Espaces normés

Normes

Exercice 1 [02639] [Correction]
On définit sur $E = \mathcal{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$ une norme par

$$N(f) = \int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t.$$

(a) Soient $a, b \geq 0$ et $u, v > 0$. Établir que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \implies \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}.$$

(b) Soient $f, g \in E$ telles que $f, g > 0$. Montrer

$$N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1}) + N(g)^2 N(g^{-1})}{(N(f)+N(g))^2}.$$

(c) En déduire que

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1})).$$

Exercice 2 [02766] [Correction]
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(a) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max\left\{\|x+y\|, \|x-y\|\right\}.$$

(b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Désormais la norme est euclidienne.

(c) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max\left\{\|x+y\|, \|x-y\|\right\}.$$

(d) Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 3 [00795] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \left\|P^{-1}AP\right\|.$$

Exercice 4 [04161] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ la norme uniforme sur $[-1\,;1]$.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de degré n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

(b) Soit P unitaire de degré n. Montrer

$$\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On pourra s'intéresser aux valeurs de P et T_n en les $\cos(k\pi/n)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Cas d'égalité. Montrer

$$\|P\| = \frac{1}{2^{n-1}} \iff P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n.$$

Étude de normes

Exercice 5 [00457] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \left|a_{i,j}\right|, \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \left|a_{i,j}\right|^2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \left|a_{i,j}\right|.$$

Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 6 [00459] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2\right)^{1/2}.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle *i.e.* que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 7 [03625] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| .$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \le \|A\| \|B\| .$$

Exercice 8 [00460] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| .$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \le \|A\|$.

Exercice 9 [00462] [Correction]
Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p \ge 1$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} .$$

Montrer

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p .$$

Exercice 10 [00456] [Correction]
Soient $f_1, \dots, f_n \colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continues.
À quelle condition l'application

$$N \colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 11 [00455] [Correction]
Montrer que l'application $N \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, x_2) = \sup_{t\in[0;1]} |x_1 + t x_2|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Représenter la boule unité fermée pour cette norme et comparer celle-ci à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 12 [03905] [Correction]
On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sommable *i.e.*

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum |u_n| < +\infty \right\}.$$

Montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que l'application donnée par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

y définit une norme

Exercice 13 [03903] [Correction]
Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f \colon I \to \mathbb{K}$ continues et intégrables *i.e.*

$$L^1(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \;\middle|\; \int_I |f| < +\infty \right\}.$$

Montrer que $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t$$

y définit une norme.

Exercice 14 [03904] [Correction]
Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On note $L^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f \colon I \to \mathbb{K}$ continue et de carré intégrable *i.e.*

$$L^2(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \;\middle|\; \int_I |f|^2 < +\infty \right\}.$$

Montrer que $L^2(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que

$$\|f\|_2 = \left(\int_I \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

y définit une norme.

Exercice 15 [04096] [Correction]
On introduit une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$$\|X\| = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

et on note S l'ensemble formé des colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme égale à 1.

(a) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de

$$\sup_{X\in S} \|AX\|.$$

(b) On pose

$$N(A) = \sup_{X\in S} \|AX\|.$$

Justifier que pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\|\le N(A)\,\|X\|$.

(c) Vérifier que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer

$$N(A) = \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Distance

Exercice 16 [03272] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infinie notée $\|\cdot\|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_0$ des suites réelles convergeant vers 0.

Exercice 17 [03273] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\cdot\|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite $u=((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites réelles convergentes.

Exercice 18 [00470] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\cdot\|_\infty$.
Pour $x\in\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, on note Δx la suite de terme général

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

puis on forme $F=\left\{\Delta x \,\middle|\, x\in\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})\right\}$.
Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel F.

Exercice 19 [03463] [Correction]
Soit E l'espace des fonctions bornées de $[-1\,;1]$ vers $\mathbb{R}$ normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1;1]} \left|f(x)\right|.$$

Déterminer la distance de la fonction

$$f\colon x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x\in\,]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -1 & \text{si } x\in[-1\,;0[\end{cases}$$

au sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions continues de $[-1\,;1]$ vers $\mathbb{R}$.

Comparaison de normes

Exercice 20 [00466] [Correction]
Soit $E=\mathcal{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t,\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f|.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ mais qu'elle n'équivaut ni à l'une, ni à l'autre.

(b) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 21 [00467] [Correction]
Soit $E=\mathcal{C}^1([-1\,;1],\mathbb{R})$. On définit N_1, N_2 et N_3 par

$$N_1(f) = \sup_{[-1;1]} |f|,\ N_2(f) = \left|f(0)\right| + \sup_{[-1;1]} |f'| \text{ et } N_3(f) = \int_{-1}^1 |f|.$$

(a) Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.

(b) Comparer N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part.

Exercice 22 [00465] [Correction]
Soient $E = C^1([0\,;1],\mathbb{R})$ et $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

(a) Montrer que N définit une norme sur E.

(b) Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 23 [00473] [Correction]
Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]}\left|P(t)\right|.$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Étudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n}X^n.$$

(c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 24 [00468] [Correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
On définit des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ en posant

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|\,, \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2\right)^{1/2} \text{ et } \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|\,.$$

(a) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 25 [00469] [Correction]
On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles sommables. Cet espace est normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|\,.$$

(a) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que u est bornée.
Cela permet d'introduire la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|\,.$$

Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que u est de carré sommable
Cela permet d'introduire la norme $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2\right)^{1/2}.$$

Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 26 [03265] [Correction]
On note $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées normé par $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit $a = (a_n)$ une suite réelle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application

$$N_a\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,|x_n|$$

définit une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

(b) Comparer N_a et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 27 [00039] [Correction]
On note E l'espace des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.

(a) Montrer que

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n| \text{ et } N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_{n+1}-u_n|$$

définissent des normes sur l'espace E.

(b) Montrer que

$$\forall u \in E, N(u) \le 2N_\infty(u).$$

Déterminer une suite non nulle telle qu'il y ait égalité.

(c) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Comparaison de normes équivalentes

Exercice 28 [03267] [Correction]
Soient l'espace $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0\,;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f + f'\|_\infty\,.$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.

(b) Montrer que N_2 est dominée par N_1.

(c) En exploitant l'identité

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \bigl(f(t) + f'(t)\bigr)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

montrer que N_1 est dominée par N_2.

Exercice 29 [00464] [Correction]
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0;1]} \bigl|f(x)\bigr| + \sup_{x\in[0;1]} \bigl|f'(x)\bigr| \text{ et } N_2(f) = \sup_{x\in[0;1]} \bigl|f(x) + f'(x)\bigr|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 30 [02411] [Correction]
Soit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0\,;\pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que

$$N\colon f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$

est une norme sur E.

(b) Montrer que N est équivalente à

$$\nu\colon f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty\,.$$

Exercice 31 [03262] [Correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t\in[0;1]} \left\{ \bigl|f(t)\bigr|\varphi(t) \right\}.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur E

(b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.

(c) Les normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Équivalence de normes en dimension finie

Exercice 32 [00458] [Correction]
Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$N(AB) \le cN(A)N(B).$$

Exercice 33 [00474] [Correction]
Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes réels en l'indéterminée X de degrés inférieurs ou égaux à d.

(a) Pour $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ famille de $d + 1$ nombres réels distincts et $P \in E$, on pose

$$N_\xi(P) = \sum_{k=0}^{d} \bigl|P(\xi_k)\bigr|.$$

Montrer que N_ξ définit une norme sur E.

(b) Soit (P_n) une suite de polynômes éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$P_n = \sum_{k=0}^{d} a_{k,n} X^k.$$

Établir que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) la suite de fonctions (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$;
(ii) la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$;
(iii) pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, la suite $(a_{k,n})$ converge.

Exercice 34 [01582] [Correction]
Montrer que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales toutes de degrés inférieurs à N convergeant simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction polynomiale et la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 35 [02409] [Correction]

(a) Quelles sont les valeurs de $a\in\mathbb{R}$ pour lesquelles l'application
$$(x,y)\mapsto N_a(x,y)=\sqrt{x^2+2axy+y^2}$$
définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer
$$\inf_{(x,y)\neq 0}\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} \text{ et } \sup_{(x,y)\neq 0}\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}.$$

Suites de vecteurs

Exercice 36 [03143] [Correction]
Soient $A,B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose
$$(AB)^n\to O_p.$$
Montrer que
$$(BA)^n\to O_p.$$

Exercice 37 [01670] [Correction]
Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$A^k\xrightarrow[k\to+\infty]{}P \text{ et } B^k\xrightarrow[k\to+\infty]{}Q.$$
On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les matrices P et Q commutent.

Exercice 38 [00471] [Correction]
Soit (A_n) une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On suppose
$$A_n\to A \text{ et } A_n^{-1}\to B.$$
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 39 [03010] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers B.
Montrer que B est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1.

Exercice 40 [03036] [Correction]
Soit (A_n) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de limite A_∞.
Montrer que pour n assez grand
$$\operatorname{rg}(A_n)\geq\operatorname{rg}(A_\infty).$$

Exercice 41 [03413] [Correction]
Soit $q\in\mathbb{N}^*$. On note E_q l'ensemble des $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que
$$A^q=I_n.$$

(a) Que dire de $A\in E_q$ telle que 1 est seule valeur propre de A ?

(b) Montrer que I_n est un point isolé de E_q.

Exercice 42 [03925] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que dire de B ?

Exercice 43 [04980] [Correction]
Soient $n\geq 2$ et $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs vérifiant
$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}=1 \quad \text{pour tout } i\in[\![1\,;n]\!].$$
On note α le plus petit coefficient de la matrice A et, étant donné $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\min(X)$ et $\max(X)$ le plus petit et le plus grand coefficient de la colonne X.

(a) On suppose que les coefficients de $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont tous positifs, établir $\min(AY)\geq\alpha\max(Y)$.

(b) Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y=X-\min(X)U$ avec U la colonne de hauteur n dont tous les coefficients valent 1. Montrer
$$\min(AX)\geq d\max(X)+(1-d)\min(X) \quad\text{puis}\quad \max(AX)\leq d\min(X)+(1-d)\max(X)$$
En déduire que les suites $\big(\min(A^pX)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\big(\max(A^pX)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(c) Établir que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer le rang de sa limite.

Séries de vecteurs

Exercice 44 [02728] [Correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence de :
(i) toute valeur propre de M est de module strictement inférieur à 1 ;
(ii) la suite (M^k) tend vers 0 ;
(iii) la série de terme général M^k converge.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Par réduction au même dénominateur

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}-\frac{1}{u+v}=\frac{av(u+v)+bu(u+v)-uv}{uv(u+v)}$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}-\frac{1}{u+v}=\frac{(\sqrt{a}v-\sqrt{b}u)^2+(a+b+2\sqrt{ab}-1)uv}{uv(u+v)}$$

et si $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$ alors

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}-\frac{1}{u+v}=\frac{(\sqrt{a}v-\sqrt{b}u)^2}{uv(u+v)}\geq 0.$$

(b)

$$N((f+g)^{-1})=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{f(t)+g(t)}\leq a\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}+b\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{g(t)}=aN(f^{-1})+bN(g^{-1})$$

qui donne l'inégalité voulue avec

$$a=\frac{N(f)^2}{(N(f)+N(g))^2}\text{ et }b=\frac{N(g)^2}{(N(f)+N(g))^2}$$

qui sont tels que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$.

(c) Par l'inégalité triangulaire

$$N(f+g)N((f+g)^{-1})\leq (N(f)+N(g))N((f+g)^{-1})$$

et en vertu de ce qui précède

$$N(f+g)N((f+g)^{-1})\leq\frac{N(f)^2N(f^{-1})}{N(f)+N(g)}+\frac{N(g)^2N(g^{-1})}{N(f)+N(g)}$$

qui donne

$$N(f+g)N((f+g)^{-1})\leq\frac{N(f)}{N(f)+N(g)}M+\frac{N(g)}{N(f)+N(g)}M=M$$

avec

$$M=\max(N(f)N(f^{-1}),N(g)N(g^{-1})).$$

Document3

Exercice 2 : [énoncé]

(a) $x=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\|\leq\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}.$$

Aussi $\|y\|\leq\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}$ donc

$$\|x\|+\|y\|\leq 2\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}.$$

(b) Sur $\mathbb{R}^2$ avec $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$, il y a égalité pour $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$.

(c) On a déjà

$$\left(\|x\|+\|y\|\right)^2\leq 2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

Or $x=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2+2\|x\|^2-2\|y\|^2\right)$$

aussi

$$\|y\|^2=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2-2\|x\|^2+2\|y\|^2\right)$$

donc

$$\|x\|^2+\|y\|^2\leq\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)$$

puis

$$\left(\|x\|+\|y\|\right)^2\leq 2\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}^2$$

qui permet de conclure.

(d) Non, sur $\mathbb{R}^2$, il y a égalité pour $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$.

Exercice 3 : [énoncé]

Cas $n=2$

Par l'absurde supposons qu'une telle norme existe.

Posons $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$.

Les matrices A et B sont semblables (via $P=\operatorname{diag}(1/2,1)$) donc $\|A\|=\|B\|$. Or $B=2A$ donc $\|B\|=2\|A\|$ puis $\|A\|=0$.

C'est absurde car $A\neq O_2$.

Cas général : semblable.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) *Unicité:* Si deux polynômes sont solutions, leur différence s'annule sur $[-1\,;1]$ et correspond donc au polynôme nul.
Existence: On peut raisonner par récurrence double en introduisant

$$T_0 = 1, T_1 = X \quad \text{et} \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

ou employer la formule de Moivre pour écrire :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}\theta(1-\cos^2\theta)^p.$$

(b) On vérifie $\|T_n\| = 1$ et on observe

$$T_n(\cos x_k) = (-1)^k \quad \text{avec} \quad x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } x_0 > x_1 > \cdots > x_n.$$

Aussi, le polynôme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
Par l'absurde, supposons $\|P\| < 1/2^{n-1}$ et considérons

$$Q = P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n.$$

Le polynôme Q est de degré strictement inférieur à n et prend exactement le signe de $(-1)^k$ en les x_k. Par l'application du théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme Q s'annule sur $]x_n\,;x_{n-1}[,\dots,]x_1\,;x_0[$: c'est le polynôme nul ce qui est absurde.

(c) L'implication indirecte est entendue. Supposons, $\|P\| = 1/2^{n-1}$. Considérons de nouveau le polynôme Q. Au sens large, il prend le signe de $(-1)^k$ en les x_k et on peut assurer l'existence d'au moins une racine dans chaque intervalle $[x_n\,;x_{n-1}],\dots,[x_1\,;x_0]$. Lorsque cela est possible, on choisit cette racine dans l'intervalle ouvert et on note $\alpha_n \leq \ldots \leq \alpha_1$ les n racines ainsi obtenues.
Si celles-ci sont distinctes, le polynôme Q est nul et on conclut.
Sinon, lorsqu'il y en a deux qui ne sont pas distinctes, elles correspondent à un même x_k avec $k \in [\![1\,;n-1]\!]$ pour lequel Q est de signe strict[1] sur $]x_{k+1}\,;x_k[$ et $]x_k\,;x_{k-1}[$. Ces signes sont nécessairement identiques et Q présente un extremum en x_k qui est donc racine double de Q. Le polynôme Q admet alors au moins n racines comptées avec multiplicité et on conclut.

1. Car on a choisi les α_k dans l'intervalle ouvert lorsque cela est possible.

Exercice 5 : [énoncé]
Ce sont les normes usuelles associées à la base canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 6 : [énoncé]
$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est la norme 2 associée à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\sum_{\ell=1}^n b_{\ell,j}^2$$

donc

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i,k=1}^n a_{i,k}^2\sum_{j,\ell=1}^n b_{\ell,j}^2 = \|A\|^2\|B\|^2$$

puis

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

Exercice 7 : [énoncé]

(a) L'application $\|\cdot\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$.
Si $\|A\| = 0$ alors

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$$

et donc

$$\forall 1 \leq i,j \leq n, a_{i,j} = 0$$

ainsi la matrice A est nulle.

De plus

$$\begin{aligned}\|\lambda A\| &= \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|\lambda a_{i,j}|\\ &= \sup_{1\leq i\leq n}|\lambda|\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\\ &= |\lambda|\sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\\ &= |\lambda|\,\|A\|\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\\ &\leq \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+|b_{i,j}|\\ &\leq \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\\ &= \|A\|+\|B\|\,.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\|AB\| = \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right| \leq \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}b_{k,j}|\,.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}b_{k,j}| &\leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,k}|\,|b_{k,j}|\\ &= \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\sum_{j=1}^{n}|b_{k,j}|\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\,\|B\|\\ &\leq \|A\|\,\|B\|\end{aligned}$$

donc

$$\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|\,.$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) L'application $\|\cdot\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$.
Si $\|A\|=0$ alors

$$\forall 1\leq i\leq n, \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|=0$$

et donc

$$\forall 1\leq i,j\leq n, a_{i,j}=0$$

ainsi la matrice A est nulle.
De plus

$$\|\lambda A\| = \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|\lambda a_{i,j}| = \sup_{1\leq i\leq n}|\lambda|\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| = |\lambda|\sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| = |\lambda|\,\|A\|$$

et

$$\|A+B\| = \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}| \leq \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+|b_{i,j}|$$

donc

$$\|A+B\| \leq \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}| = \|A\|+\|B\|\,.$$

Enfin

$$\|AB\| = \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right| \leq \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}b_{k,j}|\,.$$

Or

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,k}|\,|b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\sum_{j=1}^{n}|b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\,\|B\| \leq \|A\|\,\|B\|$$

donc

$$\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|\,.$$

(b) Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$, il existe $X\neq 0$, $AX=\lambda X$.
En notant $x_1,\dots,x_n$ les éléments de la colonne X (non tous nuls) on a

$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\,,\lambda x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j.$$

Considérons $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $|x_i|=\max_{1\leq j\leq n}|x_j|\neq 0$.

La relation précédente donne :

$$|\lambda|\,|x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_i|$$

donc

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq \|A\|\,.$$

Exercice 9 : [énoncé]
Si $\|x\|_\infty = 0$ alors $x = 0$ et $\|x\|_p = 0$ donc

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p\,.$$

Si $\|x\|_\infty \neq 0$. Pour tout $p \geq 1$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \left(n\,\|x\|_\infty^p\right)^{1/p} = n^{1/p}\,\|x\|_\infty \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$$

donc

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty\,.$$

Exercice 10 : [énoncé]
L'application $N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est bien définie car toute fonction continue sur le segment $[0\,;1]$ y est bornée
La liberté de la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est une condition nécessaire car, sinon, une relation linéaire sur la famille $(f_1,\dots,f_n)$ détermine un n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ non nul tel que $N(x_1,\dots,x_n) = 0$.
Inversement, supposons la famille $(f_1,\dots,f_n)$ libre.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si $N(x) = 0$ alors $x_1f_1 + \dots + x_nf_n = 0$ et donc $(x_1,\dots,x_n) = (0,\dots,0)$ car $(f_1,\dots,f_n)$ libre.

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \|\lambda x_1 f_1 + \dots + \lambda x_n f_n\|_\infty \\ &= \left\|\lambda(x_1f_1 + \dots + x_nf_n)\right\|_\infty = |\lambda|\,N(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \left\|(x_1+y_1)f_1 + \dots + (x_n+y_n)f_n\right\|_\infty \\ &= \left\|(x_1f_1 + \dots + x_nf_n) + (y_1f_1 + \dots + y_nf_n)\right\|_\infty \\ &\leq N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Finalement N est une norme sur $\mathbb{R}^n$

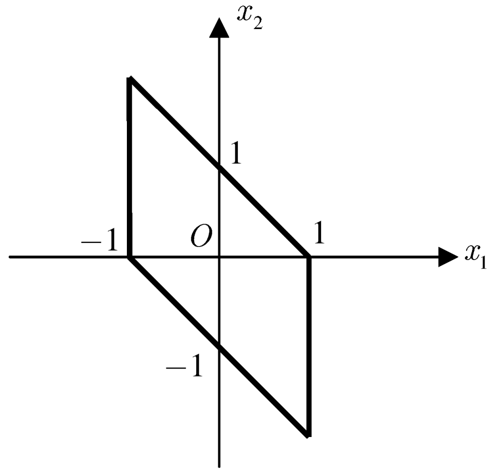

Figure 1 – La boule unité fermée pour la norme N

Exercice 11 : [énoncé]
Quand t varie de 0 à 1, l'expression $|x_1 + tx_2|$ varie de $|x_1|$ à $|x_1 + x_2|$
Par suite, on peut exprimer plus simplement l'action de N :

$$N(x_1,x_2) = \max\left\{|x_1|\,,|x_1+x_2|\right\}.$$

Soient $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \max\left\{|x_1+y_1|\,,|x_1+y_1+x_2+y_2|\right\} \\ &\leq \max\left\{|x_1|+|y_1|\,,|x_1+x_2|+|y_1+y_2|\right\} \\ &\leq N(x)+N(y). \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda.x) = \max\left\{|\lambda|\,|x_1|\,,|\lambda|\,|x_1+x_2|\right\} = |\lambda|\,N(x).$$

Enfin si $N(x) = 0$ alors $|x_1| = |x_1+x_2| = 0$ et donc $x_1 = x_1 + x_2 = 0$ puis $x = 0$.
Ainsi N définie bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Si $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ alors $N(x) = x_1 + x_2$.
Si $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$ alors $N(x) = \max(-x_1, |x_1+x_2|)$.
Si $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ alors $N(x) = \max(x_1, |x_1+x_2|)$.
Si $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ alors $N(x) = -(x_1+x_2)$.
Ces considérations permettent de représenter la boule unité fermée. De manière

immédiate : $N(x) \le 2\left\|x\right\|_\infty$.
Aussi $|x_1| \le 2N(x)$ et puisque $|x_2| \le |x_1+x_2| + |x_1|$ on a aussi $|x_2| \le 2N(x)$.
On en déduit $\left\|x\right\|_\infty \le 2N(x)$.

Exercice 12 : [énoncé]
$\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ et $u,v \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$,

$$\left|(\lambda u + \mu v)_n\right| \le |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|\,.$$

Par comparaison de séries à termes positifs

$$\lambda u + \mu v \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$$

$\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\cdot\|_1 : \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Si $\|u\|_1 = 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 0$ et par suite $u = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|\,|u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda|\,\|u\|_1\,.$$

Soit $u,v \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$

$$\|u+v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n+v_n| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\left(|u_n|+|v_n|\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty}|v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1\,.$$

Exercice 13 : [énoncé]
$L^1(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$\tilde{0} \in L^1(I,\mathbb{K})$.
Soit $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ et $f,g \in L^1(I,\mathbb{K})$.
Pour tout $t \in I$,

$$\left|(\lambda f + \mu g)(t)\right| \le |\lambda|\left|f(t)\right| + |\mu|\left|g(t)\right|$$

donc par comparaison de fonctions positives $\lambda f + \mu g \in L^1(I,\mathbb{K})$.
Finalement $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\cdot\|_1 : L^1(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soit $f \in L^1(I,\mathbb{K})$. Si $\|f\|_1 = 0$ alors $\int_I \left|f(t)\right| \mathrm{d}t = 0$ or $|f|$ est continue et positive sur I d'intérieur non vide donc $f = \tilde{0}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^1(I,\mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda|\left|f(t)\right|\mathrm{d}t = |\lambda|\,\|f\|_1\,.$$

Soient $f,g \in L^1(I,\mathbb{K})$

$$\|f+g\|_1 \le \int_I \left|f(t)\right| + \left|g(t)\right| \mathrm{d}t = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$\|\cdot\|_1$ définit bien une norme sur $L^1(I,\mathbb{K})$

Exercice 14 : [énoncé]
$L^2(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$0 \in L^2(I,\mathbb{K})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I,\mathbb{K})$. Pour tout $t \in I$.

$$\left|(\lambda f)(t)\right|^2 = |\lambda|^2\left|f(t)\right|^2$$

donc par comparaison $\lambda f \in L^2(I,\mathbb{K})$.
Soit $f,g \in L^2(I,\mathbb{K})$. Pour tout $t \in I$

$$\left|(f+g)(t)\right|^2 \le \left(\left|f(t)\right|+\left|g(t)\right|\right)^2 = \left|f(t)\right|^2 + 2\left|f(t)\right|\left|g(t)\right| + \left|g(t)\right|^2 \le 2\left(\left|f(t)\right|^2 + \left|g(t)\right|^2\right)$$

car $2ab \le a^2 + b^2$
Par comparaison de fonctions positives $f+g \in L^2(I,\mathbb{K})$.
Finalement $L^2(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\cdot\|_2 : L^2(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soit $f \in L^2(I,\mathbb{K})$. Si $\|f\|_2 = 0$ alors $\int_I \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = 0$ or $|f|^2$ est continue et positive sur I d'intérieur non vide donc

$$\forall t \in I, \left|f(t)\right|^2 = 0$$

puis $f = \tilde{0}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I,\mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_2 = \left(\int_I |\lambda|^2\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^2 = |\lambda|\,\|f\|_2\,.$$

Soit $f,g\in L^2(I,\mathbb{K})$.

$$\|f+g\|_2^2\leq\int_I\bigl(|f(t)|+|g(t)|\bigr)^2\,\mathrm{d}t=\|f\|_2^2+2\int_I|f(t)||g(t)|\,\mathrm{d}t+\|g\|_2^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $f,g\colon[a\,;b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Ici

$$\int_a^b|f(t)||g(t)|\,\mathrm{d}t\leq\left(\int_a^b|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b|g(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leq\|f\|_2\,\|g\|_2\,.$$

Or pour $f\colon I\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux intégrable

$$\forall[a\,;b]\subset I,\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leq\int_I f$$

donc ici

$$\int_I|f(t)||g(t)|\,\mathrm{d}t\leq\|f\|_2\,\|g\|_2$$

et enfin

$$\|f+g\|_2^2\leq\bigl(\|f\|_2+\|g\|_2\bigr)^2$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Pour $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\forall 1\leq i\leq n,\bigl|(AX)_i\bigr|\leq\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|\,|x_j|=\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$$

et donc

$$\|AX\|\leq\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|=M.$$

Ainsi, l'ensemble $\bigl\{\|AX\|\bigm|X\in S\bigr\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, elle admet une borne supérieure.

(b) Si $X=0$, c'est immédiat.
Si $X\neq 0$, on introduit $X'=X/\|X\|\in S$ et l'on exploite $\|AX'\|\leq N(A)$.

(c) L'application N est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ en vertu de ce qui précède. Si $N(A)=0$ alors pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\|=0$. En particulier, en prenant des colonnes X élémentaires, on obtient que chaque colonne de A est nulle.

$$N(\lambda A)=\sup_{X\in S}\|\lambda AX\|=\sup_{X\in S}|\lambda|\,\|AX\|=|\lambda|\sup_{X\in S}\|AX\|=|\lambda|\,.$$

Enfin

$$\begin{aligned}N(A+B)&=\sup_{X\in S}\bigl\|(A+B)X\bigr\|\\&\leq\sup_{X\in S}\|AX+BX\|\\&\leq\sup_{X\in S}\|AX\|+\sup_{X\in S}\|BX\|\\&=N(A)+N(B).\end{aligned}$$

Finalement, N définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) On a déjà vu

$$N(A)\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|\,.$$

Soit i_0 l'indice pour lequel

$$\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|=\sum_{j=1}^n|a_{i_0,j}|\,.$$

Prenons ensuite $X={}^t\bigl(x_1\quad\cdots\quad x_n\bigr)$ avec $x_j=\pm1$ de sorte que $a_{i_0,j}x_j=|a_{i_0,j}|$.
On a $X\in S$ et $\|AX\|=\sum_{j=1}^n|a_{i_0,j}|$ donc

$$N(A)\geq\sum_{j=1}^n|a_{i_0,j}|$$

puis l'égalité voulue.

Exercice 16 : [énoncé]

Puisque $0\in\mathcal{C}_0$, on a déjà

$$d(e,\mathcal{C}_0)\leq d(e,0)=\|e\|_\infty=1.$$

Soit $x \in \mathcal{C}_0$. On a

$$|x_n - 1| \leq \|x - e\|_\infty$$

et donc quand $n \to +\infty$

$$1 \leq \|x - e\|_\infty .$$

On en déduit

$$d(e, \mathcal{C}_0) \geq 1$$

et donc $d(e, \mathcal{C}_0) = 1$.

Exercice 17 : [énoncé]

Puisque $0 \in \mathcal{C}_0$, on a déjà

$$d(u, \mathcal{C}) \leq d(u, 0) = \|u\|_\infty = 1.$$

Soit $x \in \mathcal{C}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Pour $n = 2p$ pair

$$|x_{2p} - u_{2p}| \leq \|x - u\|_\infty$$

donne $|x_{2p} - 1| \leq \|x - u\|_\infty$ puis à la limite

$$|\ell - 1| \leq \|x - u\|_\infty .$$

De même avec $n = 2p + 1$ impair on obtient

$$|\ell + 1| \leq \|x - u\|_\infty .$$

On en duite

$$|1| = \left|\frac{1+\ell}{2} + \frac{1-\ell}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\big(|1+\ell| + |1-\ell|\big) \leq \|x - u\|_\infty .$$

On en déduit

$$d(u, \mathcal{C}) \geq 1$$

et donc $d(u, \mathcal{C}) = 1$.

Exercice 18 : [énoncé]

Puisque $0 \in F$, $d(e, F) \leq d(e, 0) = 1$.
En raisonnant par l'absurde montrons $d(e, F) = 1$ en supposant $d(e, F) < 1$.
Il existe alors une suite $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ vérifiant $\|\Delta x - e\|_\infty = \rho$ avec $\rho < 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|\Delta x(k) - 1\right| \leq \rho$ donc $\Delta x(k) \geq 1 - \rho$.
En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n - 1$, on obtient
$x(n) - x(0) \geq n(1 - \rho)$ et donc $x \to +\infty$.
Ceci contredit $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et permet de conclure.

Exercice 19 : [énoncé]

Par définition

$$d(f, F) = \inf_{g \in F} \|f - g\|_\infty .$$

Puisque la fonction nulle est continue

$$d(f, F) \leq \left\|f - \tilde{0}\right\|_\infty = 1.$$

Inversement, soit $g \in F$.
Pour tout $x > 0$.

$$\left|f(x) - g(x)\right| = \left|1 - g(x)\right| \leq \|f - g\|_\infty$$

donc à la limite quand $x \to 0^+$

$$\left|1 - g(0)\right| \leq \|f - g\|_\infty .$$

De même, pour $x < 0$,

$$\left|f(x) - g(x)\right| = \left|1 + g(x)\right| \leq \|f - g\|_\infty$$

et donc à la limite quand $x \to 0^-$

$$\left|1 + g(0)\right| \leq \|f - g\|_\infty .$$

On en déduit

$$2 \leq \left|1 + g(0)\right| + \left|1 - g(0)\right| \leq 2\,\|f - g\|_\infty$$

et donc

$$1 \leq \|f - g\|_\infty .$$

Finalement $1 \leq d(f, F)$ puis $d(f, F) = 1$.

Exercice 20 : [énoncé]

(a)

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

et

$$\|f\|_2 \leq \left(\int_0^1 \|f\|_\infty^2\right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty .$$

Posons $f_n(x) = x^n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ alors que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$. Les normes ne sont donc pas équivalentes.

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 1 \times |f(t)|\,\mathrm{d}t \le \left(\int_0^1 1\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

donc

$$\|f\|_1 \le \|f\|_2\,.$$

Pour $f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n$, $\|f_n\|_2 = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \to 0$, les normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Sans difficultés.

(b) On a $N_1(f) \le N_2(f)$ car

$$|f(x)| \le |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le |f(0)| + |x| \sup_{[-1;1]} |f'|$$

et sans difficultés on a aussi $N_3(f) \le 2N_1(f)$.
Posons

$$f_n(x) = x^n.$$

On a $N_1(f_n) = 1$, $N_2(f_n) = n$ et $N_3(f_n) = \frac{2}{n+1}$.
On en déduit que les normes N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part, ne sont pas équivalentes.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Posons $\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f,f) \ge 0$ et si $\varphi(f,f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0\,;1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.

(b) Pour tout $x \in [0\,;1]$, $|f(x)| \le |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \le \sqrt{2}N(f)$.Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n\pi/\sqrt{2} \to +\infty$.
Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) $N_1, N_2 \colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} N_1(P+Q) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \left|Q^{(k)}(0)\right| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \sum_{k=0}^{+\infty}\left|Q^{(k)}(0)\right| = N_1(P) + N_1(Q). \end{aligned}$$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\lambda P^{(k)}(0)\right| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| = |\lambda|\, N_1(P).$$

$$N_1(P) = 0 \implies \forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$$

or

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

et donc $P = 0$.
Finalement, N_1 est une norme.

$$\begin{aligned} N_2(P+Q) &= \sup_{t\in[-1;1]} \left|P(t) + Q(t)\right| \le \sup_{t\in[-1;1]} \left|P(t)\right| + \left|Q(t)\right| \\ &\le \sup_{t\in[-1;1]} \left|P(t)\right| + \sup_{t\in[-1;1]} \left|Q(t)\right| = N_2(P) + N_2(Q). \end{aligned}$$

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t\in[-1;1]} \left|\lambda P(t)\right| = \sup_{t\in[-1;1]} |\lambda| \left|P(t)\right| = |\lambda| \sup_{t\in[-1;1]} \left|P(t)\right| = |\lambda|\, N_2(P).$$

$$N_2(P) = 0 \implies \forall t \in [-1\,;1], P(t) = 0$$

et par infinité de racines $P = 0$.

(b) La suite $\left(\frac{1}{n}X^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_2 mais n'est pas bornée et donc diverge pour N_1.

(c) Les normes ne peuvent être équivalentes car sinon les suites convergeant pour l'une des normes convergerait pour l'autre.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Aisément $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha\|\cdot\|_\infty$.
$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

(b) En introduisant N tel que $n > N \implies u_n = 0$ on a

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=0}^{N} |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)^2 = \|u\|_1^2.$$

Ainsi $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$.
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha\|\cdot\|_2$.
$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) La suite u étant sommable, elle converge vers 0 et est par conséquent bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

donc

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 .$$

Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.
On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha\|\cdot\|_\infty$.
$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

(b) On a $\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|\right)^2$ donc quand $N \to +\infty$:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)^2 = \|u\|_1^2.$$

Ainsi $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$.
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.
On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha\|\cdot\|_2$.
$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Supposons que N_a est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
Pour $m \in \mathbb{N}$, la suite élémentaire $e_m = (\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle donc

$$N_a(e_m) = a_m > 0.$$

De plus, pour la suite constante $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, la quantité $N_a(u)$ existe et donc la série $\sum a_n$ converge.
Inversement, si $\sum a_n$ est une série convergente à termes strictement positifs alors on montre que l'application $N_a : \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et que celle-ci est une norme sur l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

(b) On a aisément $N_a \leq k\|\cdot\|_\infty$ avec $k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
Inversement, supposons $\|\cdot\|_\infty \leq k' N_a$. Pour la suite élémentaire e_m, on obtient $\|e_m\|_\infty \leq k' N_a(e_m)$ et donc $a_m \geq 1/k$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cette propriété est incompatible avec la convergence de la série $\sum a_n$.
Ainsi N_a est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) N_∞ est bien connue pour être une norme sur l'ensemble des fonctions bornées, il en est de même sur l'ensemble des suites bornées dont le premier terme est nul.
L'application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie. On vérifie aisément $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ et $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$. Si $N(u) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ et puisque $u_0 = 0$, on obtient $u = 0$. Ainsi N est une norme sur E.

(b) Pour $u \in E$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2N_\infty(u).$$

On en déduit

$$N(u) \leq 2N_\infty(u).$$

La suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 1$ est une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.

(c) Considérons la suite $u^{(p)}$ définie par

$$u^{(p)}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq p \\ p & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a
$$u^{(p)} \in E, N_\infty(u^{(p)}) = p \text{ et } N(u^{(p)}) = 1.$$
On en déduit que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes car
$$\frac{N_\infty(u^{(p)})}{N(u^{(p)})} \to +\infty.$$

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Les applications sont bien définies $N_i \colon E \to \mathbb{R}_+$ car toute fonction continue sur un segment y est bornée.
Les propriétés $N_i(f+g) \le N_i(f) + N_i(g)$ et $N_i(\lambda f) = |\lambda| N_i(f)$ sont faciles.
Si $N_1(f) = 0$ alors $f' = 0$ et sachant $f(0) = 0$, on obtient $f = 0$.
Si $N_2(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$.
Ainsi les applications N_1, N_2 sont bien des normes sur E.

(b) Pour $f \in E$, on a
$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$
ce qui permet d'établir $\|f\|_\infty \le \|f'\|_\infty$.
Puisque
$$N_2(f) \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \le 2N_1(f)$$
la norme N_2 est dominée par la norme N_1.

(c) Sachant $f(0) = 0$, on a
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \left(f(t)\mathrm{e}^t\right)'\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\left|f(x)\right| \le N_2(f).$$
Puisque
$$\left|f'(x)\right| \le \left|f(x) + f'(x)\right| + \left|f(x)\right|$$
on obtient
$$\left|f'(x)\right| \le 2N_2(f)$$
et finalement
$$N_1(f) \le 2N_2(f).$$

Exercice 29 : [énoncé]

Pour tout $f, g \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $N_i(f+g) \le N_i(f) + N_i(g)$ et que $N_i(\lambda f) = \lambda N_i(f)$.
Supposons $N_1(f) = 0$, on a alors $\sup_{x\in[0;1]}\left|f(x)\right| = 0$ donc $f = 0$.
Supposons maintenant que $N_2(f) = 0$, on a alors $\sup_{x\in[0;1]}\left|f(x) + f'(x)\right| = 0$ donc $f(x) + f'(x) = 0$. Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda = f(0) = 0$ et finalement $f = 0$.
Finalement N_1 et N_2 sont bien deux normes sur E.
Il est clair que
$$N_2(f) \le N_1(f).$$
Posons maintenant $M = N_2(f)$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a
$$\left|f(x) + f'(x)\right| \le M$$
donc
$$\left|\left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'\right| \le M\mathrm{e}^x$$
d'où
$$\left|f(x)\mathrm{e}^x\right| = \left|\int_0^x \left(f(t)\mathrm{e}^t\right)'\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^x M\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \le M\mathrm{e}x$$
puis $\left|f(x)\right| \le M\mathrm{e}$ pour tout $x \in [0\,;1]$. Ainsi
$$\sup_{x\in[0;1]}\left|f(x)\right| \le M\mathrm{e}.$$
De plus
$$\left|f'(x)\right| \le \left|f(x) + f'(x)\right| + \left|f(x)\right| \le M(1+\mathrm{e})$$
donc
$$\sup_{x\in[0;1]}\left|f'(x)\right| \le M(1+\mathrm{e})$$
et finalement
$$N_1(f) \le M(1+2\mathrm{e}) = N_2(f)(1+2\mathrm{e}).$$
On peut conclure que les deux normes sont effectivement équivalentes.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) L'application $N \colon E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et on vérifie aisément $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.
Supposons maintenant $N(f) = 0$, la fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui entraîne $f = 0$.
Finalement N est une norme sur E.

(b) On a évidemment $N \leq \nu$.
Inversement, soit $f \in E$ et $g = f + f''$. La fonction f est solution de l'équation différentielle
$$y'' + y = g$$
vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Après résolution via la méthode de variation des constantes, on obtient
$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
On en déduit $\left|f(x)\right| \leq x\left\|g\right\|_\infty \leq \pi\left\|g\right\|_\infty$ et donc $\left\|f\right\|_\infty \leq \pi N(f)$.
De plus $\left\|f''\right\|_\infty \leq \left\|f+f''\right\|_\infty + \left\|f\right\|_\infty$ donc $\nu(f) \leq (\pi+1)N(f)$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) $\|\cdot\|_\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Si $\left\|f\right\|_\varphi = 0$ alors la fonction $t \mapsto \left|f(t)\right|\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f = \tilde{0}$.
Les propriétés $\left\|\lambda f\right\|_\varphi = |\lambda|\left\|f\right\|_\varphi$ et $\left\|f+g\right\|_\varphi \leq \left\|f\right\|_\varphi + \left\|g\right\|_\varphi$ sont immédiates.

(b) Considérons la fonction φ_2/φ_1. Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $\forall x \in [0\,;1], \varphi_2(x) \leq M\varphi_1(x)$. On en déduit $\|\cdot\|_{\varphi_1} \leq M\|\cdot\|_{\varphi_2}$. Ainsi $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ et par un argument symétrique $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_1}$.

(c) On a facilement $\|\cdot\|_{x^2} \leq \|\cdot\|_x$.
Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a après étude des variations des fonction $x \mapsto x(1-x)^n$ et $x \mapsto x^2(1-x)^n$
$$\left\|f_n\right\|_x = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$$
et
$$\left\|f_n\right\|_{x^2} = \left(\frac{2}{n+2}\right)^2\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$$
donc il n'existe pas de constante $M \geq 0$ telle que $\|\cdot\|_x \leq M\|\cdot\|_{x^2}$. Les deux normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 32 : [énoncé]
On sait $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$ et $\alpha N \leq N_\infty \leq \beta N$ avec $\alpha, \beta > 0$ donc
$$N(AB) \leq \frac{1}{\alpha}N_\infty(AB) \leq \frac{n}{\alpha}N_\infty(A)N_\infty(B) \leq \frac{n\beta^2}{\alpha}N(A)N(B).$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) facile.

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons que la suite (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une certaine fonction f. On ne sait pas *a priori* si cette fonction est, ou non, polynomiale.
Soit $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ une famille de $d+1$ réels distincts et $P \in E$ déterminé par $P(\xi_k) = f(\xi_k)$. On peut affirmer que la (P_n) suite converge vers P pour la norme N_ξ. Soit $[a\,;b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. $N = \|\cdot\|_{\infty,[a;b]}$ définit une norme sur E qui est équivalent à N_ξ car E est de dimension finie. Puisque (P_n) converge vers P pour la norme N_ξ, on peut affirmer que la convergence a aussi lieu pour la norme N et donc (P_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a\,;b]$. Au passage, on en déduit que $f = P$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Si la suite (P_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction f, elle converge aussi simplement vers f et l'étude ci-dessus montre que f est un polynôme. En introduisant la norme infinie relative aux coefficients polynomiaux :
$$\left\|a_0 + \dots + a_dX^d\right\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq d}|a_k|$$
l'équivalence de norme permet d'établir que les coefficients de P_n convergent vers les coefficients respectifs de f.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) immédiat.

Exercice 34 : [énoncé]
Soient $a_0, \dots, a_N$ des réels deux à deux distincts. Considérons la fonction polynôme P de degré inférieur à N vérifiant
$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, P(a_k) = f(a_k).$$
Sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$, on peut introduire la norme donnée par
$$N(Q) = \max_{0 \leq k \leq N}\left|Q(a_k)\right|.$$

Pour cette norme, on peut affirmer que la suite (P_n) converge vers P. Or l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ est de dimension finie, toutes les normes y sont donc équivalentes. La convergence de (P_n) vers P a donc aussi lieu pour les normes données par

$$\|Q\|_{\infty,[a;b]} = \sup_{t\in[a;b]} \left|Q(t)\right|.$$

La suite (P_n) converge vers P sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc converge simplement vers P. Par unicité de la limite simple, la fonction f est égale à P.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) $N_a(1,1)$ et $N_a(1,-1)$ doivent exister et être strictement positifs. Cela fournit les conditions nécessaires $2a+2>0$ et $2-2a>0$ d'où $a\in\,]-1\,;1[$. Montrons que cette condition est suffisante.
Supposons $a\in\,]-1\,;1[$ et considérons $\varphi\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par
$\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = xx'+yy'+axy'+ayx'$.
L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ et pour
$(x,y)\neq(0,0)$, $\varphi\big((x,y),(x,y)\big)\geq\big(1-|a|\big)(x^2+y^2)>0$ en vertu de
$|2axy|\leq|a|\left(x^2+y^2\right)$. Ainsi φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et N_a est la norme euclidienne associée.

(b) Le cas $a=b$ est immédiat. Quitte à échanger, on peut désormais supposer $a<b$.
Par homogénéité, on peut limiter l'étude de $\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$ au couple
$(x,y)=(\cos t,\sin t)$ avec $t\in\,]-\pi/2\,;\pi/2]$.
Posons

$$f(t)=\left(\frac{N_a(\cos t,\sin t)}{N_b(\cos t,\sin t)}\right)^2=\frac{1+a\sin 2t}{1+b\sin 2t}.$$

On a

$$f'(t)=2\frac{(a-b)\cos(2t)}{(1+b\sin 2t)^2}.$$

Les variations de f sont faciles et les extremums de $f(t)$ sont en $t=-\pi/4$ et $t=\pi/4$. Ils valent $\frac{1-a}{1-b}$ et $\frac{1+a}{1+b}$.
On en déduit

$$\inf_{(x,y)\neq 0}\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}=\sqrt{\frac{1+a}{1+b}}$$

et

$$\sup_{(x,y)\neq 0}\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}=\sqrt{\frac{1-a}{1-b}}$$

(dans le cas $a<b$).

Exercice 36 : [énoncé]
Il suffit d'observer

$$(BA)^{n+1}=B(AB)^nA\to O_p.$$

Exercice 37 : [énoncé]
Puisque les matrices A et B commutent, il en est de même des matrices A^k et B^k. En passant à la limite la relation

$$A^kB^k=B^kA^k$$

on obtient

$$PQ=QP.$$

Exercice 38 : [énoncé]
On a

$$A_nA_n^{-1}=I_p.$$

En passant cette relation à la limite on obtient

$$AB=I_p.$$

Par le théorème d'inversibilité, on peut affirmer que A est inversible et

$$A^{-1}=B.$$

Exercice 39 : [énoncé]
$A^{2n}\to B$ et $A^{2n}=A^n\times A^n\to B^2$ donc $B=B^2$ et B est une matrice de projection.

Exercice 40 : [énoncé]
Posons $r=\operatorname{rg}A_\infty$.
La matrice A_∞ possède est déterminant extrait non nul de taille r.
Le déterminant extrait correspondant des matrices A_n est alors non nul à partir d'un certain rang et donc $\operatorname{rg}(A_n)\geq r$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Une matrice $A\in E_q$ annule le polynôme scindé simple X^q-1, elle est donc diagonalisable. Si 1 est sa seule valeur propre alors $A=I_n$ car semblable à I_n.

(b) Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite (A_p) d'éléments de $E_q \setminus \{I_n\}$ vérifiant
$$A_p \to I_n.$$
Par continuité de la trace
$$\operatorname{tr} A_p \to n.$$
Or la trace de A_p est la somme de ses valeurs propres, celles-ci ne sont pas toutes égales à 1 et sont racines $q$ème de l'unité donc
$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A_p) \leq (n-1) + \cos\frac{2\pi}{q}.$$
Cette majoration est incompatible avec la propriété $\operatorname{tr} A_p \to n$.

Exercice 42 : [énoncé]
D'une part
$$^t(A^k) \to {}^tB$$
et d'autre part
$$^t(A^k) = (-1)^k A^k$$
de sorte que
$$^t(A^{2p}) = (-1)^{2p} A^{2p} \to B$$
et
$$^t(A^{2p+1}) = (-1)^{2p+1} A^{2p+1} \to -B.$$
Par unicité de la limite, on obtient
$$B = {}^tB = -B.$$
On en déduit que la matrice B est nulle.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Les coefficients y_j de la colonne Y étant tous positifs, on peut écrire
$$[AY]_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geq \alpha} y_j \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha y_j \geq \alpha \max(Y).$$
Cette comparaison valant pour tout indice i, il vient
$$\min(AY) \geq \alpha \max(Y).$$

(b) Par construction, la colonne Y est à coefficients positifs. Aussi, on vérifie $AU = U$ car les lignes de A sont de sommes constantes égales à 1. On a donc
$$\min(AY) \geq \alpha \max(Y)$$
avec
$$\min(AY) = \min\bigl(AX - \min(X)U\bigr) = \min(AX) - \min(X)$$
et
$$\max(Y) = \max\bigl(X - \min(X)U\bigr) = \max(X) - \min(X)$$
ce qui donne après réorganisation des termes
$$\min(AX) \geq \alpha \max(X) + (1-\alpha)\min(X).$$
Pour obtenir la seconde comparaison, on peut reprendre ce qui précède à partir de $Y = \max(X)U - X$ ou bien employer ce qui suit :

Par passage à l'opposé $\min(-X) = -\max(X)$ et $\max(-X) = -\min(X)$.

En appliquant le résultat précédent à la colonne $-X$, il vient après échange des min et des max et renversement de la comparaison
$$\max(AX) \leq \alpha \min(X) + (1-\alpha)\max(X).$$

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. En appliquant les comparaisons qui précèdent à la colonne A^pX, on obtient
$$\begin{aligned}\min(A^{p+1}X) &\geq \alpha \max(A^pX) + (1-\alpha)\min(A^pX)\\ &\geq \alpha \min(A^pX) + (1-\alpha)\min(A^pX) = \min(A^pX)\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\max(A^{p+1}X) &\leq \alpha \min(A^pX) + (1-\alpha)\max(A^pX)\\ &\leq \alpha \max(A^pX) + (1-\alpha)\max(A^pX) = \max(A^pX).\end{aligned}$$
Les deux suites $\bigl(\min(A^pX)\bigr)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\bigl(\max(A^pX)\bigr)_{p\in\mathbb{N}}$ sont donc respectivement croissante et décroissante. Aussi, on a
$$\max(A^{p+1}X) - \min(A^{p+1}X) \leq (1-2\alpha)\bigl(\max(A^pX) - \min(A^pX)\bigr)$$
et, par une récurrence immédiate,
$$0 \leq \max(A^pX) - \min(A^pX) \leq (1-2\alpha)^p\bigl(\max(AX) - \min(AX)\bigr).$$

Or $1-2\alpha \in [0\,;1[$ car les coefficients de A sont strictement positifs et la somme de ceux-ci sur chaque ligne vaut 1 ce qui oblige $n\alpha \leq 1$. La suite géométrique $\left((1-2\alpha)^p\right)$ est donc de limite nulle et, par comparaison, on conclut que la différence des deux suites $\left(\max(A^pX)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(\min(A^pX)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle. Finalement, ces deux suites sont adjacentes.

(d) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'adjacence des suites $\left(\min(A^pX)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(\max(A^pX)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ entraîne la convergence de (A^pX) vers une colonne dont tous les coefficients sont égaux :

$$A^pX \xrightarrow[p\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \ell(X) \\ \vdots \\ \ell(X) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \ell(X) \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, la j-ème colonne de A^p correspond au produit de A^p par la j-ème colonne élémentaire E_j de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Colonne par colonne, on justifie

$$A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A_\infty = \begin{pmatrix} \ell(E_1) & \cdots & \ell(E_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \ell(E_1) & \cdots & \ell(E_n) \end{pmatrix}.$$

Cette limite est de rang au plus 1 car ses lignes sont toutes identiques, elle est même de rang exactement 1 car ce n'est pas la matrice nulle. En effet, $AU = U$ donne $A^pU = U$ puis, à la limite, $A^\infty U = U$.

Exercice 44 : [énoncé]

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Le plus simple est sans doute d'utiliser la décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente commutant entre elles. Par la formule du binôme de Newton, on peut calculer M^k et tronquer la somme par la nilpotence de N, on parvient alors à une somme finie de termes qui tendent vers 0 par croissance comparée. Une autre méthode, techniquement plus lourde, consiste à introduire $\rho_\ell^k = \max\left\{\left|(M^k)_{1,\ell+1}\right|, \dots, \left|(M^k)_{n-\ell,n}\right|\right\}$ qui majorent les coefficients de M^k situés sur la diagonale (pour $\ell = 0$), sur la sur-diagonale (pour $\ell = 1$) etc. En notant que $\rho = \rho_0^1 < 1$, on montre par récurrence sur k que $\rho_\ell^k \leq k^\ell \left\|M\right\|_\infty^{\ell+1} \rho^{k-\ell}$ ce qui permet de conclure.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons que $M^k \to 0$. On peut alors affirmer que 1 n'est pas valeur propre de M car $MX = X \implies M^kX = X$ et donc à la limite $MX = X \implies X = 0$. Par suite la matrice $I - M$ est inversible et puisque $(I-M)\sum_{k=0}^m M^k = I - M^{m+1}$, $\sum_{k=0}^m M^k = (I-M)^{-1}(I - M^{m+1})$ d'où la convergence de la série des M^k.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$ et $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Puisque $\sum_{k=0}^m M^k$ converge quand $\operatorname{rg} C \geq r$, on a $\sum_{k=0}^m M^kX$ converge, puis $\sum_{k=0}^n \lambda^k X$ converge et donc $|\lambda| < 1$ (car $X \neq 0$).