donc $a_m \geq 1/k'$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cette propriété est incompatible avec la convergence de la série $\sum a_n$.
 Ainsi N_a est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 29 : [énoncé]

- (a) N_∞ est bien connue pour être une norme sur l'ensemble des fonctions bornées, il en est de même sur l'ensemble des suites bornées dont le premier terme est nul.
 L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie. On vérifie aisément $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ et $N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$. Si $N(u) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ et puisque $u_0 = 0$, on obtient $u = 0$. Ainsi N est une norme sur E .

(b) Pour $u \in E$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2N_\infty(u).$$

On en déduit

$$N(u) \leq 2N_\infty(u).$$

La suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 1$ est une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.

(c) Considérons la suite $u^{(p)}$ définie par

$$u^{(p)}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq p \\ p & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$u^{(p)} \in E, N_\infty(u^{(p)}) = p \text{ et } N(u^{(p)}) = 1.$$

On en déduit que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes car

$$\frac{N_\infty(u^{(p)})}{N(u^{(p)})} \rightarrow +\infty.$$

Exercice 30 : [énoncé]

(a) Les applications sont bien définies $N_i : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ car toute fonction continue sur un segment y est bornée.

Les propriétés $N_i(f + g) \leq N_i(f) + N_i(g)$ et $N_i(\lambda f) = |\lambda|N_i(f)$ sont faciles.

Si $N_1(f) = 0$ alors $f' = 0$ et sachant $f(0) = 0$, on obtient $f = 0$.

Si $N_2(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$.

Ainsi les applications N_1, N_2 sont bien des normes sur E .

(b) Pour $f \in E$, on a

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt$$

ce qui permet d'établir $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$.

Puisque

$$N_2(f) \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 2N_1(f)$$

la norme N_2 est dominée par la norme N_1 .

(c) Sachant $f(0) = 0$, on a

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t)e^t)' dt = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t))e^t dt$$

donc

$$|f(x)| \leq N_2(f).$$

Puisque

$$|f'(x)| \leq |f(x) + f'(x)| + |f(x)|$$

on obtient

$$|f'(x)| \leq 2N_2(f)$$

et finalement

$$N_1(f) \leq 2N_2(f).$$

Exercice 31 : [énoncé]

Pour tout $f, g \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $N_i(f + g) \leq N_i(f) + N_i(g)$ et que $N_i(\lambda f) = |\lambda|N_i(f)$.

Supposons $N_1(f) = 0$, on a alors $\sup_{x \in [0;1]} |f(x)| = 0$ donc $f = 0$.

Supposons maintenant que $N_2(f) = 0$, on a alors $\sup_{x \in [0;1]} |f(x) + f'(x)| = 0$ donc $f(x) + f'(x) = 0$. Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente,

$f(x) = \lambda e^{-x}$ avec $\lambda = f(0) = 0$ et finalement $f = 0$.

Finalement N_1 et N_2 sont bien deux normes sur E .

Il est clair que

$$N_2(f) \leq N_1(f).$$

Posons maintenant $M = N_2(f)$. Pour tout $x \in [0; 1]$, on a

$$|f(x) + f'(x)| \leq M$$

donc

$$|(f(x)e^x)'| \leq Me^x$$

d'où

$$|f(x)e^x| = \left| \int_0^x (f(t)e^t)' dt \right| \leq \int_0^x Me^t dt \leq Mex$$

puis $|f(x)| \leq Me$ pour tout $x \in [0; 1]$. Ainsi

$$\sup_{x \in [0;1]} |f(x)| \leq Me.$$

De plus

$$|f'(x)| \leq |f(x) + f'(x)| + |f(x)| \leq M(1 + e)$$

donc

$$\sup_{x \in [0;1]} |f'(x)| \leq M(1 + e)$$

et finalement

$$N_1(f) \leq M(1 + 2e) = N_2(f)(1 + 2e).$$

On peut conclure que les deux normes sont effectivement équivalentes.

Exercice 32 : [énoncé]

- (a) L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie et on vérifie aisément $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$ et $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$.
Supposons maintenant $N(f) = 0$, la fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui entraîne $f = 0$.
Finalement N est une norme sur E .

- (b) On a évidemment $N \leq \nu$.
Inversement, soit $f \in E$ et $g = f + f''$. La fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Après résolution via la méthode de variation des constantes, on obtient

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt.$$

On en déduit $|f(x)| \leq x\|g\|_\infty \leq \pi\|g\|_\infty$ et donc $\|f\|_\infty \leq \pi N(f)$.
De plus $\|f''\|_\infty \leq \|f + f''\|_\infty + \|f\|_\infty$ donc $\nu(f) \leq (\pi + 1)N(f)$.

Exercice 33 : [énoncé]

- (a) $\|\cdot\|_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Si $\|f\|_\varphi = 0$ alors la fonction $t \mapsto |f(t)|\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f = \vec{0}$.
Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda|\|f\|_\varphi$ et $\|f + g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ sont immédiates.
- (b) Considérons la fonction φ_2/φ_1 . Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0; 1]$, elle y est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $\forall x \in [0; 1], \varphi_2(x) \leq M\varphi_1(x)$. On en déduit $\|\cdot\|_{\varphi_1} \leq M\|\cdot\|_{\varphi_2}$. Ainsi $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ et par un argument symétrique $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_1}$.

- (c) On a facilement $\|\cdot\|_{x^2} \leq \|\cdot\|_x$.
Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a après étude des variations des fonction $x \mapsto x(1-x)^n$ et $x \mapsto x^2(1-x)^n$

$$\|f_n\|_x = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{e^{-1}}{n}$$

et

$$\|f_n\|_{x^2} = \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n \sim \frac{e^{-2}}{n^2}$$

donc il n'existe pas de constante $M \geq 0$ telle que $\|\cdot\|_x \leq M\|\cdot\|_{x^2}$. Les deux normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 34 : [énoncé]

On sait $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$ et $\alpha N \leq N_\infty \leq \beta N$ avec $\alpha, \beta > 0$ donc

$$N(AB) \leq \frac{1}{\alpha}N_\infty(AB) \leq \frac{n}{\alpha}N_\infty(A)N_\infty(B) \leq \frac{n\beta^2}{\alpha}N(A)N(B).$$

Exercice 35 : [énoncé]

- (a) facile.
- (b) (i) \implies (ii) Supposons que la suite (P_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers une certaine fonction f . On ne sait pas *a priori* si cette fonction est, ou non, polynomiale.
Soit $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ une famille de $d+1$ réels distincts et $P \in E$ déterminé par $P(\xi_k) = f(\xi_k)$. On peut affirmer que la (P_n) suite converge vers P pour la norme N_ξ . Soit $[a; b]$ un segment de \mathbb{R} avec $a < b$. $N = \|\cdot\|_{\infty, [a; b]}$ définit une norme sur E qui est équivalent à N_ξ car E est de dimension finie. Puisque (P_n) converge vers P pour la norme N_ξ , on peut affirmer que la convergence a aussi lieu pour la norme N et donc (P_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a; b]$. Au passage, on en déduit que $f = P$.
- (ii) \implies (iii) Si la suite (P_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction f , elle converge aussi simplement vers f et l'étude ci-dessus montre que f est un polynôme. En introduisant la norme infinie relative aux coefficients polynomiaux :

$$\|a_0 + \dots + a_d X^d\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$$

l'équivalence de norme permet d'établir que les coefficients de P_n convergent vers les coefficients respectifs de f .

- (iii) \implies (i) immédiat.

Exercice 36 : [énoncé]

Soient a_0, \dots, a_N des réels deux à deux distincts. Considérons la fonction polynôme P de degré inférieur à N vérifiant

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, P(a_k) = f(a_k).$$

Sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$, on peut introduire la norme donnée par

$$N(Q) = \max_{0 \leq k \leq N} |Q(a_k)|.$$

Pour cette norme, on peut affirmer que la suite (P_n) converge vers P . Or l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ est de dimension finie, toutes les normes y sont donc équivalentes. La convergence de (P_n) vers P a donc aussi lieu pour les normes données par

$$\|Q\|_{\infty, [a; b]} = \sup_{t \in [a; b]} |Q(t)|.$$

La suite (P_n) converge vers P sur tout segment de \mathbb{R} et donc converge simplement vers P . Par unicité de la limite simple, la fonction f est égale à P .

Exercice 37 : [énoncé]

- (a) $N_a(1, 1)$ et $N_a(1, -1)$ doivent exister et être strictement positifs. Cela fournit les conditions nécessaires $2a + 2 > 0$ et $2 - 2a > 0$ d'où $a \in]-1; 1[$. Montrons que cette condition est suffisante.

Supposons $a \in]-1; 1[$ et considérons $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + yy' + axy' + ayx'$.

L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^2 et pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\varphi((x, y), (x, y)) \geq (1 - |a|)(x^2 + y^2) > 0$ en vertu de $|2axy| \leq |a|(x^2 + y^2)$. Ainsi φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 et N_a est la norme euclidienne associée.

- (b) Le cas $a = b$ est immédiat. Quitte à échanger, on peut désormais supposer $a < b$.

Par homogénéité, on peut limiter l'étude de $\frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)}$ au couple $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in]-\pi/2; \pi/2[$.

Posons

$$f(t) = \left(\frac{N_a(\cos t, \sin t)}{N_b(\cos t, \sin t)} \right)^2 = \frac{1 + a \sin 2t}{1 + b \sin 2t}.$$

On a

$$f'(t) = 2 \frac{(a - b) \cos(2t)}{(1 + b \sin 2t)^2}.$$

Les variations de f sont faciles et les extremums de $f(t)$ sont en $t = -\pi/4$ et $t = \pi/4$. Ils valent $\frac{1-a}{1-b}$ et $\frac{1+a}{1+b}$.

On en déduit

$$\inf_{(x, y) \neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} = \sqrt{\frac{1-a}{1+b}}$$

et

$$\sup_{(x, y) \neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} = \sqrt{\frac{1+a}{1-b}}$$

(dans le cas $a < b$).

Exercice 38 : [énoncé]

Il suffit d'observer

$$(BA)^{n+1} = B(AB)^n A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} O_p.$$

Exercice 39 : [énoncé]

Puisque les matrices A et B commutent, il en est de même des matrices A^k et B^k . En passant à la limite la relation

$$A^k B^k = B^k A^k$$

on obtient

$$PQ = QP.$$

Exercice 40 : [énoncé]

On a

$$A_n A_n^{-1} = I_p.$$

En passant cette relation à la limite on obtient

$$AB = I_p.$$

Par le théorème d'inversibilité, on peut affirmer que A est inversible et

$$A^{-1} = B.$$

Exercice 41 : [énoncé]

$A^{2n} \rightarrow B$ et $A^{2n} = A^n \times A^n \rightarrow B^2$ donc $B = B^2$ et B est une matrice de projection.

Exercice 42 : [énoncé]

Posons $r = \text{rg } A_\infty$.

La matrice A_∞ possède est déterminant extrait non nul de taille r .

Le déterminant extrait correspondant des matrices A_n est alors non nul à partir d'un certain rang et donc $\text{rg}(A_n) \geq r$

Exercice 43 : [énoncé]

- (a) Une matrice $A \in E_q$ annule le polynôme scindé simple $X^q - 1$, elle est donc diagonalisable. Si 1 est sa seule valeur propre alors $A = I_n$ car semblable à I_n .
- (b) Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite (A_p) d'éléments de $E_q \setminus \{I_n\}$ vérifiant

$$A_p \rightarrow I_n.$$

Par continuité de la trace

$$\text{tr } A_p \rightarrow n.$$

Or la trace de A_p est la somme de ses valeurs propres, celles-ci ne sont pas toutes égales à 1 et sont racines q ème de l'unité donc

$$\text{Re}(\text{tr } A_p) \leq (n - 1) + \cos \frac{2\pi}{q}.$$

Cette majoration est incompatible avec la propriété $\text{tr } A_p \rightarrow n$.

Exercice 44 : [énoncé]

D'une part

$${}^t(A^k) \rightarrow {}^t B$$

et d'autre part

$${}^t(A^k) = (-1)^k A^k$$

de sorte que

$${}^t(A^{2p}) = (-1)^{2p} A^{2p} \rightarrow B$$

et

$${}^t(A^{2p+1}) = (-1)^{2p+1} A^{2p+1} \rightarrow -B.$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$B = {}^t B = -B.$$

On en déduit que la matrice B est nulle.

Exercice 45 : [énoncé]

- (a) Soit $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. Les coefficients y_j de la colonne Y étant tous positifs,

$$[AY]_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{\geq \alpha} y_j \geq \sum_{j=1}^n \alpha y_j \geq \alpha \max(Y).$$

Cette comparaison valant pour tout indice i , on obtient $\min(AY) \geq \alpha \max(Y)$.

- (b) Par construction, la colonne Y est à coefficients positifs. Aussi, on vérifie $AU = U$ car les lignes de A sont de sommes constantes égales à 1. On a donc

$$\min(AY) \geq \alpha \max(Y)$$

avec

$$\min(AY) = \min(AX - \min(X)U) = \min(AX) - \min(X)$$

et

$$\max(Y) = \max(X - \min(X)U) = \max(X) - \min(X)$$

ce qui donne, après réorganisation des termes,

$$\min(AX) \geq \alpha \max(X) + (1 - \alpha) \min(X).$$

Pour obtenir la seconde comparaison, on peut reprendre ce qui précède à partir de $Y = \max(X)U - X$ ou bien employer ce qui suit :

Par passage à l'opposé $\min(-X) = -\max(X)$ et $\max(-X) = -\min(X)$.

En appliquant le résultat précédent à la colonne $-X$, il vient après échange des min et des max et renversement de la comparaison

$$\max(AX) \leq \alpha \min(X) + (1 - \alpha) \max(X).$$

- (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. En appliquant les comparaisons qui précèdent à la colonne $A^p X$, on obtient

$$\begin{aligned} \min(A^{p+1} X) &\geq \alpha \max(A^p X) + (1 - \alpha) \min(A^p X) & (*) \\ &\geq \alpha \min(A^p X) + (1 - \alpha) \min(A^p X) = \min(A^p X) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \max(A^{p+1} X) &\leq \alpha \min(A^p X) + (1 - \alpha) \max(A^p X) & (**) \\ &\leq \alpha \max(A^p X) + (1 - \alpha) \max(A^p X) = \max(A^p X). \end{aligned}$$

Les deux suites $(\min(A^p X))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\max(A^p X))_{p \in \mathbb{N}}$ sont donc respectivement croissante et décroissante. Aussi, par différence de (??) et (??), il vient

$$\max(A^{p+1} X) - \min(A^{p+1} X) \leq (1 - 2\alpha)(\max(A^p X) - \min(A^p X))$$

Le réel $k = 1 - 2\alpha$ est élément de $[0; 1[$ car les coefficients de A sont strictement positifs et la somme de ceux-ci sur chaque ligne vaut 1 ce qui oblige $n\alpha \leq 1$. Par une récurrence immédiate, on obtient alors

$$0 \leq \max(A^p X) - \min(A^p X) \leq k^p (\max(X) - \min(X)) \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}$$

et on conclut que la différence des deux suites $(\max(A^p X))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\min(A^p X))_{p \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle. Finalement, ces deux suites sont adjacentes.

- (d) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'adjacence des suites $(\min(A^p X))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\max(A^p X))_{p \in \mathbb{N}}$ entraîne la convergence de $(A^p X)$ vers une colonne dont tous les coefficients sont égaux :

$$A^p X \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \ell(X) \\ \vdots \\ \ell(X) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \ell(X) \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la j -ème colonne de A^p correspond au produit de A^p par la j -ème colonne élémentaire E_j de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Colonne par colonne, on justifie

$$A^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A_\infty = \begin{pmatrix} \ell(E_1) & \cdots & \ell(E_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \ell(E_1) & \cdots & \ell(E_n) \end{pmatrix}.$$

Cette limite est de rang au plus 1 car ses lignes sont toutes identiques, elle est même de rang exactement 1 car ce n'est pas la matrice nulle. En effet, $AU = U$ donne $A^p U = U$ puis, à la limite, $A_\infty U = U$.

Exercice 46 : [énoncé]

(i) \implies (ii) Le plus simple est sans doute d'utiliser la décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente commutant entre elles. Par la formule du binôme de Newton, on peut calculer M^k et tronquer la somme par la nilpotence de N , on parvient alors à une somme finie de termes qui tendent vers 0

par croissance comparée. Une autre méthode, techniquement plus lourde, consiste à introduire $\rho_\ell^k = \max\{|(M^k)_{1,\ell+1}|, \dots, |(M^k)_{n-\ell,n}|\}$ qui majorent les coefficients de M^k situés sur la diagonale (pour $\ell = 0$), sur la sur-diagonale (pour $\ell = 1$) etc.

En notant que $\rho = \rho_0^1 < 1$, on montre par récurrence sur k que $\rho_\ell^k \leq k^\ell \|M\|_\infty^{\ell+1} \rho^{k-\ell}$ ce qui permet de conclure.

(ii) \implies (iii) Supposons que $M^k \rightarrow 0$. On peut alors affirmer que 1 n'est pas valeur propre de M car $MX = X \implies M^k X = X$ et donc à la limite

$MX = X \implies X = 0$. Par suite la matrice $I - M$ est inversible et puisque $(I - M) \sum_{k=0}^m M^k = I - M^{m+1}$, $\sum_{k=0}^m M^k = (I - M)^{-1} (I - M^{m+1})$ d'où la convergence de la série des M^k .

(iii) \implies (i) Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Puisque $\sum_{k=0}^m M^k$ converge quand $\text{rg } C \geq r$, on a $\sum_{k=0}^m M^k X$ converge, puis $\sum_{k=0}^n \lambda^k X$ converge et donc $|\lambda| < 1$ (car $X \neq 0$).