

**Exercice 1** [ 02352 ] [Correction]

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  non multiple de  $2\pi$ . On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}.$$

- Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.
- En observant que  $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$ , établir que la série de terme général  $u_n$  converge.
- En exploitant l'inégalité  $|\cos x| \geq \cos^2 x$ , établir que la série de terme général  $|u_n|$  diverge.

**Exercice 2** [ 03772 ] [Correction]

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

**Exercice 3** [ 02610 ] [Correction]

Pour  $x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ , on pose

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

- Justifier l'existence de  $f(x)$  pour chaque  $x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$
- Établir que pour tout  $x > 1$ ,

$$\int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t} \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t}.$$

En déduire la limite de  $f$  en  $1^+$

- Étudier de même la limite de  $f$  en  $1^-$ .
- Justifier que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$  et exprimer

$$f'(x).$$

- Établir que le prolongement par continuité de  $f$  en  $1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  puis de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$

**Exercice 4** [ 02626 ] [Correction]

- Établir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

- Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(t) = \operatorname{ch} t \text{ pour } t \in [-\pi; \pi]$$

sachant

$$\int_0^\pi \operatorname{ch} t \cdot \cos(nt) dt = (-1)^n \frac{\operatorname{sh} \pi}{n^2 + 1}.$$

- En déduire la valeur de l'intégrale du a).

**Exercice 5** [ 00157 ] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt$$

où  $[t]$  représente la partie entière de  $t$ .

- Justifier la bonne définition de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .
- Montrer que pour tout  $A > 0$

$$\int_0^A \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt = \frac{1}{n} \left( \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_A^{A+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right).$$

En déduire une nouvelle expression intégrale de  $u_n$ .

- On pose

$$v_n = nu_n.$$

Montrer la convergence de la série de terme général

$$v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n}.$$

- En déduire un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 6** [ 02879 ] [Correction]

(a) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

On pose pour tout réel  $x$

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

(b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer sa dérivée.

(c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

**Exercice 7** [ 00676 ] [Correction]

(a) Justifier l'existence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt.$$

Pour  $x > 0$ , on pose

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt.$$

(a) On rappelle  $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$ . Établir que

$$I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

(b) En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 8** [ 03990 ] [Correction]

Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) dt.$$

**Exercice 9** [ 03774 ] [Correction]

En exploitant le changement de variable  $u = \tan t$ , calculer pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dt}{3 + \cos^2 t}.$$

**Exercice 10** [ 03789 ] [Correction]

Étude et graphe de la fonction

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$

On précise le comportement de la fonction quand  $x \rightarrow 0$  et quand  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Exercice 11** [ 02617 ] [Correction]

Pour tout  $x \in [1; +\infty[$ , on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} dt.$$

(a) Montrer que la fonction  $F$  est bien définie, continue sur  $[1; +\infty[$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1; +\infty[$ .

Exprimer sa dérivée  $F'(x)$

(b) Étudier la dérivabilité de  $F$  en 1. Préciser la tangente au graphe de  $F$  en 1.

(c) Étudier la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

(d) Justifier que  $F$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur un intervalle à préciser.

(e) Justifier que  $F^{-1}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et solution de l'équation différentielle

$$yy' = \sqrt{y^3-1}.$$

(f) Étudier la dérivabilité de  $F^{-1}$  en 0.

**Exercice 12** [ 03768 ] [Correction]

Étudier la suite suivante

$$u_n = \frac{r(1) + r(2) + \dots + r(n)}{n^2}$$

avec  $r(k)$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $k$ .

Indice : étudier la suite suivante

$$v_n = \frac{(n-r(1)) + (n-r(2)) + \dots + (n-r(n))}{n^2}.$$

**Exercice 13** [ 03777 ] [Correction]

Pour  $x > 0$ , on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

- (a) Montrer que  $F$  est bien définie.  
 (b) Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .  
 (c) Simplifier

$$F(x) + F(x+1).$$

- (d) Montrer que pour  $x > 0$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

- (e) Donner un équivalent de  $F$  en 0 et en  $+\infty$ .

**Exercice 14** [03797] [Correction]

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

- (a) Montrer que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b) Donner, à l'aide d'une comparaison intégrale, un équivalent de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .  
 (c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de  $f$  en 0. On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Exercice 15** [00502] [Correction]

- (a) Rappeler pourquoi un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle admet au moins un vecteur propre.  
 (b) Soient  $u, v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie non nulle.  
 On suppose

$$u \circ v = v \circ u.$$

Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.

**Exercice 16** [01948] [Correction]

Trouver les matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\text{tr } M = 0 \text{ et } M^3 - 4M^2 + 4M = O_n.$$

**Exercice 17** [03126] [Correction]

Soient  $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $f: E \rightarrow E$  l'application qui transforme une suite  $u = (u_n)$  en  $v = (v_n)$  définie par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .

**Exercice 18** [00851] [Correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $p^2$  soit un projecteur.

- (a) Quelles sont les valeurs propres possibles pour  $p$ ?  
 (b) Montrer que  $p$  est diagonalisable si, et seulement si,  $p^3 = p$ .

**Exercice 19** [03015] [Correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, un projecteur fixé de  $E$  et  $\mathcal{F}: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  définie par

$$\mathcal{F}: f \mapsto \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f).$$

- (a)  $\mathcal{F}$  est-elle linéaire?  
 (b)  $\mathcal{F}$  est-elle diagonalisable?  
 (c) Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés?

**Exercice 20** [02608] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$A^3 + I_n = O_n.$$

Montrer que la trace de  $A$  est un entier.

**Exercice 21** [03551] [Correction]

Expliquer pourquoi le déterminant de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est le produit des valeurs propres complexes de  $A$ , valeurs propres comptées avec multiplicité.

**Exercice 22** [03778] [Correction]

Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 23** [03991] [Correction]

(a) Soient  $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  semblables

Pour  $x \in \mathbb{C}$ , montrer que les matrices  $xI_n - B$  et  $xI_n - C$  sont semblables.  
En est-il de même de  $(xI_n - B)^{-1}$  et  $(xI_n - C)^{-1}$  ?

(b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $P_A(x) = \det(xI_n - A)$  et  $P'_A$  le polynôme dérivé de  $P_A$ .

On suppose que  $x$  n'est pas valeur propre de  $A$ , montrer

$$\text{tr}(xI_n - A)^{-1} = \frac{P'_A(x)}{P_A(x)}.$$

**Exercice 24** [03138] [Correction]

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ (0) & A \end{pmatrix}$$

avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(a) Montrer que

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ (0) & P(A) \end{pmatrix} \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}[X].$$

(b) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit diagonalisable.

**Exercice 25** [03027] [Correction]

Trouver les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $M^5 = M^2$  et  $\text{tr}(M) = n$ .

**Exercice 26** [03798] [Correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non triviaux. On note  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  et parallèlement à  $G$ . Enfin on pose pour  $f$  endomorphisme de  $F$

$$\phi(f) = p \circ f \circ s$$

ce qui définit un endomorphisme  $\phi$  sur  $\mathcal{L}(E)$ .

(a) Montrer que  $\phi$  annule un polynôme « simple ». L'endomorphisme  $\phi$  est-il diagonalisable ?

(b) Déterminer les éléments propres de  $\phi$ .

*On pourra considérer les matrices de  $p$  et  $s$  dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ .*

**Exercice 27** [03396] [Correction]

Calculer

$$I = \iint_D (1 + xy) \, dx \, dy$$

où  $D$  désigne le disque fermé de centre  $O$  et de rayon 1.

**Exercice 28** [03393] [Correction]

Soit  $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  une application continue vérifiant

$$f \circ f = f.$$

(a) Montrer que l'ensemble

$$\{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$$

est un intervalle fermé et non vide.

(b) Donner l'allure d'une fonction  $f$  non triviale vérifiant les conditions précédentes.

(c) On suppose de plus que  $f$  est dérivable. Montrer que  $f$  est constante ou égale à l'identité.

**Exercice 29** [00186] [Correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien  $E$  et  $u^*$  l'adjoint de  $u$ . Montrer

$$\text{Ker } u^* = \text{Im } u^\perp \text{ et } \text{Im } u^* = \text{Ker } u^\perp.$$

**Exercice 30** [00355] [Correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $u^2 = 0$ .

Établir

$$\text{Ker}(u + u^*) = \text{Ker } u \cap \text{Ker } u^*.$$

**Exercice 31** [03384] [Correction]

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base quelconque d'un espace euclidien  $E$ .

(a) Montrer que l'endomorphisme  $f$  donnée par

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (e_k | x) e_k$$

est symétrique et vérifie

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, (f(x) | x) > 0.$$

(b) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique  $g$  de  $E$  tel que

$$g^2 = f^{-1}.$$

(c) Montrer que la famille  $(g(e_1), \dots, g(e_n))$  est une base orthonormale de  $E$

**Exercice 32** [03783] [Correction]

Donner un équivalent simple quand  $x \rightarrow 1^-$  de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

**Exercice 33** [02605] [Correction]

Soit  $\alpha \in ]-1; 1[$ .

(a) Montrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la convergence de la suite de terme général

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^n (1 - \alpha^k x)$$

vers une limite que l'on notera  $P(x)$ .

(b) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(E): \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x)f(\alpha x).$$

Montrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = f(0)P(x).$$

(c) Montrer que la fonction  $x \mapsto P(x)$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 34** [03016] [Correction]

Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

(a) Calculer  $I(p, q)$ .

(b) La série de terme général  $u_n = I(n, n)$  est-elle convergente ou divergente?

(c) Donner le domaine de définition réel de la série entière de  $\sum u_n x^n$ .

**Exercice 35** [02607] [Correction]

Pour  $n \geq 0$ , on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt.$$

(a) Trouver la limite de la suite  $(a_n)$ .

(b) Donner une relation simple entre  $a_{n+2}$  et  $a_n$ .

(c) On pose  $f(x)$  la somme de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Déterminer l'intervalle de définition de  $f$ .

(d) Exprimer  $f$  à l'aide des fonctions usuelles.

**Exercice 36** [02499] [Correction]

On étudie

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

(a) Donner le domaine de définition de  $f$ .

- (b) Calculer  $f$  en formant une équation différentielle.  
 (c) Calculer  $f$  en exploitant le développement en série entière de la fonction cosinus.

**Exercice 37** [ 02612 ] [Correction]

- (a) Déterminer la limite  $\ell$  quand  $n \rightarrow +\infty$  de

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt.$$

- (b) Donner un équivalent de

$$I_n - \ell.$$

- (c) Justifier

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}.$$

- (d) En déduire un équivalent de

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

et donner un développement asymptotique à trois termes de  $I_n$ .

**Exercice 38** [ 02567 ] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  continue.

On suppose que la fonction  $f$  converge en  $+\infty$  vers une limite finie  $\ell$ . Déterminer la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de

$$\mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt.$$

**Exercice 39** [ 02615 ] [Correction]

Pour  $n, m \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n(m) = \int_0^1 x^n (\ln x)^m dx.$$

- (a) Calculer  $I_n(n)$ .

- (b) En déduire

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

**Exercice 40** [ 02611 ] [Correction]

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt) dt.$$

- (a) Quel est le domaine de définition réel  $I$  de la fonction  $F$ ?  
 (b) Justifier que la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .  
 (c) Exprimer  $F(x)$  à l'aide des fonctions usuelles.

**Exercice 41** [ 02609 ] [Correction]

Pour  $n \geq 1$ , on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

- (a) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .  
 (b) Établir que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n.$$

- (c) Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel qu'il y ait convergence de la suite de terme général

$$u_n = \ln(n^\alpha I_n).$$

- (d) En déduire la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} I_n$$

et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

**Exercice 42** [ 00354 ] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Établir

$$\operatorname{rg}({}^t AA) = \operatorname{rg} A.$$

**Exercice 43** [02614] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique.

On suppose  $A^n = O_n$ . Déterminer  $A$ .

**Exercice 44** [02549] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives.

Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$${}^t X A X \in \mathbb{R}_+.$$

**Exercice 45** [02606] [Correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté  $(\cdot | \cdot)$

Une application  $f: E \rightarrow E$  est dite antisymétrique lorsque

$$\forall x, y \in E, (f(x) | y) = -(x | f(y)).$$

- Montrer qu'une telle application est linéaire (ce qui permet dès lors de parler d'endomorphisme antisymétrique)
- Montrer que la matrice dans une base orthonormée d'un endomorphisme antisymétrique de  $E$  est elle-même antisymétrique.
- Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique,  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $A$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  une colonne non nulle vérifiant

$$AX = \lambda X.$$

En calculant de deux façons  ${}^t \overline{X} A X$ , établir

$$\lambda \in i\mathbb{R}.$$

- En déduire que le déterminant d'un endomorphisme antisymétrique est un réel positif.

**Exercice 46** [02562] [Correction]

Soit  $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice orthogonale.

Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $\Omega$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  vérifiant

$$\Omega X = \lambda X.$$

En calculant de deux façons

$${}^t (\overline{\Omega X}) \Omega X$$

établir que  $\lambda$  est de module 1.

**Exercice 47** [03118] [Correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle.

- Montrer que si  $p$  est un projecteur orthogonal de  $E$  alors  $p$  est symétrique.

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux de  $E$ .

- Montrer que  $p \circ q \circ p$  est symétrique.

- Montrer que

$$(\text{Im } p + \text{Ker } q)^\perp = \text{Im } q \cap \text{Ker } p.$$

- En déduire que  $p \circ q$  est diagonalisable.

**Exercice 48** [00436] [Correction]

Soient  $q$  une fonction continue, intégrable sur  $[0; +\infty[$  et  $(E)$  l'équation différentielle

$$y'' + q(x)y = 0.$$

- Si  $f$  est une solution bornée de  $(E)$  sur  $[0; +\infty[$ , montrer que sa dérivée  $f'$  admet une limite finie en  $+\infty$ .  
Quelle est la valeur de sa limite?
- Soient  $f$  et  $g$  deux solutions bornées. Étudier le wronskien de  $f$  et de  $g$

$$w = f'g - fg'.$$

En déduire que  $f$  et  $g$  sont liées. Que peut-on en conclure?

**Exercice 49** [03773] [Correction]

Étudier et construire la courbe d'équation polaire

$$r^2 = \cos(2\theta).$$

**Exercice 50** [03802] [Correction]

On considère la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $f$  est-elle continue?
- $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$ ?

**Exercice 51** [ 03000 ] [Correction]

I) Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ .

II) Pour tout entier naturel  $n$  on pose  $L_n = \frac{n!}{(2n)!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ .

- (a) Montrer que  $L_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ .
- (b) Établir :  $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 L_n(t)Q(t) dt = 0$ .
- (c) En déduire que  $L_n$  possède  $n$  racines simples, toutes dans  $] -1; 1[$ .

**Exercice 52** [ 02120 ] [Correction]

I) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

On suppose que  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$  où  $f^2$  désigne l'endomorphisme  $f \circ f$ .

- (a) Comparer l'image de  $f$  et l'image de  $f^2$ .
- (b) Établir que l'image de  $f$  et le noyau de  $f$  sont supplémentaires dans  $E$ .

II) On pose  $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$ .

- (c) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.
- (d) Soit  $v_n = (n+1)u_n^2$ .  
Montrer que la suite  $(v_n)$  converge. En déduire la limite de  $(u_n)$ ?

- (e) Simplifier  $\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  et comparer ce produit à  $u_n^2$ .
- (f) Établir que la limite de la suite  $(v_n)$  est strictement positive.
- (g) Exprimer  $u_n$  à l'aide de nombres factoriels.

**Exercice 53** [ 02618 ] [Correction]

I) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les valeurs propres réelles sont toutes positives ou nulles. Montrer

$$\det A \geq 0.$$

II) Soient  $0 < a < b$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement positive telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

- (a) En étudiant la nature de la série de terme général

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

établir que la suite  $(u_n)$  est de limite nulle.

(b) Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $(v_n)$  la suite de terme général

$$v_n = n^\alpha u_n.$$

Déterminer  $\alpha$  pour qu'il y ait convergence de la série de terme général

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n.$$

En déduire qu'il existe  $A > 0$  tel que

$$u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}}.$$

(c) Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

**Exercice 54** [ 02990 ] [Correction]

I) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Montrer l'équivalence :  $\text{Ker } f = \text{Im } f \iff (f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \text{ rg}(f))$ .

II) On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$

- (a) Justifier, par exemple à l'aide du théorème des accroissements finis, l'encadrement suivant

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- (b) Déterminer la limite de  $(S_n)$ .
- (c) On pose  $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ . Montrer que  $(u_n)$  converge.
- (d) En déduire un équivalent simple de  $(S_n)$ .

**Exercice 55** [ 03001 ] [Correction]

I) On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  les parties de l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formées des matrices respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

II) Soit  $\rho > 0$  et  $\theta \in ]0; \pi[$ .

On considère la suite complexe  $(z_n)$  définie par  $z_0 = \rho e^{i\theta}$  et  $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Exprimer  $z_n$  sous forme d'un produit.



(b) Déterminer la limite de la suite  $(z_n)$ .

**Exercice 56** [ 02121 ] [Correction]

I) Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  la matrice dont tous les coefficients sont égaux à  $b$ , sauf ceux la diagonale, égaux à  $a$ .

Calculer le déterminant de  $M$ .

II) Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique.

On considère  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $E: y' + \alpha y = f$ .

(a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = \left( y(0) + \int_0^x f(t)e^{\alpha t} dt \right) e^{-\alpha x}$ .

(b) Montrer que  $y$  est  $2\pi$ -périodique si, et seulement si,  $y(0) = y(2\pi)$ .

*On pourra observer que la fonction  $z: x \mapsto y(x + 2\pi)$  est solution de  $E$ .*

(c) En déduire qu'il existe une unique fonction  $2\pi$ -périodique solution de  $E$ .

**Exercice 57** [ 02619 ] [Correction]

I) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f$  et  $f''$  soient bornées.

On pose

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \text{ et } M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.$$

(a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En appliquant une formule du Taylor entre  $x$  et  $x + h$ , établir que pour tout  $h > 0$ ,

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

(b) En déduire

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}.$$

II) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1.

(c) Montrer qu'il existe deux colonnes  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  vérifiant

$$A = X^t Y$$

où  ${}^t Y$  désigne la transposée de la matrice  $Y$ .

(d) En déduire que

$$A^2 = \text{tr}(A)A.$$

(e) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 58** [ 02991 ] [Correction]

I) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique

$$(e_1, e_2, e_3) \text{ est } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ . Démontrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

(b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de  $f$  dans cette base.

(c) Décrire  $f$  comme la composée de deux transformations vectorielles élémentaires.

II) a) Établir, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ .

(d) En déduire la limite de  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 59** [ 03002 ] [Correction]

I) Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

On pose  $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w}$ ,  $\vec{y} = \vec{w} + \vec{u}$  et  $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$ .

Montrer que si la famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est libre alors la famille  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  l'est aussi.

II) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  et  $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

(a) Établir que pour tout  $p > 1$ ,  $\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{dt}{t}$ .

(b) En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .

(c) Établir que  $S'_{2n} = S_n$  et en déduire la limite de  $(S'_n)$ .

**Exercice 60** [ 02122 ] [Correction]

I) Soient  $a$  et  $b$  des réels strictement positifs.

Déterminer la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de  $u_n = \left( \frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n$ .

II) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $p$  termes) l'itéré de composition d'ordre  $p$  de  $f$ .

On suppose que  $f$  vérifie  $f^n = \tilde{0}$  et  $f^{n-1} \neq \tilde{0}$  où  $\tilde{0}$  désigne l'endomorphisme nul de  $E$ .

(a) Soit  $x_0 \in E$  vérifiant  $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ .

Montrer que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ .

(b) Écrire la matrice de  $f$  dans cette base.

- (c) On pose  $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$ .  
Établir que  $\mathcal{C} = \text{Vect}(\text{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  et donner la dimension de cet espace.

**Exercice 61** [02620] [Correction]

I) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodique, impaire et vérifiant

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ sur } ]0; \pi].$$

- (a) Justifier que  $f$  est égale à sa somme de Fourier sur  $\mathbb{R}$  et calculer cette dernière.  
(b) En déduire la convergence et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 8n}{n}.$$

II) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que 0 soit la seule valeur propre de  $A$ .

(c) Montrer que

$$A^n = O_n.$$

(d) Calculer

$$\det(A + I_n).$$

(e) Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  commutant avec  $A$ . Calculer

$$\det(A + M).$$

(f) Inversement, quelles sont les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant :

$$\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), AM = MA \implies \det(A + M) = \det M ?.$$

**Exercice 62** [02992] [Correction]

I) Pour  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ .

II) Soit  $n$  un entier naturel et  $E_n$  l'équation  $x + \ln x = n$  d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ .

- (a) Montrer que l'équation  $E_n$  possède une unique solution notée  $x_n$ .  
(b) Étudier la monotonie ainsi de la limite de la suite  $(x_n)$ .  
(c) Déterminer un équivalent simple de  $(x_n)$ .  
(d) Donner un équivalent simple de la suite de terme général  $y_n = x_n - n$ .

**Exercice 63** [03003] [Correction]

I) Calculer  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ .

II) On considère la cardioïde  $\Gamma$  d'équation polaire  $r = 1 + \cos \theta$  et de point courto  $M(\theta)$ .

- (a) Étudier et représenter la courbe  $\Gamma$ .  
(b) Montrer que le milieu  $I(\theta)$  du segment d'extrémités  $M(\theta)$  et  $M(\theta + \pi)$  appartient à un cercle que l'on précisera.  
(c) Calculer la longueur  $I(\theta)M(\theta)$ .  
(d) En déduire un procédé de construction des points de  $\Gamma$ .

**Exercice 64** [02123] [Correction]

I) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

On note  $f^2$  l'endomorphisme  $f \circ f$ .

Montrer l'équivalence  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\} \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .

II) Soient  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . On pose  $h(x) = ax$  pour tout réel  $x$ .

On note  $S$  l'ensemble des fonctions dérivables  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f \circ f = h$ .

- (a) Soit  $f \in S$ . Établir que  $h^{-1} \circ f \circ h = f$ .  
En déduire la valeur de  $f(0)$ .  
(b) Montrer que si  $a < 0$  alors  $S$  est vide.  
(c) On suppose désormais  $a > 0$  (et toujours  $a \neq 1$ ).  
Déterminer une expression de  $f$ ; on commencera par le cas  $0 < a < 1$ .

**Exercice 65** [02621] [Correction]

I) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que la matrice  ${}^tAA$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

II) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

(a) Déterminer un équivalent de

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n.$$

En déduire la limite de

$$\sum_{k=0}^n \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k).$$

(b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

(c) Montrer que

$$nu_n \rightarrow +\infty.$$

En déduire la nature de la série de terme général  $u_n$ .

**Exercice 66** [02993] [Correction]

I) Soit  $(u_n)$  une suite réelle croissante de limite  $\ell$ . On pose  $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ .

(a) Montrer que  $(v_n)$  est croissante.

(b) Établir que  $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$ .

(c) En déduire que  $v_n \rightarrow \ell$ .

II) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

(d) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$  (où  $f^2$  désigne  $f \circ f$ ). Établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^n$  (où  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  avec  $n$  termes).

(e) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ .

Que dire de  $\text{Im } f^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ?

**Exercice 67** [02994] [Correction]

I) Résoudre l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$  d'inconnue la fonction  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable.

II) Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des éléments deux à deux distincts de  $\mathbb{R}$ .

(a) Montrer que l'application  $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  définie par  $\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

(b) Pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on pose  $L_i = \prod_{0 \leq j \neq i \leq n} \left( \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right)$ .

Calculer  $\varphi(L_i)$ .

(c) Que dire de la famille de polynômes  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  ?

Autre démonstration de ce dernier résultat ?

**Exercice 68** [03004] [Correction]

I) Déterminer les fonctions  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables vérifiant

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) - f(x) = \int_0^1 f(t) dt.$$

II) Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(1 + z)^n = \cos(2na) + i \sin(2na)$ .

(b) En déduire la valeur de  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ .

**Exercice 69** [02124] [Correction]

I) Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto \sqrt{1 + e^x}$ .

II) Soit  $F = \frac{1}{X^2+1} \in \mathbb{C}(X)$ .

(a) Former la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$ .

En déduire une expression de la dérivées d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  de  $F$ , notée  $F^{(n)}$ .

(b) Montrer qu'il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  vérifiant  $F^{(n)}(X) = \frac{P_n(X)}{(X^2+1)^{n+1}}$ .

(c) Déterminer les racines de  $P_n$ .

**Exercice 70** [02622] [Correction]

I) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Est-elle inversible ?

(b) Est-elle diagonalisable ?

II) Étudier existence et valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx.$$

**Exercice 71** [02995] [Correction]

I) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f, g$  deux endomorphismes de  $E$ .

(a) Comparer  $\text{Im } f + \text{Im } g$  et  $\text{Im}(f + g)$  d'une part,  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g$  et  $\text{Ker}(f + g)$  d'autre part.

(b) On suppose que  $\text{rg}(f + g) = \text{rg } f + \text{rg } g$ . Établir  $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$  et  $\text{Ker } f + \text{Ker } g = E$

II) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ .

(c) Montrer que  $f$  induit une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $I$  à préciser.

(d) Déterminer, pour  $y \in I$ , une expression de  $f^{-1}(y)$  analogue à celle de  $f(x)$ .

**Exercice 72** [03005] [Correction]

I) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , résoudre l'équation  $z^n + 1 = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

II) a) Étudier la courbe du plan définie par :  $\begin{cases} x = t - \text{th } t \\ y = 1/\text{ch } t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

b) On note  $A$  le point d'intersection de l'axe  $(Ox)$  avec la tangente au point  $M$  de paramètre  $t$  de la courbe ci-dessus.

Calculer la distance  $AM$ .

**Exercice 73** [02125] [Correction]

I) Soit  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Établir  $\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

II) Soit  $n$  un entier naturel.

- (a) Montrer l'existence et l'unicité de  $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant  $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$ .
- (b) Calculer  $a_n^2 - 3b_n^2$ .
- (c) Déterminer la limite de  $\sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 74** [02623] [Correction]

I) Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) (n \geq 3)$  vérifiant

$$\operatorname{rg} A = 2, \operatorname{tr} A = 0 \text{ et } A^n \neq O_n.$$

Justifier que  $A$  est diagonalisable.

II) Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

(a) Montrer que l'application

$$\varphi: r \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$$

est constante.

(b) En déduire la valeur de

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

où  $D$  désigne le disque de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

**Exercice 75** [02624] [Correction]

I) Établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

II) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Déterminer les valeurs propres complexes de  $A$ .  
À quelle matrice diagonale complexe  $D$ , la matrice  $A$  est-elle semblable ?

(b) Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  non nulle vérifiant

$$M^3 + M = O_3.$$

Montrer que  $M$  est semblable à  $D$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

(c) En déduire que  $A$  et  $M$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  puis dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**Exercice 76** [02996] [Correction]

I) Calculer la somme et le produit des racines  $n$ ème de l'unité.

II) On pose  $P_0 = 1$  et  $P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Montrer que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(b) Observer que  $P_n(x) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{Z}$ .

(c) Trouver tous les polynômes  $P$  vérifiant  $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 77** [03006] [Correction]

I) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

(a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .

(b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ .

II) Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  déterminée par  $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3$  et  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(c) Déterminer l'expression du terme général de  $u_n$ .

On se propose de retrouver cette expression de façon matricielle.

(d) On pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Déterminer  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant

$$X_{n+1} = AX_n.$$

(e) En écrivant  $A = I_3 + B$  calculer  $A^n$  puis  $u_n$ .

**Exercice 78** [02126] [Correction]

I) Soient  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$  et pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ . Réduire au même dénominateur la fraction rationnelle  $F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}$ .

II) On pose  $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$ .

(a) Calculer  $u_n + u_{n+2}$ .

- (b) Déterminer limite de la suite  $(u_n)$ .
- (c) Donner un équivalent de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 79** [ 02625 ] [Correction]

I) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  définie par blocs

$$A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer  $A^2$
- (b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , sur  $\mathbb{R}$  ?
- (c) Déterminer les valeurs propres de  $A$  et les dimensions des espaces propres associés.
- II) a) Justifier l'existence de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \text{ (avec } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

(d) Montrer que

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

- (e) Déterminer un équivalent de  $R_n$ .
- (f) Donner la nature de la série de terme général  $R_n$  et  $|R_n|$

**Exercice 80** [ 02997 ] [Correction]

I) Soient  $p$  et  $q$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .  
Établir que  $p$  et  $q$  sont deux projecteurs de même noyau si, et seulement si,  
 $p \circ q = p$  et  $q \circ p = q$ .

II) Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue avec  $a < b$ .

- (a) On suppose que  $\int_a^b f(t) dt = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule au moins une fois.
- (b) On suppose que  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b t f(t) dt = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule au moins deux fois.
- (c) Généraliser !

**Exercice 81** [ 03007 ] [Correction]

I) On note  $E$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ .

- (a) Montrer que l'application  $\Phi$  qui à  $f$  élément de  $E$  associe la fonction  $\Phi(f): x \mapsto x f'(x) - f(x)$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (b) Déterminer le noyau de cet endomorphisme.
- II) Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  deux vecteurs de l'espace géométrique avec  $\vec{a} \neq \vec{0}$ .  
On désire déterminer les vecteurs  $\vec{x}$  tels que  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ .
- (c) Montrer que, si  $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ , il n'y a pas de solution à l'équation précédente.  
On suppose désormais  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- (d) Simplifier  $\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$ .
- (e) Déterminer  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que le vecteur  $\vec{x}_0 = \lambda \vec{a} \wedge \vec{b}$  soit solution de l'équation étudiée.
- (f) Déterminer alors toutes les solutions.

**Exercice 82** [ 02987 ] [Correction]

I) Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue.  
Déterminer la limite quand  $x \rightarrow 0^+$  de  $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

II) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $P_n(X) = \sum_{k=0}^n X^k \in \mathbb{R}[X]$ .

- (a) Simplifier l'expression du polynôme  $(1 - X)P_n(X)$ .
- (b) Factoriser le polynôme  $P_n(X)$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- (c) En déduire la valeur du produit  $\prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ .

**Exercice 83** [ 02627 ] [Correction]

I) Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

II) Soit  $E$  un espace euclidien dont le produit scalaire est noté  $(\cdot | \cdot)$ .  
On considère  $f \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant

$$\forall x \in E, (f(x) | x) = 0.$$

- (a) Quelles sont les valeurs propres réelles possibles pour  $f$  ?
- (b) Établir que pour tout  $x, y \in E$ ,

$$(f(x) | y) = -(x | f(y)).$$

- (c) Quelle relation existe-t-il entre  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$  ?

- (d) Montrer que l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $\text{Im } f$  ne possède pas de valeurs propres réelles.
- (e) En déduire que  $f$  est de rang pair.

**Exercice 84** [ 02998 ] [Correction]

I) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale égaux à 0.

- (a) Exprimer  $A^2$  en fonction de  $A$  et de la matrice identité.
- (b) En déduire que  $A$  est inversible et exprimer son inverse.  
II) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ .
- (c) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- (d) Montrer que  $u_n \rightarrow 1$ .
- (e) Établir, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ .
- (f) En déduire que  $u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Exercice 85** [ 03008 ] [Correction]

I) En calculant sa dérivée, simplifier  $\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

II) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique

$$(e_1, e_2, e_3) \text{ est } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose  $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (1, -1, 0)$  et  $\varepsilon_3 = (1, 0, 1)$ .

- (a) Montrer que la famille  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  constitue une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Écrire la matrice de  $f$  dans cette base.
- (c) Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et de  $\text{Im } f$ .

**Exercice 86** [ 02988 ] [Correction]

I) Calculer pour tout naturel  $n$ ,  $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$ .

II) On définit une suite de polynômes réels  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $P_0 = 2, P_1 = X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ .

- (a) Déterminer le degré de  $P_n$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$

- (c) En déduire une expression simple de  $P_n(2 \cos \theta)$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- (d) Déterminer les racines de  $P_n$ .

**Exercice 87** [ 02628 ] [Correction]

I) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1.

- (a) Montrer que  $A$  est semblable à une matrice dont les  $n - 1$  premières colonnes sont nulles.
- (b) En déduire

$$A^2 = \text{tr}(A).A \text{ et } \det(I_n + A) = 1 + \text{tr } A.$$

II) On note

$$E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$$

et  $\|\cdot\|_\infty$  la norme uniforme sur  $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$$

Pour  $f \in E$ , on pose

$$N(f) = \|3f + f'\|_\infty.$$

- (c) Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .
- (d) Justifier, pour tout  $x \in [0; 1]$  :

$$f(x)e^{3x} = \int_0^x (3f(t) + f'(t))e^{3t} dt.$$

En déduire qu'il existe  $k > 0$  tel que

$$\|\cdot\|_\infty \leq kN.$$

- (e) Les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N$  sont-elles équivalentes sur  $E$ ?

**Exercice 88** [ 02999 ] [Correction]

I) Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$  peut être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

II) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\Delta: \mathbb{R}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  l'application définie par  $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$ .

- (a) Montrer que  $\Delta$  est bien définie et que cette application est linéaire.
- (b) Déterminer le noyau de  $\Delta$ .
- (c) En déduire que cette application est surjective.

**Exercice 89** [03009] [Correction]

I) Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On suppose que  $g \circ f = \tilde{0}$  où  $\tilde{0}$  désigne l'endomorphisme nul.

Montrer que  $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$ .

II) Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sqrt{n + \sqrt{u_{n-1}}}$ .

- (a) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
- (b) Montrer que  $u_n \leq n$  puis que  $u_n = o(n)$ .
- (c) Donner un équivalent simple de  $(u_n)$ .
- (d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{n})$ .

**Exercice 90** [02989] [Correction]

I) Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose  $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que  $I_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

II) Soient  $H$  un hyperplan d'un espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n \geq 2$  et  $u$  un vecteur de  $E$ .

- (a) Montrer que  $H$  et  $D = \text{Vect}(u)$  sont supplémentaires si, et seulement si,  $u \notin H$ .
- (b) Montrer qu'il existe une forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$  vérifiant  $H = \text{Ker } \varphi$ .
- (c) Soit  $\psi$  une forme linéaire vérifiant  $H \subset \text{Ker } \psi$ . Montrer que  $\psi \in \text{Vect}(\varphi)$ .

**Exercice 91** [02629] [Correction]

I) Soient  $n \geq 2$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par

$$f(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$$

où  $\text{tr}$  désigne la forme linéaire trace.

(a) Calculer

$$f \circ f.$$

- (b) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
- (c) Préciser la dimension des sous-espaces propres de  $f$ .
- II) a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer

$$I_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt.$$

(d) La série de terme général  $I_n$  est-elle convergente ?

(e) Exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

**Exercice 92** [00154] [Correction]

I) Soient  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  et  $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1

- (a) Montrer que la fonction  $x \mapsto \det(A + xJ)$  est affine (c'est-à-dire de la forme  $x \mapsto \alpha x + \beta$ )
- (b) On suppose la matrice  $A$  antisymétrique. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A.$$

II) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $2\pi$ -périodique.

(c) Résoudre l'équation différentielle

$$(E): y'' + y = f$$

(on exprimera la solution générale à l'aide d'une intégrale s'exprimant en fonction de  $f$ )

(d) À quelle condition les solutions de  $(E)$  sont-elles  $2\pi$ -périodiques ?

**Exercice 93** [00156] [Correction]

I) Déterminer en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

II) Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ ,  $a$  un vecteur unitaire de  $E$  et  $k$  un réel,  $k \neq -1$ .

(a) Montrer que la relation

$$f(x) = x + k(x|a)a$$

définit un endomorphisme symétrique  $f$  sur  $E$ .

- (b) Montrer que  $f$  est un automorphisme.
- (c) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .

**Exercice 94** [00162] [Correction]

I) Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$  périodique définie par

$$\forall x \in ]-\pi; \pi], f(x) = e^x.$$

- (a) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de  $f$ .
- (b) En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

II) Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et

$$B = \frac{1}{2}({}^t A + A).$$

- (c) Justifier que la matrice  $B$  est diagonalisable.
- (d) On note  $\alpha$  la plus petite valeur propre de  $B$  et  $\beta$  sa plus grande. Établir que pour toute colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  :

$$\alpha {}^t X X \leq {}^t X B X \leq \beta {}^t X X.$$

- (e) En déduire

$$\text{Sp } A \subset [\alpha; \beta].$$

**Exercice 95** [01657] [Correction]

I) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on pose

$$P_k = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

Montrer que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

II) On pose, pour  $x \in [0; 1]$ ,

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

- (a) Justifier l'existence et la continuité de la fonction  $\psi$ .
- (b) Justifier

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \frac{n^2}{n^2 - 1}.$$

- (c) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \psi(x) dx.$$

**Exercice 96** [01669] [Correction]

I)  $\alpha$  désigne un réel de l'intervalle  $]0; \pi[$  et  $f$  la fonction  $2\pi$  périodique définie sur  $] -\pi; \pi]$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Calculer la série de Fourier de  $f$  et préciser sa convergence.
- (b) Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}.$$

II) Soient  $n \geq 2$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\det(A + X) = \det A + \det X.$$

- (a) Montrer que  $\det A = 0$ .
- (b) Justifier qu'il existe  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  et  $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  vérifiant

$$A = Q^{-1} J_r P \text{ avec } J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r, n-r} \\ O_{n-r, r} & O_{n-r, n-r} \end{pmatrix}.$$

- (c) Conclure que

$$A = O_n.$$

**Exercice 97** [01721] [Correction]

I) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

II) On pose

$$z: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t^2} dt.$$

- (a) Montrer que la fonction  $z$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Montrer

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x).$$

- (c) En déduire l'expression de  $z(x)$  sachant

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



**Exercice 98** [ 01740 ] [Correction]

I) Étudier l'existence de l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x(x-1)} dx.$$

II) a) Tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

b) Soit  $M$  un point de cette courbe autre que  $O$ . On note  $P$  l'intersection de la droite  $(OM)$  avec la droite d'équation  $x = 1$  et  $Q$  le point de l'axe  $(Oy)$  de même ordonnée que  $P$ .

Montrer que le triangle  $(MPQ)$  est rectangle en  $M$ .

c) En déduire un procédé permettant de construire la courbe étudiée.

**Exercice 99** [ 01958 ] [Correction]

I) Soient  $n \geq 2$  et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

(b) Existe-t-il  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $B^2 = A$  ?

II) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Donner le rayon de convergence  $R$  et la somme de

$$\sum \cos(n\alpha)x^n$$

pour  $x \in ]-R; R[$ .

**Exercice 100** [ 00706 ] [Correction]

I) Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

On pourra réaliser une comparaison avec une intégrale.

II) Soient  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

(a) À quelle condition la matrice  $A$  est-elle inversible ?

(b) Donner son inverse quand cela est possible.

**Exercice 101** [ 01955 ] [Correction]

I) La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  ? sur  $\mathbb{R}$  ?

II) Soit  $(a_n)$  une suite réelle bornée.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n.$$

On pose donc, pour  $t$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

(b) Montrer que si  $x > 1$  alors

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}.$$

**Exercice 102** [ 03388 ] [Correction]

I) Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[; \mathbb{R})$ .

On suppose que les fonctions  $f$  et  $f'$  sont intégrables sur  $[0; +\infty[$ .

Montrer que  $f(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

II) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  possédant exactement  $n$  valeurs propres distinctes.

(a) Déterminer la dimension des sous-espaces propres de  $f$ .

(b) Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$g^2 = f.$$

Montrer que  $g$  et  $f$  commutent.

En déduire que les vecteurs propres de  $f$  sont aussi vecteurs propres de  $g$ .

(c) Combien y a-t-il d'endomorphismes  $g$  de  $E$  solutions de l'équation

$$g^2 = f.$$

**Exercice 103** [ 03389 ] [Correction]

I) Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose que la matrice  $A$  est nilpotente et que la matrice  $B$  commute avec  $A$ . Que dire de  $\text{tr}(AB)$  ?

II) Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]0; 1[$ , on pose

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1}.$$

(a) Montrer que les fonctions  $f_n$  sont intégrables sur  $]0; 1[$ . On pose

$$J_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

(b) Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

(c) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , calculer

$$J_k - J_{k+1}.$$

(d) Montrer que

$$J_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

**Exercice 104** [ 03390 ] [Correction]

I) a) Montrer que la fonction

$$f: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en 0.

II) Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

(a) Montrer

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g \iff E = \text{Im } f + \text{Ker } g.$$

(b) Montrer

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } g = \{0\}.$$

**Exercice 105** [ 03395 ] [Correction]

I) Donner en fonction du paramètre  $\lambda$  l'allure de la quadrique déterminée par l'équation

$$xy + yz + zx = \lambda.$$

II) Soient  $a \in ]0; 1[$  et  $f: [a; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(1) \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1 + x^n}.$$

(a) Étudier la limite

$$u_n = \int_a^1 f_n(t) dt.$$

(b) Établir

$$v_n = \int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt \sim \frac{\ln 2}{n} f(1).$$

**Exercice 106** [ 03397 ] [Correction]

I) a) Déterminer un équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$  de

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

b) Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n$  ?

II) 3205 Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$u^3 + u = 0.$$

(a) Montrer que l'espace  $\text{Im } u$  est stable par  $u$ .

(b) Soit  $v$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $\text{Im } u$ .

Montrer que  $v$  est un isomorphisme et déterminer  $v^{-1}$ .

(c) En déduire que le rang de l'endomorphisme  $u$  est un entier pair.

**Exercice 107** [ 03399 ] [Correction]

I) Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est diagonalisable et trouver une matrice  $P$  inversible telle que  ${}^tPAP$  soit diagonale.

II) On étudie l'équation différentielle

$$(E): (1 - x^2)y'' - 3xy' - y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(a) Vérifier que l'application

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

est solution de l'équation homogène associée à  $(E)$ .

(b) Résoudre  $(E)$ .

**Exercice 108** [ 03801 ] [Correction]

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n > 1$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent d'ordre  $n$ .

On note

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}.$$

(a) Montrer que  $\mathcal{C}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

(b) Soit  $a$  un vecteur de  $E$  tel que  $f^{n-1}(a) \neq 0_E$ .

Montrer que la famille  $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$  constitue une base de  $E$ .

(c) Soit  $\varphi_a: \mathcal{C}(f) \rightarrow E$  l'application définie par  $\varphi_a(g) = g(a)$ .

Montrer que  $\varphi_a$  est un isomorphisme.

(d) En déduire que

$$\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1}).$$

**Exercice 109** [ 02242 ] [Correction]

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives  $n$  et  $p$  avec  $n > p$ .

On considère  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  vérifiant

$$u \circ v = \text{Id}_F.$$

(a) Montrer que  $v \circ u$  est un projecteur.

(b) Déterminer son rang, son image et son noyau.

**Exercice 110** [ 03771 ] [Correction]

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $E$

Soit  $A$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  s'annulant sur  $W$ .

(a) Montrer que  $A$  est un espace vectoriel.

(b) Trouver la dimension de  $A$ .

**Exercice 111** [ 02616 ] [Correction]

Soit  $f$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA).$$

Montrer que  $f$  est proportionnelle à la trace.

**Exercice 112** [ 00077 ] [Correction]

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}.$$

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

(a) Par sommation géométrique

$$S_n = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right)$$

donc

$$|S_n| \leq \left| \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}.$$

(b) On a

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n(n+1)} - S_0 + \frac{S_N}{N+1}.$$

Or

$$\frac{S_N}{N+1} \rightarrow 0 \text{ et}$$

$\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la suite des sommes partielles de la série de terme général  $u_n$  converge.

(c) On a

$$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

donc

$$|u_n| \geq \frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \frac{1}{2n}.$$

Si  $\theta = 0 \pmod{\pi}$  alors  $|u_n| \geq \frac{1}{n}$  et donc  $\sum |u_n|$  diverge.

Si  $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$  alors par ce qui précède la série  $\sum \frac{\cos(2n\theta)}{n}$  converge et puisque la série de terme général  $\frac{1}{n}$  diverge, par opérations, la série de terme général  $|u_n|$  diverge.

### Exercice 2 : [énoncé]

On sait  $\cos(n\pi + x) = (-1)^n \cos(x)$  pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

Par le développement limité

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$$

on écrit

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Sachant  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ , on obtient

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Enfin, le développement <sup>1</sup> limité  $\sin(u) = u + o(u^2)$  donne

$$u_n = \underbrace{(-1)^n \frac{\pi}{3n}}_{=a_n} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=b_n}$$

Le terme général  $a_n$  est alterné et général décroît vers 0 en valeur absolue, la série  $\sum a_n$  est donc convergente.

Le terme général  $b_n$  est dominé<sup>2</sup> par  $1/n^2$  et la série  $\sum b_n$  est donc absolument convergente.

Par opérations, la série  $\sum u_n$  converge.

### Exercice 3 : [énoncé]

- Pour chaque valeur de  $x$  considérée, la fonction intégrée est définie et continue sur le segment d'extrémités  $x$  et  $x^2$ .
- Pour  $x > 1$  et pour tout  $t \in [x; x^2]$ ,  $x \leq t \leq x^2$  et  $\ln t > 0$  donne par intégration en bon ordre

$$\int_x^{x^2} \frac{x \, dt}{t \ln t} \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \, dt}{t \ln t}.$$

<sup>2</sup> On peut aussi dire qu'il est négligeable devant  $1/n^{1.1}$  mais lui appliquer le critère spécial n'est pas possible à cause du terme  $o(1/n^2)$  qui empêche l'étude de monotonie.

Puisque

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \left[ \ln|\ln t| \right]_x^{x^2} = \ln 2$$

on obtient

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ln 2.$$

(c) Pour  $x < 1$ , on a cette fois-ci  $x^2 \leq x$  et  $\ln t < 0$ .

En adaptant ce qui précède, on obtient cette fois-ci  $x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$  d'où l'on conclut

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ln 2.$$

(d) On introduit  $H$  primitive de  $t \mapsto 1/\ln t$  sur  $]0; 1[$  ou  $]1; +\infty[$ .

On peut alors écrire  $f(x) = H(x^2) - H(x)$  d'où l'on tire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$  avec

$$f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

(e) La dérivée de  $f$  converge en 1 donc par le théorème du prolongement  $\mathcal{C}^1$ , on peut affirmer que le prolongement par continuité de  $f$  en 1, encore noté  $f$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

La dérivée de  $f$  est évidemment de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ .

Au voisinage de 1, la dérivée de  $f$  est l'inverse de  $\frac{\ln x}{x-1}$ .

En posant  $x = 1 + h$ , on a

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{h} \ln(1+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n h^n}{n+1}$$

pour  $|h| < 1$ .

Ainsi  $\frac{1}{f'(x)}$  est au voisinage de 1 une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ne s'annulant pas et donc  $f'(x)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 1.

**Exercice 4 : [énoncé]**

(a) On a pour  $t > 0$

$$\frac{\sin t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt}$$

$t \mapsto \sin t \cdot e^{-nt}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  et

$$\int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-nt} dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

est le terme général d'une série convergente donc  $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt = \text{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)t} dt = \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

(b)  $b_n = 0$  et

$$a_n = \frac{(-1)^n (e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(n^2 + 1)}.$$

(c) La fonction  $f$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

On peut appliquer le théorème de convergence normale et en déduire

$$\forall t \in [-\pi; \pi], \text{ch } t = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} + \frac{2 \text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos(nt).$$

Pour  $t = \pi$ , on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}.$$

**Exercice 5 : [énoncé]**

(a) La fonction

$$f: t \mapsto \frac{t - [t]}{t(t+n)}$$

est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

Quand  $t \rightarrow 0^+$ ,

$$f(t) = \frac{t}{t(t+n)} = \frac{1}{t+n} \rightarrow \frac{1}{n}.$$

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$f(t) = \frac{O(1)}{t(t+n)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On en déduit que  $f$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

(b) On remarque que

$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+n} \right)$$

et on en déduit

$$\int_0^A \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt = \frac{1}{n} \int_0^A \frac{t - [t]}{t} - \frac{t - [t]}{t+n} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient

$$\int_0^A \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt = \frac{1}{n} \left( \int_0^A \frac{t - [t]}{t} dt - \int_n^{A+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right).$$

Enfin par la relation de Chasles

$$\int_0^A \frac{t - [t]}{t(t+n)} dt = \frac{1}{n} \left( \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_A^{A+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right).$$

Puisque

$$0 \leq \int_A^{A+n} \frac{t - [t]}{t} dt \leq \frac{1}{A} \int_A^{A+n} t - [t] dt \leq \frac{n}{A}$$

on obtient quand  $A \rightarrow +\infty$

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt.$$

(c)

$$v_n = \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt.$$

Par suite

$$v_n - v_{n-1} = \int_{n-1}^n \frac{t - [t]}{t} dt = \int_0^1 \frac{u}{u + (n-1)} du$$

puis

$$v_n - v_{n-1} = 1 - (n-1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right).$$

Par développement limité, on obtient

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série de terme général

$$v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(d) Posons

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} \right).$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \left( v_k - v_{k-1} - \frac{1}{2k} \right) = S + o(1)$$

donc

$$v_n - v_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = S + o(1).$$

Sachant

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on obtient

$$v_n \sim \frac{\ln n}{2}$$

puis

$$u_n \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

### Exercice 6 : [énoncé]

(a) La fonction  $t \mapsto \sin(t)/t$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ . On peut la prolonger par continuité en 0 en y posant la valeur 1. Par intégration par parties où l'on intègre l'expression  $\sin t$  en  $1 - \cos t$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$\frac{1 - \cos x}{x} \rightarrow 0$$

et

$$\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

cette dernière intégrale étant convergente car la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et est dominée par la fonction intégrable  $t \mapsto 1/t^2$  en  $+\infty$ .

(b) Soit  $F$  la primitive s'annulant en 0 du prolongement par continuité de  $t \mapsto \sin(t)/t$ . On a

$$f(x) = \lim_{+\infty} F - F(x).$$

Puisque la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $f$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = -F'(x) = -\frac{\sin x}{x}.$$

(c) Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) dt = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t) dt = xf(x) + \int_0^x \sin t dt.$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[ -\frac{\cos t}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

donc

$$xf(x) = \cos x - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

puis

$$\int_0^x f(t) dt = 1 - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Mais par intégration par parties on établit encore

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = \left[ \frac{\sin t}{t^2} \right]_x^{+\infty} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt$$

avec

$$\left| \int_x^{+\infty} 2 \frac{\sin t}{t^3} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{2 dt}{t^3} = \frac{1}{x^2}$$

ce qui permet d'affirmer

$$x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

**Exercice 7 : [énoncé]**

(a)  $f: t \mapsto \frac{\sin^3(t)}{t^2}$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .  
Quand  $t \rightarrow 0$ ,  $f(t) \rightarrow 0$  et quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $f(t) = O(1/t^2)$ .

On en déduit que  $f$  est intégrable sur  $I$  ce qui assure l'existence de  $I$ .

(b) On a  $\sin(3t) = 3 \sin(t) - 4 \sin^3(t)$  donc

$$4I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{3 \sin(t) - \sin(3t)}{t^2} dt.$$

Par convergence des intégrales écrites, on a

$$4I(x) = 3 \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt.$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt = 3 \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

donc

$$I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

(c)  $I = \lim_{x \rightarrow 0} I(x)$ . Or  $\sin(t) = t + t^2 \varepsilon(t)$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$  donc

$$\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \ln(3) + \int_x^{3x} \varepsilon(t) dt.$$

Puisque  $\int_x^{3x} \varepsilon(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on obtient

$$I = \frac{3}{4} \ln(3).$$

**Exercice 8 : [énoncé]**

La fonction  $f: t \mapsto \ln(1 + t^2/t^2)$  est définie et continue sur  $I = ]0; +\infty[$ .

On a

$$\sqrt{t}f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc  $f$  est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Par intégration par parties justifiée par la convergence des deux intégrales écrites

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \left[ t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{1 + t^2} = \pi.$$

**Exercice 9 :** [\[énoncé\]](#)

L'intégrale est bien définie et détermine la primitive  $F$  s'annulant en 0 de la fonction continue définie sur  $\mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{3 + \cos^2 x}.$$

Le calcul de l'intégrale par le changement de variable proposé n'est possible que sur l'intervalle  $I = ]-\pi/2; \pi/2[$ .

BOF Pour calculer, l'intégrale on est tenté de procéder au changement de variable  $u = \tan t$  mais celui-ci n'est possible que pour  $x \in ]-\pi/2; \pi/2[$  et alors

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{du}{(4 + 3u^2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan x\right).$$

Par continuité

$$F(\pi/2) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad F(-\pi/2) = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

Puisque la fonction intégrée est  $\pi$ -périodique, on a

$$F(x + \pi) - F(x) = C^{te}$$

avec

$$C^{te} = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

On peut alors calculer  $F(x)$  en commençant par déterminer  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$x + k\pi \in ]-\pi/2; \pi/2]$$

puis en exploitant

$$F(x) = F(x + k\pi) - \frac{k\pi}{2\sqrt{3}}$$

avec

$$F(x + k\pi) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan x\right).$$

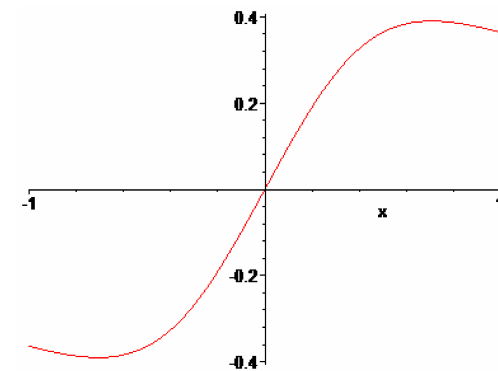
**Exercice 10 :** [\[énoncé\]](#)

Posons

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

On a

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$



ce qui assure que  $F$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Le changement de variable  $t = -u$  assure que  $F$  est impaire.

Par dérivation de primitive

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + (2x)^2 + (2x)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}}.$$

En réduisant au même dénominateur et en multipliant par la quantité conjuguée,  $F'(x)$  est du signe de

$$4(1 + x^2 + x^4) - (1 + (2x)^2 + (2x)^4) = 3(1 - 4x^4)$$

$F$  est donc croissante que  $[0; 1/\sqrt{2}]$  puis décroissante sur  $[1/\sqrt{2}; +\infty[$

En 0, le graphe de la fonction passe par l'origine avec une tangente d'équation  $y = x$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$0 \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}} \rightarrow 0$$

et donc  $F$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

**Exercice 11 :** [\[énoncé\]](#)

(a)

$$f: t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3 - 1}} = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t^2 + t + 1)}}$$



est définie et continue sur  $]1; x]$  et

$$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{t-1}}$$

donc  $F(x)$  existe.

$F$  est primitive de la fonction continue  $f$  sur  $]1; +\infty[$  donc  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $F'(x) = f(x)$ .

Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $F$  est finalement  $\mathcal{C}^\infty$  et sur  $]1; +\infty[$

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}$$

(b)  $F$  est continue en 1 et  $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$ . Tangente verticale en 1.

(c)  $\sqrt{t^3-1} \leq t^{3/2}$  donc

$$F(x) \geq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc  $F(x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$ .

(d)  $F$  est continue et strictement croissante sur  $]1; +\infty[$  donc  $F$  réalise une bijection de  $]1; +\infty[$  sur  $]0; +\infty[$ .

$F$  réalise une bijection de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $]1; +\infty[$  sur  $]0; +\infty[$  avec  $F'(x) \neq 0$  donc  $F^{-1}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$ .

$$(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}} = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3-1}}{F^{-1}}$$

donc  $F^{-1}$  est solution de l'équation différentielle considérée.

(e)  $F^{-1}$  est continue en 0 et  $F^{-1}(0) = 1$ . En vertu de la relation

$$(F^{-1})' = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3-1}}{F^{-1}}$$

on obtient

$$(F^{-1})'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$F^{-1}$  est donc dérivable en 0 et  $(F^{-1})'(0) = 0$ .

**Exercice 12 :** [\[énoncé\]](#)

La division euclidienne de  $n$  par  $k$  s'écrit

$$n = \lfloor n/k \rfloor k + r(k)$$

et donc

$$n - r(k) = k \lfloor n/k \rfloor$$

puis

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

ce qui fait penser à une somme de Riemann associée à la fonction  $f: t \mapsto t \lfloor 1/t \rfloor$  définie et continue par morceaux sur  $]0; 1]$ . Bien qu'elle soit prolongeable par continuité en 0, ce prolongement n'est pas continue par morceaux sur  $[0; 1]$  (il n'existe pas de subdivision finie du segment  $[0; 1]$  qui soit adaptée) et l'on ne peut donc pas employer directement le théorème du cours relatif aux sommes de Riemann : cela va nous obliger à un petit découpage...

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On peut écrire

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/N \rfloor} \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/N \rfloor + 1}^n \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

D'une part

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/N \rfloor} \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/N \rfloor} 1 \leq \frac{\lfloor n/N \rfloor}{n} \leq \frac{1}{N}$$

et d'autre part, par les sommes de Riemann

$$\frac{1}{n - \lfloor n/N \rfloor} \sum_{k=\lfloor n/N \rfloor + 1}^n \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{1/N}^1 t \lfloor 1/t \rfloor dt.$$

Par le changement de variable  $u = 1/t$

$$\int_{1/N}^1 t \lfloor 1/t \rfloor dt = \int_1^N \frac{\lfloor u \rfloor}{u^3} du = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{k}{u^3} du$$

puis

$$\int_{1/N}^1 t \lfloor 1/t \rfloor dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2}$$

et l'on remarque que

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{12}.$$

En choisissant  $N$  assez grand pour que  $1/N \leq \varepsilon$  et  $\frac{1}{2} \sum_{k=N+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \varepsilon$ , on a

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + \frac{n - \lfloor n/N \rfloor}{n} \left( \frac{1}{n - \lfloor n/N \rfloor} \sum_{k=\lfloor n/N+1 \rfloor}^N \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \frac{\pi^2}{12} \right) + \frac{\lfloor n/N \rfloor}{n} \frac{\pi^2}{12}.$$

Puis pour  $n$  assez grand

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + \frac{n - \lfloor n/N \rfloor}{n} \left( \sum_{k=N+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \varepsilon \right) + \frac{\lfloor n/N \rfloor}{n} \frac{\pi^2}{12}$$

ce qui donne

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon \frac{\pi^2}{12}.$$

Finalement  $v_n \rightarrow \pi^2/12$  puis  $u_n \rightarrow 1 - \pi^2/12$

**Exercice 13 :** [\[énoncé\]](#)

Posons  $u_n : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

- (a) Par le critère spécial,  $\sum u_n(x)$  converge pour chaque  $x > 0$ .  
Il y a convergence simple de la série de fonctions définissant  $F$ .
- (b) Les fonctions  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour  $n \geq 1$

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

On a

$$\|u'_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}.$$

Il y a convergence normale  $\sum u'_n$  pour  $n \geq 1$ .  
Il y a donc convergence uniforme de  $\sum u'_n$  (pour  $n \geq 0$ ) et l'on peut donc conclure que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
De la même manière, on obtient  $F$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

- (c) Par décalage d'indice

$$F(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

et donc

$$F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}.$$

- (d) Posons

$$G(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

L'intégrale est bien définie pour  $x > 0$  et l'on remarque

$$G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}.$$

Posons  $H = F - G$ . La fonction  $H$  est 2-périodique, montrons qu'elle tend vers 0 en  $+\infty$ .

Par application du critère spécial, on a

$$\forall x > 0, F(x) \geq 0$$

donc

$$0 \leq F(x) \leq F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et par encadrement  $F$  tend vers 0 en  $+\infty$ .  
Le même raisonnement se transpose à  $G$ .  
On peut conclure que  $H$  tend vers 0 en  $+\infty$  puis finalement  $H$  est nulle.

- (e) Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $F(x+1) \rightarrow F(1)$  par continuité et donc

$$F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On vérifie aisément que  $F$  est décroissante et puisque

$$\frac{1}{x} = F(x) + F(x+1) \leq 2F(x) \leq F(x) + F(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

on obtient

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

**Exercice 14 :** [\[énoncé\]](#)

- (a) Posons

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Les fonctions  $u_n$  sont définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .  
La série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  car  $u_n(x) \sim 1/n^2$ .  
On a

$$u'_n(x) = \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}$$

donc sur  $[-a; a]$ ,

$$\|u'_n\|_\infty \leq \frac{2a}{n^4}$$

et la série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement et donc uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

On peut conclure que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(b) La fonction  $t \mapsto 1/(t^2 + x^2)$  est décroissante donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

(c) On peut écrire

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{1 + x^2/n^2} \right) = \frac{1}{n^2} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n^4} \frac{x^4}{n^2 + x^2}$$

et par convergence des sommes introduites

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^4} + x^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)}.$$

Or

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} < +\infty$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} x^2 + O(x^4).$$

**Exercice 15 :** [énoncé]

- (a) Tout endomorphisme sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.
- (b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ .  $E_\lambda(u)$  est un sous-espace vectoriel stable par  $v$  (car  $u \circ v = v \circ u$ ) et l'endomorphisme induit par  $v$  sur  $E_\lambda(u)$  admet au moins une valeur propre. Un vecteur propre associé à celle-ci est vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

**Exercice 16 :** [énoncé]

Le polynôme

$$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X - 2)^2$$

est annulateur de  $M$ .

On en déduit  $\text{Sp } M \subset \{0, 2\}$  et  $M$  trigonalisable (car  $M$  annule un polynôme scindé).

Par suite  $\text{tr } M$  est la somme des valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité et puisque  $\text{tr } M = 0$ , seule 0 est valeur propre de  $M$ .

On en déduit que la matrice  $M - 2I_n$  est inversible et puisque

$$M(M - 2I_n)^2 = O_n$$

on obtient

$$M = O_n.$$

**Exercice 17 :** [énoncé]

Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $u \in E$ . Étudions l'équation  $f(u) = \lambda u$ . On a

$$f(u) = \lambda u \iff \begin{cases} (1 - \lambda)u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (2\lambda - 1)u_n = u_{n-1}. \end{cases}$$

Cas  $\lambda = 1$

$$f(u) = u \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1}.$$

On en déduit que 1 est valeur propre de  $f$  et que le sous-espace propre associé est formé des suites constantes.

Cas  $\lambda \neq 1$

$$f(u) = \lambda u \iff \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (2\lambda - 1)u_n = u_{n-1}. \end{cases}$$

Que  $\lambda = 1/2$  ou non, on obtient

$$f(u) = \lambda u \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

et donc  $\lambda$  n'est pas valeur propre.

Finalement

$$\text{Sp } f = \{1\}.$$

**Exercice 18 :** [énoncé]

- (a) Puisque  $p^4 = p^2$ , une valeur propre  $\lambda$  doit vérifier  $\lambda^4 = \lambda^2$  donc  $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ .

- (b) Si  $p$  est diagonalisable alors sa matrice  $A$  dans une base de vecteurs propres sera diagonale avec des  $-1, 0$  ou  $1$  sur la diagonale. Comme alors  $A^3 = A$  on a  $p^3 = p$ .  
Si  $p^3 = p$  alors  $p$  est annulé par un polynôme scindé à racines simples donc  $p$  est diagonalisable.

**Exercice 19 :** [énoncé]

- (a) oui  
(b) Pour  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  
Si  $\text{Im } f \subset \text{Im } p$  et  $\text{Ker } p \subset \text{Ker } f$  alors  $\mathcal{F}(f) = f$ .  
Un tel endomorphisme  $f$  est entièrement déterminé par sa restriction de  $\text{Im } p$  vers  $\text{Im } p$ .  
On en déduit

$$\dim E_1(\mathcal{F}) \geq (\dim \text{Im } p)^2.$$

Si  $\text{Im } f \subset \text{Ker } p$  et  $\text{Im } p \subset \text{Ker } f$  alors  $\mathcal{F}(f) = 0$ .  
Un tel endomorphisme  $f$  est entièrement déterminé par sa restriction de  $\text{Ker } p$  vers  $\text{Ker } p$ .  
On en déduit

$$\dim E_0(\mathcal{F}) \geq (\dim \text{Ker } p)^2.$$

Si  $\text{Im } f \subset \text{Im } p$  et  $\text{Im } p \subset \text{Ker } f$  alors  $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2}f$ .  
Un tel endomorphisme  $f$  est entièrement déterminé par sa restriction de  $\text{Ker } p$  vers  $\text{Im } p$ .  
Si  $\text{Im } f \subset \text{Ker } p$  et  $\text{Ker } p \subset \text{Ker } f$  alors  $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2}f$ .  
Un tel endomorphisme  $f$  est entièrement déterminé par sa restriction de  $\text{Im } p$  vers  $\text{Ker } p$ .  
De plus un endomorphisme appartenant à ces deux dernières catégories est nécessairement nul.  
On en déduit

$$\dim E_{1/2}(\mathcal{F}) \geq 2 \dim \text{Ker } p \times \dim \text{Im } p.$$

Or

$$(\dim \text{Im } p)^2 + 2 \dim \text{Ker } p \dim \text{Im } p + (\dim \text{Ker } p)^2 = (\dim \text{Im } p + \dim \text{Ker } p)^2 = \dim E^2 = \dim \mathcal{L}(E)$$

donc  $\mathcal{F}$  est diagonalisable avec

- (c)  $\dim E_1(\mathcal{F}) = (\dim \text{Im } p)^2$ ,  $\dim E_0(\mathcal{F}) = (\dim \text{Ker } p)^2$  et  $\dim E_{1/2}(\mathcal{F}) = 2 \dim \text{Ker } p \times \dim \text{Im } p$ .

**Exercice 20 :** [énoncé]

$A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  semblable à une matrice  $D = \text{diag}(-I_p, -jI_q, -j^2I_q)$  donc

$$\text{tr } A = \text{tr } D = -p - q(j + j^2) = q - p \in \mathbb{Z}.$$

**Exercice 21 :** [énoncé]

Sur  $\mathbb{C}$ ,  $A$  est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire supérieure ou sur la diagonale figurent les valeurs propres complexes de  $A$  comptées avec multiplicité.

**Exercice 22 :** [énoncé]

$\text{tr } A \neq \text{tr } B$  dont  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

**Exercice 23 :** [énoncé]

- (a) On peut écrire  $B = P^{-1}CP$  avec  $P$  inversible et alors

$$xI_n - B = P^{-1}(xI_n - C)P$$

ainsi que

$$(xI_n - B)^{-1} = P(xI_n - C)^{-1}P^{-1}$$

sous réserve d'inversibilité.

- (b) La matrice  $A$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Quitte à considérer une matrice semblable, on peut supposer  $A$  triangulaire supérieure (ce qui n'affecte ni le calcul de la trace, ni celui du polynôme caractéristique  $P_A$ ). En écrivant

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on obtient

$$(xI_n - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{x-\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(xI_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-\lambda_k} = \frac{P'_A(x)}{P_A(x)}$$

car

$$P_A(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k).$$

**Exercice 24 : [énoncé]**

(a) Par récurrence

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

puis on étend par linéarité.

(b) Si  $M$  est diagonalisable alors  $M$  annule un polynôme scindé simple  $P$  et les calculs précédents montrent que  $A$  annule aussi ce polynôme. Par suite  $A$  est diagonalisable. De plus  $A$  annule aussi le polynôme  $XP'$  de sorte que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $A$  est racine commune de  $P$  et de  $XP'$ . Or  $P$  n'a que des racines simples donc  $P$  et  $P'$  n'ont pas de racines communes d'où  $\lambda = 0$ .  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) = \{0\}$  donne  $A = 0$ . Ainsi  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A = 0$ .

**Exercice 25 : [énoncé]**Soit  $M$  solution.

Puisque le corps de base est  $\mathbb{C}$ , la matrice  $M$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure où figure sur la diagonale les valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité.

Puisque  $\text{tr}(M) = n$ , la somme des valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité vaut  $n$ .

Or les valeurs propres de  $M$  sont racines du polynôme  $X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$ , elle ne peuvent donc qu'être  $0, 1, j$  ou  $j^2$ . Notons  $p, q, r$  et  $s$  les multiplicités de chacune; on a  $\text{tr} M = q + rj + sj^2 = n$ . Puisque les parties réelles de  $j$  et  $j^2$  valent  $-1/2$ , la seule possibilité est que  $q = n, r = s = 0$  et alors  $p = 0$ .

En particulier  $0$  n'est pas valeur propre de  $M$  et donc  $M$  est inversible.

La relation  $M^5 = M^2$  donne alors  $M^3 = I_n$  et donc  $M$  est diagonalisable puisque  $M$  annule un polynôme scindé simple. Finalement  $M$  est semblable à  $I_n$  donc égale  $I_n$  car sa seule valeur propre est  $1$ .

Inversement, la matrice  $I_n$  est solution.

**Exercice 26 : [énoncé]**

(a) On a

$$\phi^3(f) = p^3 \circ f \circ s^3 = p \circ f \circ s = \phi(f).$$

L'endomorphisme  $\phi$  annule le polynôme  $X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$ .

Ce polynôme étant scindé simple, l'endomorphisme  $\phi$  est diagonalisable.

(b) Les valeurs propres possibles de  $\phi$  sont  $0, 1, -1$ .

En raisonnant dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ , les matrices de  $p$  et  $s$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$$

avec  $r = \dim F$  et  $s = \dim G$ . La matrice de  $f$  sera dans une même décomposition par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

et par calcul la matrice de  $\phi(f)$  sera

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est alors facile de résoudre les équations  $\phi(f) = \lambda f$  pour  $\lambda = 0, 1, -1$ . On obtient

$$E_0(\phi) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im } f \subset G\}.$$

$$E_1(\phi) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid G \subset \text{Ker } f \text{ et } \text{Im } f \subset F\}$$

et

$$E_{-1}(\phi) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid F \subset \text{Ker } f \text{ et } \text{Im } f \subset G\}.$$

**Exercice 27 : [énoncé]**

En passant en coordonnées polaires

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r + r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta = \pi.$$

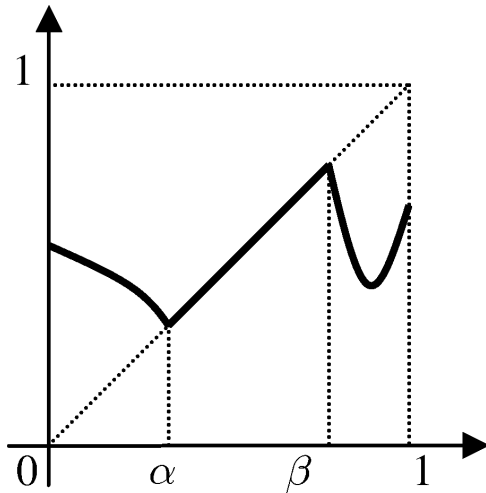
Le résultat se comprend car les aires positives, compensant les négatives, on a

$$\iint_D xy \, dx \, dy = 0.$$

**Exercice 28 : [énoncé]**

(a) Notons

$$A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}.$$



On a évidemment  $A \subset \text{Im } f$ , mais inversement, pour  $x \in \text{Im } f$ , on peut écrire  $x = f(a)$  et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x.$$

Ainsi  $\text{Im } f \subset A$ , puis, par double inclusion,  $A = \text{Im } f$ .

On en déduit que  $A$  est un segment de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[\alpha; \beta]$  car image d'un compact par une fonction réelle continue.

(b) Une fonction  $f$  d'allure suivante convient

(c) Soit  $f$  solution dérivable.

Si  $\alpha = \beta$  alors  $f$  est constante égale à cette valeur commune.

Si  $\alpha < \beta$  alors  $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$  car  $f(x) = x$  sur  $[\alpha; \beta]$ .

Par suite, si  $\alpha > 0$ ,  $f$  prend des valeurs strictement inférieures à  $\alpha$  ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit  $\alpha = 0$ .

De même on obtient  $\beta = 1$  et on conclut  $f: x \in [0; 1] \mapsto x$ .

**Exercice 29 : [énoncé]**

(a) Soit  $x \in \text{Ker } u^*$ . Pour tout  $y \in \text{Im } u$ , on peut écrire  $y = u(a)$  et

$$(x|y) = (u^*(x)|a) = (0|a) = 0 \text{ donc } \text{Ker } u^* \subset \text{Im } u^\perp.$$

Soit  $x \in \text{Im } u^\perp$ ,  $\forall a \in E$ ,  $(u^*(x)|a) = (x|u(a)) = 0$  donc  $u^*(x) = 0$  d'où

$$\text{Im } u^\perp \subset \text{Ker } u^*.$$

Puisque  $u^{**} = u$  on a aussi  $\text{Im } u^{*\perp} = \text{Ker } u$  d'où  $\text{Im } u^* = \text{Ker } u^\perp$ .

**Exercice 30 : [énoncé]**

Evidemment

$$\text{Ker}(u + u^*) \supset \text{Ker } u \cap \text{Ker } u^*.$$

Inversement, soit  $x \in \text{Ker}(u + u^*)$ . On a  $u(x) + u^*(x) = 0$  donc  $u(u^*(x)) = 0$  et  $u^*(x) \in \text{Ker } u$  or  $u^*(x) \in \text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$  donc  $u^*(x) = 0$  puis aussi  $u(x) = 0$  et donc  $x \in \text{Ker } u \cap \text{Ker } u^*$ .

On peut conclure quant à l'égalité demandée.

**Exercice 31 : [énoncé]**

(a) Pour tout  $x, y \in E$ ,

$$(f(x)|y) = \sum_{k=1}^n (e_k|x)(e_k|y) = (x|f(y))$$

donc l'endomorphisme  $f$  est symétrique. De plus

$$(f(x)|x) = \sum_{k=1}^n (e_k|x)^2 \geq 0$$

et si  $(f(x)|x) = 0$  alors

$$\forall 1 \leq k \leq n, (e_k|x) = 0$$

et donc  $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{0_E\}$ .

Ainsi l'endomorphisme  $f$  est symétrique défini positif.

(b) Puisque l'endomorphisme  $f$  est symétrique et défini positif, il existe une base orthonormée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Les  $\lambda_i$  étant les valeurs propres de  $f$ , ce sont des réels strictement positifs car si  $x_i$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  alors

$$(f(x_i)|x_i) > 0 \implies \lambda_i > 0.$$

L'endomorphisme  $g$  représenté dans cette base par la matrice ci-dessous est alors solution

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1/\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

(c) Introduisons les vecteurs  $u_j$  tels que  $f(u_j) = e_j$ . Puisque l'endomorphisme  $g$  est symétrique

$$(g(e_i)|g(e_j)) = (e_i|g^2(e_j)) = (e_i|f^{-1}(e_j)) = (e_i|u_j).$$

Or  $f(u_j) = e_j$  donne

$$\sum_{k=1}^n (e_k|u_j)e_k = e_j$$

et puisque la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, on peut affirmer en identifiant les scalaires

$$\forall 1 \leq k \leq n, (e_k|u_j) = \delta_{j,k}.$$

On en déduit

$$(g(e_i)|g(e_j)) = (e_i|u_j) = \delta_{i,j}.$$

Enfin, un argument de dimension assure que la famille  $(g(e_1), \dots, g(e_n))$  est évidemment une base.

**Exercice 32 : [énoncé]**

Commençons par noter que  $f$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R = 1$  et est donc définie sur  $] -1; 1[$ . Pour  $x \in [0; 1[$ , la fonction  $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$  est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} x^{t^2} dt \leq x^{n^2} \leq \int_{n-1}^n x^{t^2} dt.$$

En sommant

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x} dt \text{ avec } \ln x < 0.$$

Posons le changement de variable  $u = t\sqrt{|\ln x|}$

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x} dt = \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Or  $\ln x \sim x - 1$  quand  $x \rightarrow 1$  donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

**Exercice 33 : [énoncé]**

(a) Sachant  $1 - \alpha^k x \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$ , on peut affirmer que pour  $N$  assez grand

$$\forall k \geq N, 1 - \alpha^k x > 0.$$

Considérons alors la suite définie par la portion de produit au-delà du rang  $N$

$$\left( \prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}.$$

On a

$$\ln \left( \prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right) = \sum_{k=N}^n \ln(1 - \alpha^k x)$$

avec  $\ln(1 - \alpha^k x) = O(\alpha^k)$ . La série de terme général  $\alpha^k$  est absolument convergente et donc, par comparaison, la série  $\sum \ln(1 - \alpha^k x)$  est aussi absolument convergente. On en déduit la convergence de la suite

$$\left( \sum_{k=N}^n \ln(1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}$$

puis, en composant avec la fonction exponentielle, la convergence de la suite

$$\left( \prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}.$$

Enfin, en tenant compte de la portion initiale du produit définissant  $P_n(x)$ , on obtient la convergence de la suite  $(P_n(x))$

(b) Si  $f$  est solution de (E) alors

$$f(x) = (1 - \alpha x)f(\alpha x) = (1 - \alpha x)(1 - \alpha^2 x)f(\alpha^2 x) = \dots$$

Par récurrence, on obtient

$$f(x) = \prod_{k=0}^n (1 - \alpha^k x)f(\alpha^{n+1}x) = P_n(x)f(\alpha^{n+1}x).$$

Quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $f(\alpha^{n+1}x) \rightarrow f(0)$  car  $f$  est continue et donc

$$f(x) = f(0) \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - \alpha^k x) = f(0)P(x).$$

- (c) Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R = +\infty$ .  
La somme de cette série entière est solution de (E) si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \alpha^{n-1} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ceci équivaut à

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}.$$

Inversement, considérons alors la série entière  $\sum a_n x^n$  avec

$$a_n = \prod_{k=1}^n \left( \frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1} \right)$$

de sorte que

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}.$$

Cette série entière est de rayon de convergence  $R = +\infty$  car

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} \rightarrow 0$$

et l'étude qui précède assure que sa somme  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est solution de (E) prenant la valeur 1 en 0.

En vertu de la question précédente, on peut affirmer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n \frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1} \right) x^n = P(x).$$

**Exercice 34 :** [\[énoncé\]](#)

- (a) Par intégration par parties

$$I(p, q) = \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1)$$

puis

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

- (b)

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ et } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \rightarrow \frac{1}{4} < 1$$

donc  $\sum u_n$  converge.

- (c) Par le calcul ci-dessus  $R = 4$  donc  $] -4; 4[ \subset \mathcal{D} \subset [-4; 4]$ .

Par la formule de Stirling :

$$u_n \sim \frac{2\pi n^{2n+1}}{e^{2n}} \frac{e^{2n+1}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{(2n+1)}} = \frac{\sqrt{2\pi}e}{\sqrt{2n+1}} \frac{1}{2^{2n+1}} \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1}$$

et

$$\left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1} = \exp \left( (2n+1) \ln \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) \right) \rightarrow \frac{1}{e}$$

donc

$$u_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} \sqrt{n}}$$

$4^n u_n \sim \sqrt{\pi}/2\sqrt{n}$  et par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum 4^n u_n$  diverge.  $4 \notin \mathcal{D}$ .

$v_n = (-4)^n u_n$ ,  $(v_n)$  est alternée,  $|v_n| \rightarrow 0$  et

$$\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$$

donc  $(|v_n|)$  est décroissante.

Par application du critère spécial des séries alternées,  $\sum v_n$  converge et donc  $-4 \in \mathcal{D}$ . Finalement  $\mathcal{D} = [-4; 4[$ .

**Exercice 35 :** [\[énoncé\]](#)

- (a) Par convergence dominée par la fonction  $\varphi: t \mapsto 1$ , on obtient  $a_n \rightarrow 0$ .

- (b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)' (\tan t)^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

- (c) Par monotonie  $a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2}$ . On en déduit

$$a_n \sim \frac{1}{2n}.$$

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est donc égale à 1.



Pour  $x = 1$ ,  $\sum a_n$  diverge en vertu de l'équivalent précédent et par comparaison de séries à termes positifs.

Pour  $x = -1$ ,  $\sum (-1)^n a_n$  en vertu du critère spécial des séries alternées, la suite  $(a_n)$  étant notamment décroissante.

Ainsi la fonction  $f$  est définie sur  $[-1; 1[$ .

(d) Puisque  $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ , on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2}x^{n+1} + a_nx^{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

pour  $x \in [-1; 1[$ . Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2}x^{n+1} + a_nx^{n+1}) = \frac{1}{x} (f(x) - a_0 - a_1x) + xf(x)$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} x - x \ln(1-x) \right)$$

pour  $x \neq 0$  et aussi pour  $x = 0$  par continuité.

On peut aussi procéder à une permutation somme intégrale pour parvenir à

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1-x \tan t}.$$

**Exercice 36 : [énoncé]**

Posons  $u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ .

(a) Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto u(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$  et négligeable devant  $1/t^2$  en  $+\infty$  donc intégrable sur  $[0; +\infty[$ . La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

(b) La fonction  $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$  et  $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $x \in [0; +\infty[$ ,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2}$$

avec  $t \mapsto te^{-t^2}$  intégrable sur  $[0; +\infty[$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences,

$$f'(x) = \left[ \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} xe^{-t^2} \cos(xt) dt = -\frac{1}{2} xf(x)$$

$f$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et  $f(0) = \sqrt{\pi}/2$  on conclut

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

(c) On peut écrire

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2} dt.$$

Posons  $u_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2}$ .

Les fonctions  $u_n$  sont continues par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .

La série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction  $t \mapsto e^{-t^2} \cos(xt)$  elle aussi continue par morceaux.

Les fonctions  $u_n$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt.$$

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{2n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{2(n-1)} e^{-t^2} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Cette quantité étant sommable, on peut intégrer terme à terme et on retrouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

**Exercice 37 : [énoncé]**

(a) On a

$$|I_n - 1| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donc  $I_n \rightarrow \ell = 1$ .

(b) Par intégration par parties

$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \int_0^1 t^n dt \rightarrow 0$$

donc

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(c) On a

$$\ln(1+t^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}.$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on obtient la relation proposée.

(d) On a

$$n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

donc

$$n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalement

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice 38 : [énoncé]**

Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns) ds.$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \rightarrow \ell.$$

**Exercice 39 : [énoncé]**

Les intégrales considérées sont bien définies.

Par intégration par parties,

$$I_n(m) = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^m \right]_0^1 - \frac{m}{n+1} I_n(m-1).$$

Ainsi

$$I_n(m) = \frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}} m!$$

En particulier

$$I_n(n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} n!$$

b)  $x^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n$ .

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_n(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

**Exercice 40 : [énoncé]**

(a) Posons

$$\varphi: t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}.$$

La fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant  $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ . Par domination, on obtient que  $F$  est définie sur

$I = \mathbb{R}$ .

(b) Posons  $f(x, t) = \varphi(t) \cos(xt)$ .  
 $f$  admet une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -(e^{-t} - e^{-2t}) \sin(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$  et  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t} + e^{-2t} = \psi(t)$  avec  $\psi$  intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

On en déduit que  $F$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -(e^{-t} - e^{-2t}) \sin(xt) dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(xt) dt = \text{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{(-a+ix)t} dt \right) = \frac{x}{a^2 + x^2}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4 + x^2}{1 + x^2} \right) + C^{te}.$$

Montrons que  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Par intégration par parties

$$F(x) = \left[ \varphi(t) \frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \sin(xt) dt.$$

On en déduit

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par suite  $C^{te} = 0$  puis

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{4 + x^2}{1 + x^2}.$$

**Exercice 41 :** [énoncé]

(a) Par convergence dominée  $I_n \rightarrow 0$ .

(b) Par intégration par parties avec convergence du crochet

$$I_n = \left[ \frac{t}{(1+t^3)^n} \right]_0^{+\infty} + 3n \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt = I_n - I_{n+1}.$$

On en déduit la relation demandée.

(c) La suite  $(u_n)$  a la nature de la série de terme général  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .  
 Or

$$v_n = \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( 1 - \frac{1}{3n} \right) = \frac{\alpha - 1/3}{n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

La série de terme général  $v_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha = 1/3$ .

(d) Puisque  $\ln(n^{1/3} I_n) \rightarrow \ell$ , on obtient

$$I_n \sim \frac{e^\ell}{\sqrt[3]{n}}$$

et donc

$$\frac{1}{n} I_n = O \left( \frac{1}{n^{4/3}} \right).$$

Par suite  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} I_n$  converge.

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \text{ avec } f_n(t) = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n}.$$

Les fonctions  $f_n$  sont continues par morceaux sur  $]0; +\infty[$ , la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]0; +\infty[$  et sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n} = -\ln \left( 1 - \frac{1}{1+t^3} \right)$$

est continue par morceaux.

Enfin, la série de terme général  $\int_0^{+\infty} |f_n|$  converge.

On peut donc permuter somme et intégrale pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_n = - \int_0^{+\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{1+t^3} \right) dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi$$

la dernière intégrale étant calculer par intégration par parties puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**Exercice 42 :** [énoncé]

Si  $X \in \text{Ker } A$  alors  $X \in \text{Ker } {}^tAA$ .

Inversement, si  $X \in \text{Ker } {}^tAA$  alors  ${}^tAAX = 0$  donc  ${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = 0$  d'où  $AX = 0$  puis  $X \in \text{Ker } A$ .

Ainsi

$$\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker } A$$

puis par la formule du rang

$$\text{rg}({}^tAA) = \text{rg } A.$$

**Exercice 43 :** [énoncé]

$A$  est diagonalisable car symétrique et ses valeurs propres sont nulles car racines de  $X^n$ . On en déduit que  $A$  est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle.

**Exercice 44 :** [énoncé]

On peut écrire  $A = {}^tPDP$  avec  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_k \geq 0$ . On a alors

$${}^tXAX = {}^tYDY \text{ avec } Y = PX.$$

et alors

$${}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

**Exercice 45 :** [énoncé]

(a) Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,

$$(x|f(\lambda y + \mu z)) = -(f(x)|\lambda y + \mu z) = -\lambda(f(x)|y) - \mu(f(x)|z).$$

Ainsi

$$(x|f(\lambda y + \mu z)) = (x|\lambda f(y) + \mu f(z)).$$

Or ceci valant pour tout  $x$ , on peut affirmer la linéarité de  $f$ .

(b) Notons  $A = (a_{i,j})$  la matrice de  $f$  dans une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

On a  $a_{i,j} = (e_i|f(e_j))$  et l'antisymétrie de  $f$  donne alors  $a_{i,j} = -a_{j,i}$  d'où  ${}^tA = -A$ .

(c) D'une part  ${}^t\bar{X}AX = \lambda {}^t\bar{X}X$  et d'autre part  ${}^t\bar{X}AX = -{}^t\bar{X}{}^tAX = -{}^t(\bar{A}\bar{X})X = -\bar{\lambda} {}^t\bar{X}X$ .

Puisque  ${}^t\bar{X}X$  est un réel non nul (car  $X \neq 0$ ), on obtient  $\lambda = -\bar{\lambda}$  et donc  $\lambda \in i\mathbb{R}$ .

(d) Un endomorphisme antisymétrique est représenté par une matrice  $A$  antisymétrique réelle. Celle-ci est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et est donc semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire supérieure où figure sur la diagonale ses valeurs propres complexes comptées avec multiplicité. Le déterminant de  $f$  est donc le produit des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité de la matrice  $A$ , or cette dernière est réelle donc ses valeurs propres complexes sont deux à deux conjuguées et de plus ses valeurs propres sont imaginaires pures. Ainsi le déterminant de  $f$  est le produit d'éventuels 0 et de termes  $i\lambda$  et  $-i\lambda$ ; cela donne un réel positif.

**Exercice 46 :** [énoncé]

D'une part

$${}^t(\bar{\Omega}\bar{X})\Omega X = {}^t\bar{X}{}^t\Omega\Omega X = {}^t\bar{X}X$$

et d'autre part

$${}^t(\bar{\Omega}\bar{X})\Omega X = {}^t(\bar{\lambda}\bar{X})\lambda X = |\lambda|^2 {}^t\bar{X}X.$$

Puisque  ${}^t\bar{X}X$  est un réel non nul, on en déduit  $|\lambda| = 1$ .

**Exercice 47 :** [énoncé]

(a) En décomposant  $x$  et  $y$  on observe

$$(p(x)|y) = (p(x)|p(y)) = (x|p(y)).$$

(b) Pour  $x, y \in E$ ,

$$(p(q(p(x)))|y) = (q(p(x))|p(y)) = \dots = (x|p(q(p(x)))).$$

(c)  $(\text{Im } p + \text{Ker } q)^\perp = (\text{Im } p)^\perp \cap (\text{Ker } q)^\perp = \text{Ker } p \cap \text{Im } q$ .

(d)  $p \circ q \circ p$  est autoadjoint donc diagonalisable. De plus  $\text{Im } p$  est stable par  $p \circ q \circ p$  donc il existe donc une base  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $\text{Im } p$  diagonalisant l'endomorphisme induit par  $p \circ q \circ p$ . On a alors  $(p \circ q \circ p)(e_i) = \lambda_i e_i$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . Or  $e_i \in \text{Im } p$  donc  $p(e_i) = e_i$  puis

$$(p \circ q)(e_i) = \lambda_i e_i.$$

On complète cette famille de vecteurs propres de  $p \circ q$  par des éléments de  $\text{Ker } q$  pour former une base de  $\text{Im } p + \text{Ker } q$ . Sur ces vecteurs complétant,  $q$  est nul donc  $p \circ q$  aussi.

Enfin, on complète cette dernière famille par des éléments de  $\text{Im } q \cap \text{Ker } p$  pour former une base de  $E$ . Sur ces vecteurs complétant,  $p \circ q$  est nul car ces vecteurs sont invariants par  $q$  et annule  $p$ . Au final, on a formé une base diagonalisant  $p \circ q$ .

**Exercice 48 :** [\[énoncé\]](#)

(a) La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t) dt.$$

Puisque la fonction  $q$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$  et puisque  $f$  est bornée, on peut affirmer que la fonction  $qf$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ . Par suite l'intégrale de l'expression précédente de  $f'(x)$  converge quand  $x \rightarrow +\infty$ . On en déduit que  $f'$  converge en  $+\infty$ .

Posons  $\ell$  sa limite.

Si  $\ell > 0$  alors il existe  $A$  assez grand tel que pour tout  $x \geq A$  on a  $f'(x) \geq \ell/2$ . On a alors

$$f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t) dt \geq f(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse  $f$  bornée.

De même,  $\ell < 0$  est absurde et il reste donc  $\ell = 0$ .

(b) En dérivant

$$w' = f''g + f'g' - f'g' - f''g = 0$$

car  $f$  et  $g$  sont solutions de  $(E)$ .

On en déduit que le wronskien  $w$  est constant et puisque les fonctions  $f$  et  $g$  sont bornées, leurs dérivées  $f'$  et  $g'$  convergent vers 0 en  $+\infty$  et donc  $w \xrightarrow{+\infty} 0$ .

Ainsi le wronskien  $w$  est constant égal à 0 et donc les fonctions  $f$  et  $g$  sont liées.

On en déduit que l'équation différentielle  $E$  possède une solution non bornée.

**Exercice 49 :** [\[énoncé\]](#)

La courbe est la juxtaposition des courbes d'équations polaires

$$r = \sqrt{\cos(2\theta)} \text{ et } r = -\sqrt{\cos(2\theta)}.$$

Celles-ci se déduisent l'une de l'autre par une symétrie de centre  $O$ .

Nous allons étudier la première et, comme celle-ci s'avérera symétrique de centre  $O$ , on obtiendra directement l'intégralité de la courbe voulue.

$r: \theta \mapsto r(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$  est définie et continue sur les intervalles  $[-\pi/4; \pi/4] + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

La fonction  $r$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur les intervalles  $]-\pi/4; \pi/4[ + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

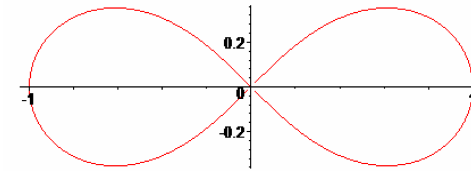


FIGURE 1 – Lemniscate de Bernoulli

$r(\theta + \pi) = r(\theta)$  donc  $M(\theta + \pi)$  est l'image du point  $M(\theta)$  par la symétrie de centre  $O$ .

$r(-\theta) = r(\theta)$  donc  $M(-\theta)$  est l'image du point  $M(\theta)$  par la symétrie d'axe  $(Ox)$ . On peut limiter l'étude à l'intervalle  $[0; \pi/4]$ . La courbe obtenue sera complétée par les symétries de centre  $O$  et d'axe  $(Ox)$ .

On a le tableau de variation

$\theta$	0	$\pi/4$
$r(\theta)$	1	0

Étude en  $\theta = 0$ .

$r(0) = 1$  et  $r'(0) = 0$ .

Il y a une tangente orthoradiale.

Étude en  $\theta = \pi/4$ .

$r(\pi/4) = 0$ , il s'agit d'un passage par l'origine.

$\theta$	$\pi/4$
$r(\theta)$	0

Il y a une demi-tangente en  $M(\pi/4) = O$  qui est la droite d'équation polaire  $\theta = \pi/4$ .

```
plot([sqrt(cos(2*t)), t, t=0..2*Pi], coords=polar, numpoints=200, xtickmarks=3, ytickmarks=3);
```

**Exercice 50 :** [\[énoncé\]](#)

(a) La fonction  $f$  est évidemment continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

En passant en coordonnées polaires

$$f(x, y) \underset{(x,y) \rightarrow 0}{\sim} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r(|\cos \theta| + |\sin \theta|)} \rightarrow 0 = f(0, 0)$$

car le facteur

$$\frac{\cos \theta \times \sin \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|}$$

est bornée en tant que fonction continue et  $2\pi$ -périodique.  
La fonction  $f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

(b) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0.$$

Or pour  $x, y > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y \cos(xy)(x+y) - \sin(xy)}{(x+y)^2}$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, t) = \frac{2t^2 \cos(t^2) - \sin(t^2)}{(2t)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}.$$

La fonction  $f$  n'est donc pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 51 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 52 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 53 :** [\[énoncé\]](#)

II) a)

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \left( 1 + \frac{a-b}{n} \right) \sim \frac{a-b}{n}$$

est le terme général d'une série divergeant vers  $-\infty$ . Par suite  $\ln u_n \rightarrow -\infty$  et donc  $u_n \rightarrow 0$ .

b)

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{a-b}{n} \right) = \frac{\alpha + a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc pour  $\alpha = b - a$ , la série des  $\ln v_{n+1} - \ln v_n$  converge. Par suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $A > 0$  et alors  $u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}}$ .

c) Par intégration par parties,

$$u_{n+1} = \frac{n+1/2}{n+1} u_n$$

donc  $u_n \sim \frac{A}{\sqrt{n}}$  puis par équivalence de séries à termes positifs,  $\sum u_n$  diverge.

**Exercice 54 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 55 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 56 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 57 :** [\[énoncé\]](#)

I) a) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange entre  $x$  et  $x+h$  :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2$$

ce qui donne

$$h|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2} h^2$$

b) La valeur en  $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$  donne  $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ .

II) a) Les colonnes de  $A$  sont proportionnelles à une même colonne, la ligne  ${}^t Y$  permet d'exprimer cette proportionnalité.

b)  $A^2 = X({}^t Y X){}^t Y = \lambda X {}^t Y = \lambda A$  avec  $\lambda = {}^t Y X = \text{tr}({}^t Y X) = \text{tr}(X {}^t Y) = \text{tr} A$ .

c) Si  $\text{tr} A \neq 0$  alors  $A$  annule un polynôme scindé simple et donc  $A$  est diagonalisable.

Si  $\text{tr} A = 0$  alors  $A^2 = 0$  et seule 0 est valeur propre de  $A$ . Si la matrice  $A$  était diagonalisable, elle serait semblable à  $O_n$  ce qui est exclu car  $\text{rg} A = 1$ .

**Exercice 58 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 59 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 60 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 61 :** [\[énoncé\]](#)

I) a)  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et régularisée donc développable en série de Fourier.  $a_n = 0$  et par intégration par parties  $b_n = \frac{1}{n}$ .

Le développement en série de Fourier de  $f$  s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

b) Pour  $x = 8$ , on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 8n}{n} = f(8) = f(8 - 2\pi) = \frac{3\pi - 8}{2}.$$

II) a)  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte  $T$ .

b) On peut écrire  $A = PTP^{-1}$  donc

$$\det(A + I_n) = \det(T + I_n) = 1$$

c) On a

$$\det(A + M) = \det(M) \det(AM^{-1} + I_n).$$

Puisque  $(AM^{-1})^n = A^n M^{-n} = O_n$ , 0 est la seule valeur propre de  $AM^{-1}$  et par l'étude qui précède

$$\det(A + M) = \det M$$

d) Si  $A$  est solution alors pour tout  $\lambda \neq 0$ ,  $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$  donc 0 est seule valeur propre de  $A$ .

**Exercice 62 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 63 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 64 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 65 :** [\[énoncé\]](#)

I)  ${}^tAA$  est symétrique réelle et  ${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)AX \in \mathbb{R}_+$  donc  ${}^tAA$  est une matrice symétrique positive.

II) a)

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{2n+1}{2n+2} = \ln \left( 1 - \frac{1}{2n+2} \right) \sim -\frac{1}{2n}.$$

La série  $\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n$  tend vers  $-\infty$ .

b) Par télescopage  $\ln u_n \rightarrow -\infty$  puis  $u_n \rightarrow 0$ .

b)

$$\ln(n+1)u_{n+1} - \ln nu_n = \ln \left( \frac{2n+1}{2n} \right) \sim \frac{1}{2n}.$$

La série  $\sum \ln(n+1)u_{n+1} - \ln nu_n$  tend vers  $+\infty$  donc  $\ln nu_n \rightarrow +\infty$  puis  $nu_n \rightarrow +\infty$ .

À partir d'un certain rang  $nu_n \geq 1$  donc  $\sum u_n$  diverge.

**Exercice 66 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 67 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 68 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 69 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 70 :** [\[énoncé\]](#)

I) a) Si  $a = 0$  alors  $\text{rg } M = 2$  et sinon  $\text{rg } M = 3$  et dans ce cas  $M$  est inversible.

b)  $\chi_M = -(X-1)(X-2)(X-a)$ .

Si  $a \neq 1, 2$  alors  $M$  est diagonalisable (3 valeurs propres distinctes).

Si  $a = 1$  alors  $M$  n'est pas diagonalisable  $\text{cardim } E_1(M) = 1 < 2 = m_1(M)$ .

Si  $a = 2$  alors  $M$  est diagonalisable  $\text{cardim } E_1(M) + \text{dim } E_2(M) = 3$ .

II) La fonction

$$f: x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$$

est définie et continue sur  $]0; 1[$ .

Quand  $x \rightarrow 0^+$  :  $f(x) \sim \frac{-x^2}{x^2} = -1$  ce qui permet de prolonger  $f$  par continuité en 1.

Quand  $x \rightarrow 1^-$  :  $x = 1 - h$  avec  $h \rightarrow 0^+$  et

$$\sqrt{1-x}f(x) = \sqrt{h} \frac{\ln(2h-h^2)}{(1-h^2)} \sim \sqrt{h} \ln h \rightarrow 0.$$

Nous allons calculer l'intégrale en procédant par intégration par parties.

Le plus simple est d'opérer sur  $[a; b] \subset ]0; 1[$  puis de faire  $a \rightarrow 0^+$  et  $b \rightarrow 1^-$ .

On peut aussi procéder directement en primitivant  $\frac{1}{x^2}$  en  $\frac{x-1}{x}$  qui s'annule en 1.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = \left[ \ln(1-x^2) \frac{x-1}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{(1-x^2)} \frac{x-1}{x} dx$$

puis

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = - \int_0^1 \frac{2}{(1+x)} dx = -2 \ln 2.$$

**Exercice 71 :** [énoncé]

**Exercice 72 :** [énoncé]

**Exercice 73 :** [énoncé]

**Exercice 74 :** [énoncé]

I)  $\dim \text{Ker } A = n - 2$  donc 0 est valeur propre de  $A$  de multiplicité au moins  $n - 2$ . Puisque  $\chi_A$  est scindé, la trace de  $A$  est la somme des valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

Si 0 est la seule valeur propre de  $A$  alors  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et alors  $A^n = O_n$  ce qui est exclu.

Sinon  $A$  possède alors une autre valeur propre, puis deux car la somme des valeurs propres est nulle.

Par suite la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $A$  est au moins  $n$  et donc  $A$  est diagonalisable.

II) a) La fonction  $(r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \times [0; 2\pi]$ .

Par intégration sur un segment,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) dt.$$

Ainsi  $r\varphi'(r) = 0$  donc  $\varphi'(r) = 0$  pour  $r \neq 0$  puis pour  $r = 0$  par continuité.

Ainsi la fonction  $\varphi$  est constante égale à

$$\varphi(0) = 2\pi f(0, 0)$$

b) En passant aux coordonnées polaires

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) r dt \right) dr = \pi R^2 f(0, 0).$$

**Exercice 75 :** [énoncé]

I) Pour tout  $t > 0$ , on a

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

donc

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t).$$

Or

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

donc  $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

II) a)  $\chi_A = -X(X - i)(X + i)$ ,  $\text{Sp } A = \{0, i, -i\}$ .

$A$  est diagonalisable semblable à  $D = \text{diag}(0, i, -i)$ .

b)  $X^3 + X$  est annulateur de  $M$  donc  $\text{Sp } M \subset \{0, i, -i\}$ .

$X^3 + X$  est scindé simple donc  $M$  est diagonalisable.

Puisque  $M$  est réelle,  $\text{Sp } M = \{0\}, \{i, -i\}$  ou  $\{0, i, -i\}$ .

Les deux premiers cas sont à exclure et il reste donc  $\text{Sp } M = \{0, i, -i\}$ .

On en déduit que  $M$  est semblable à  $D$ .

c) Par transitivité, on en déduit que  $A$  et  $M$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  i.e. qu'il existe  $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$  vérifiant  $PA = MP$ .

En écrivant  $P = Q + iR$  avec  $Q, R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on a  $QA = MQ$  et  $RA = MR$ .

Puisque la fonction  $t \mapsto \det(Q + tR)$  est polynomiale non nulle (notamment en  $t = i$ ), il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $P' = Q + tR \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  et  $P'A = MP'$ .

On peut alors conclure que  $A$  et  $M$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**Exercice 76 :** [énoncé]

**Exercice 77 :** [énoncé]

**Exercice 78 :** [énoncé]



**Exercice 79 : [énoncé]**I) a)  $A^2 = -I_{2n}$ .b)  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  est annulateur de  $A$  et scindé simple donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .Cependant  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  car sans valeurs propres réelles.Puisque  $A$  est réelle, ses valeurs propres complexes sont deux à deux conjuguées et deux valeurs propres conjuguées ont même multiplicité. Puisque les valeurs propres figurent parmi les racines de  $X^2 + 1$  et que la matrice complexe  $A$  possède au moins une valeur propre, on peut affirmer que  $i$  et  $-i$  sont les deux seules valeurs propres de  $A$ , qu'elles sont de multiplicité  $n$ . Enfin les sous-espaces propres associés sont de dimension  $n$  car  $A$  est diagonalisable et donc les dimensions des sous-espaces propres égales la multiplicité des valeurs propres respectives.

II) a) On applique le critère spécial.

b) On a

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

c) Puisque

$$R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

on obtient

$$2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

Par le critère spécial

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

d) Comme

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

la série  $\sum R_n$  est convergente.En revanche, la série  $\sum |R_n|$  est divergente.**Exercice 80 : [énoncé]****Exercice 81 : [énoncé]****Exercice 82 : [énoncé]****Exercice 83 : [énoncé]**I) Clairement  $R = 1$ . Posons

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

On a

$$(xS(x))' = \frac{1}{1-x^2}$$

donc

$$S(x) = \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

en prenant soin d'étudier les valeurs en 0 du premier membre et du prolongement par continuité du second.

II) a) Si  $f(x) = \lambda x$  alors  $(f(x)|x) = 0$  donne  $\lambda \|x\|^2 = 0$ .0 est seule valeur propre possible pour  $f$ .b)  $(f(x+y)|x+y) = 0$ , or

$$(f(x+y)|x+y) = (f(x)|x) + (f(y)|y) + (f(x)|y) + (f(y)|x) = (f(x)|y) + (f(y)|x).$$

On en déduit

$$(f(x)|y) = -(x|f(y))$$

c) Si  $x \in \text{Ker } f$  alors  $\forall y \in E, (x|f(y)) = -(f(x)|y) = 0$  donc  $x \in (\text{Im } f)^\perp$ . Ainsi  $\text{Ker } f \subset (\text{Im } f)^\perp$ .

De plus par le théorème du rang il y égalité des dimensions donc

$$\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$$

d) Puisque  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ , l'endomorphisme induit  $f|_{\text{Im } f}$  est bijectif et donc 0 n'est pas valeur propre de  $f|_{\text{Im } f}$ . $f|_{\text{Im } f}$  n'a pas de valeurs propres réelles.e) En dimension impaire tout endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel admet au moins une valeur propre réelle donc  $\dim \text{Im } f$  est paire.**Exercice 84 : [énoncé]**

**Exercice 85 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 86 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 87 :** [\[énoncé\]](#)

I) a) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$ . On a

$$\text{rg } f = \text{rg } A = 1$$

et donc par la formule du rang

$$\dim \text{Ker } f = n - 1.$$

Si  $\mathcal{B}$  est une base adaptée à  $\text{Ker } f$ , la matrice de  $f$  dans cette base a ses  $n - 1$  premières colonnes nulles.

b) On peut écrire  $A = PBP^{-1}$  avec  $P$  matrice inversible et  $B$  une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\lambda = \text{tr } B = \text{tr } A.$$

Puisque  $B^2 = \lambda B$ , on a

$$P^{-1}A^2P = \text{tr}(A).P^{-1}AP$$

puis

$$A^2 = \text{tr}(A).A.$$

Puisque  $\det(I_n + B) = 1 + \lambda$ , on a

$$\det(P^{-1}) \det(I_n + A) \det P = 1 + \text{tr } A$$

puis

$$\det(I_n + A) = 1 + \text{tr } A.$$

II) a) Ok

b) On a

$$\int_0^x (3f(t) + f'(t))e^{3t} dt = \left[ (f(t)e^{3t})' \right]_0^x = f(x)e^{3x} - f(0) = f(x)e^{3x}.$$

Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $|f(x)| \leq e^{-3x} \int_0^x N(f)e^{3t} dt \leq xN(f) \leq N(f)$  donc  $\|f\|_\infty \leq N(f)$ .

c) Pour  $f(x) = x^n$ ,  $\|f\|_\infty = 1$  et  $N(f) = 3 + n \rightarrow +\infty$ .

Les normes  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont donc pas équivalentes.

**Exercice 88 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 89 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 90 :** [\[énoncé\]](#)

**Exercice 91 :** [\[énoncé\]](#)

I)

(a)  $f \circ f(M) = \text{tr}(A)(\text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A) - \text{tr}(\text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A)A = \text{tr}(A)f(M)$ .  
Ainsi  $f \circ f = \text{tr}(A).f$ .

(b) Si  $\text{tr } A \neq 0$  alors l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable car annule un polynôme scindé simple.

Si  $\text{tr } A = 0$  alors les valeurs propres de  $f$  figurent parmi les racines du polynôme  $X^2$  et donc  $f$  est diagonalisable si, et seulement si,  $f = \tilde{0}$  ce qui correspond au cas  $A = O_n$ .

(c) Si  $\text{tr}(M) = 0$  alors  $f(M) = \text{tr}(A)M$ . Pour  $M$  matrice de l'hyperplan des matrices de trace nulle,  $f(M) = \lambda M$  avec  $\lambda = \text{tr}(A)$ . On en déduit que  $\text{tr}(A)$  est valeur propre de  $M$  et le sous-espace propre associé est de dimension au moins  $n^2 - 1$ .

Dans le cas où  $\text{tr}(A) = 0$  avec  $A \neq O_n$ , l'endomorphisme n'est pas diagonalisable et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre  $\text{tr}(A)$  est  $n^2 - 1$ .

Dans le cas où  $\text{tr}(A) \neq 0$  alors  $f$  est diagonalisable et donc la dimension des sous-espaces propres des valeurs propres 0 et  $\text{tr}(A)$  sont respectivement 1 et  $n^2 - 1$ .

II) Par intégrations par parties successives,

$$I_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

La série de terme général  $I_n$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1-t(1-t)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**Exercice 92 :** [énoncé]

I) En retranchant la première ligne aux autres lignes, le déterminant de la matrice  $A + xJ$  apparaît comme le déterminant d'une matrice où figurent des  $x$  seulement sur la première ligne. En développant selon cette ligne, on obtient que  $\det(A + xJ)$  est une fonction affine de la variable  $x$ .

De plus

$$\det(A - xJ) = \det(-{}^tA - xJ) = (-1)^{2n} \det({}^tA + xJ)$$

et puisque la matrice  $J$  est symétrique

$$\det(A - xJ) = \det({}^tA + x{}^tJ) = \det(A + xJ).$$

La fonction affine  $x \mapsto \det(A - xJ)$  est donc une fonction paire et par conséquent c'est une fonction constante. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det(A + 0.J) = \det A.$$

II) a) Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation  $y'' + y = f$  est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x - t) dt$$

b) Cette solution est  $2\pi$ -périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t) \sin(x - t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x - t) dt.$$

i.e.

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x - t) dt = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille (sin, cos) ainsi que la  $2\pi$ -périodicité de  $f$ , cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt = 0.$$

**Exercice 93 :** [énoncé]

I) La condition  $\alpha > 0$  est nécessaire pour qu'il n'y ait pas divergence grossière.

Pour  $\alpha > 0$ ,

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

La série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est convergente et la série de terme général

$$\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

est convergente si, et seulement si,  $\alpha > 1/2$ .

Finalement la série initiale converge si, et seulement si,  $\alpha > 1/2$ .

II) a)  $f$  est évidemment un endomorphisme de  $E$  et pour  $x, y \in E$ ,

$$(f(x)|y) = (x|y) + k(x|a)(y|a) = (x|f(y)).$$

Ainsi  $f$  est autoadjoint (et donc diagonalisable dans une base orthonormée).

b) Si  $f(x) = 0$  alors  $x + k(x|a)a = 0$  et donc  $x \in \text{Vect } a$ .

Or  $f(a) = (1 + k)a \neq 0$  donc  $\text{Ker } f = \{0\}$  et par suite  $f$  est un automorphisme de  $E$ .

c)  $f(a) = (1 + k)a$  donc  $1 - k \in \text{Sp } f$  et  $\text{Vect } a \subset E_{1+k}(f)$ .

Pour  $x \in \text{Vect}(a)^\perp$ ,  $f(x) = x$  donc  $1 \in \text{Sp } f$  et  $(\text{Vect } a)^\perp \subset E_1(f)$ .

On peut alors conclure que si  $k \neq 0$  alors

$$\text{Sp } f = \{1, 1 + k\}, E_{1+k}(f) = \text{Vect } a \text{ et } E_1(f) = (\text{Vect } a)^\perp$$

car la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $f$  est égale à  $n$ .

Dans le cas  $k = 0$ , on a  $f = \text{Id}$ .

**Exercice 94 :** [énoncé]

I) a)  $c_n(f) = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1 - in}$ .

b) La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux donc la série de Fourier converge simplement vers la fonction  $f^*$  régularisée de  $f$ .

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^*(x) = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 - in} e^{inx}.$$

Pour  $x = 0$ , on obtient

$$\frac{\pi}{\text{sh } \pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 - in}.$$

Or

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 - in} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{1 - in} + \frac{1}{1 + in} \right) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2}{n^2 + 1}.$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} \right).$$

- II) a)  $B$  est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable.  
 b) Il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $B = PD^tP$  avec  $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i \in [\alpha; \beta]$ .  
 En posant  $Y = {}^tPX$ , on a  ${}^tXBX = {}^tYDY$  compris entre  $\alpha {}^tYY$  et  $\beta {}^tYY$  avec  ${}^tYY = {}^tXX$ .  
 c) Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé.  
 On a  $AX = \lambda X$  et  ${}^tX^tA = \lambda {}^tX$  donc  ${}^tXBX = \lambda {}^tXX$ .  
 Puisque  ${}^tXX > 0$ , on en déduit  $\lambda \in [\alpha; \beta]$ .

**Exercice 95 :** [énoncé]

II) On peut écrire

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

avec convergence normale sur  $[0; 1]$  donc

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) dx.$$

Or

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) dx = \ln \frac{n}{n-1} - \ln \frac{n+1}{n}$$

et en transitant par les sommes partielles

$$\sum_{n=2}^N \int_0^1 \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) dx = \sum_{n=2}^N \ln \frac{n}{n-1} - \sum_{n=2}^N \ln \frac{n+1}{n} = \ln N - \ln(N+1) + \ln 2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln 2.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \ln 2.$$

**Exercice 96 :** [énoncé]

- I) a) La fonction  $f$  est paire donc  $b_n = 0$  et  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt$ .  
 On obtient

$$a_0 = \frac{2\alpha}{\pi} \text{ et } a_n = \frac{2 \sin(n\alpha)}{n\pi} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

La série de Fourier est alors

$$\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\alpha) \cos(nt)}{n}.$$

En vertu du théorème de Dirichlet, celle-ci converge en tout point vers la régularisée de  $f$  car la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.  
 Puisque la régularisée de  $f$  n'est pas continue, cette convergence ne peut pas être uniforme.

b) Par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2.$$

On en déduit après calculs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

II) a) Pour  $X = A$ , la relation  $\det(A + X) = \det A + \det X$  donne  $2^n \det A = 2 \det A$  et donc  $\det A = 0$ .

b) La matrice  $A$  n'est donc pas inversible et en posant  $r < n$  égal à son rang, on peut écrire  $A = QJ_rP$  avec  $P, Q$  inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

c) Posons alors  $X = QJ'_rP$  avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Puisque  $A + X = QI_nP = QP$ , la matrice  $A + X$  est inversible et donc  $\det X = \det(A + X) \neq 0$ .

On en déduit que la matrice  $J'_r$  est l'identité et donc  $r = 0$  puis  $A = O_n$ .

**Exercice 97 :** [énoncé]

I)  $\chi_A = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ .

Par division euclidienne

$$A^n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2.$$

II)

(a) La fonction  $z$  est bien définie puisque  $t \mapsto |e^{(-1+ix)t^2}| = e^{-t^2}$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$   
 $t \mapsto g(x, t) = e^{(-1+ix)t^2}$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$ ,  
 $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = it^2 e^{(-1+ix)t^2}$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$ ,  
 $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  
 $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t^2 e^{-t^2} = \varphi(t)$  qui est intégrable sur  $[0; +\infty[$  donc  $z$  existe, est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

(b) Par intégration par parties

$$z'(x) = \int_0^{+\infty} it^2 e^{(-1+ix)t^2} dt = -\frac{1}{2(x+i)} z(x).$$

(c)

$$\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x) = C \exp\left(i \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1)\right) = \frac{C e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Puisque  $z(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{2(x^2+1)^{1/4}}.$$

**Exercice 98 : [énoncé]**

I) La fonction étudiée est définie et continue sur  $]1; +\infty[$ .

Quand  $x \rightarrow 1^+$ ,  $x = 1 + h$  et  $f(x) \sim h/h \rightarrow 1$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x^{3/2} f(x) \rightarrow 0$ .

On en déduit que la fonction étudiée est intégrable sur  $]1; +\infty[$ .

II) a)  $r: \theta \mapsto r(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur le domaine

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{k\pi}{2}; \frac{(k+1)\pi}{2} \right[$$

$r(\theta + \pi) = -r(\theta)$  donc  $M(\theta + \pi) = M(\theta)$ .

$r(-\theta) = r(\theta)$  donc  $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$ .

On peut limiter l'étude à l'intervalle  $[0; \pi/2[$ .

$\theta$	0	$\pi/2$
$r(\theta)$	0	$+\infty$

Étude en  $\theta = 0$

$r(0) = 0$ , c'est un passage par l'origine

$\theta$	0
$r(\theta)$	+ 0 +

Il y a un point de rebroussement avec une tangente d'équation polaire  $\theta = 0$ .

Étude quand  $\theta \rightarrow (\pi/2)^-$

$$d(\theta) = r(\theta) \sin(\theta - \pi/2) = -x(\theta) \rightarrow (-1)^+$$

b) On a les coordonnées

$$M \left| \begin{array}{c} \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta \tan \theta \end{array} \right., P \left| \begin{array}{c} 1 \\ \tan \theta \end{array} \right., Q \left| \begin{array}{c} 0 \\ \tan \theta \end{array} \right.$$

On en déduit les composantes

$$\overrightarrow{MP} \left| \begin{array}{c} \cos^2 \theta \\ \tan \theta \cos^2 \theta \end{array} \right., \overrightarrow{MQ} \left| \begin{array}{c} -\sin^2 \theta \\ \tan \theta \cos^2 \theta \end{array} \right.$$

et donc

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = -\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^4 \theta = 0$$

c) On fait varier un point  $P$  sur la droite d'équation  $x = 1$  et on construit le point  $Q$  comme ci-dessus. Sur la droite  $(OP)$ , on projette le point  $Q$  et on obtient un point  $M$  sur la courbe.

**Exercice 99 : [énoncé]**

I) a)  $\text{Sp } A = \{0\}$  et  $A \neq O_n$  donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

b) On remarque  $A^n = O_n$  et  $A^{n-1} \neq O_n$ .

S'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $B^2 = A$  alors  $B^{2n} = A^n = O_n$  donc  $B$  est nilpotente. Par suite  $B^n = O_n$ .

Or  $B^{2n-2} \neq O_n$  avec  $2n-2 \geq n$ , c'est absurde.

I

II)  $R = 1$  car  $\cos(n\alpha) = O(1)$  et  $(\cos(n\alpha))$  ne tend pas vers 0.

Pour  $|x| < 1$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\alpha) x^n = \text{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\alpha} x^n \right) = \text{Re} \left( \frac{1}{1 - x e^{i\alpha}} \right) = \frac{1 - x \cos \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

**Exercice 100 :** [\[énoncé\]](#)

I) Puisque  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est décroissante :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2}$$

donc

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

d'où l'on obtient :  $u_n \sim 1/n$ .

Il y a donc divergence de la série de terme général  $u_n$ .

II) 798 a) Par les opérations  $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \dots, L_{2n} \leftarrow L_{2n} + L_n$ ,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n & B \\ B + I_n & I_n + B \end{vmatrix}.$$

Par les opérations  $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$ ,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ O_n & I_n + B \end{vmatrix} = \det(I_n - B) \det(I_n + B).$$

Ainsi  $A$  est inversible si, et seulement si,  $I_n - B$  et  $I_n + B$  le sont (i.e.  $1, -1 \notin \text{Sp} B$ ).

On aurait aussi pu étudier le noyau de  $A$ .

b) On peut présumer que l'inverse de  $A$  est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M + BN & N + BM \\ BM + N & BN + M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M + BN = I_n \\ BM + N = O_n \end{cases} \iff \begin{cases} M = (I_n - B^2)^{-1} \\ N = -B(I_n - B^2)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (I_n - B^2)^{-1} & -B(I_n - B^2)^{-1} \\ -B(I_n - B^2)^{-1} & (I_n - B^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

On aurait pu aussi inverser l'équation  $AX = Y$

**Exercice 101 :** [\[énoncé\]](#)

I)  $\chi_M(x) = -x(x^2 + (ab + bc + ca))$ . Posons  $\delta = ab + bc + ca$ .

Cas complexe.

Si  $\delta \neq 0$  alors  $M$  est diagonalisable car  $\chi_M$  à trois racines distinctes.

Si  $\delta = 0$  alors 0 est seule valeur propre et par suite  $M$  est diagonalisable si, et seulement si  $M$  est semblable à la matrice nulle ce qui n'est le cas que si  $a = b = c = 0$ .

Cas réel.

Si  $\delta < 0$  alors  $M$  est diagonalisable.

Si  $\delta = 0$  alors  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $a = b = c = 0$ .

Si  $\delta > 0$  alors  $M$  n'est pas diagonalisable car  $\chi_M$  n'est pas scindé.

II) a)

$$\frac{a_n}{n!} = O\left(\frac{1}{n!}\right)$$

or la série entière exponentielle est de rayon de convergence  $+\infty$  donc  $R = +\infty$ .

b) On a

$$f(t)e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \text{ avec } f_n(t) = \frac{a_n}{n!} t^n e^{-xt}.$$

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0; +\infty[$ .

Les fonctions  $f_n$  et la fonction  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  sont continues par morceaux sur  $[0; +\infty[$ .

Les fonctions  $f_n$  sont intégrables sur  $[0; +\infty[$  car  $t^2 f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt.$$

Par intégration par parties généralisées successives

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}.$$

Si  $x > 1$  alors la série  $\sum |a_n|/x^{n+1}$  est convergente et, par le théorème de Fubini, on peut affirmer que la fonction  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}.$$

**Exercice 102 :** [énoncé]

I) L'identité

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

assure que  $f$  converge en  $+\infty$  et sa limite ne peut qu'être 0 car  $f$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

II) [3252]

a) Puisque  $f$  possède  $n$  valeurs propres en dimension  $n$ , il est diagonalisable et ses valeurs propres sont simples. Les sous-espaces propres de  $f$  sont donc de dimension 1.

b)  $g \circ f = g^3 = f \circ g$ .

Puisque  $f$  et  $g$  commutent, les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$ .

Si  $x$  est vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$  alors  $g(x)$  appartient au même sous-espace propre et puisque celui-ci est une droite et que  $x$  est non nul,  $g(x)$  est colinéaire à  $x$ . Ainsi  $x$  est vecteur propre de  $g$ .

c) Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $f$  et considérons une base de vecteurs propres de  $f$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Un endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant  $g^2 = f$  a une matrice diagonale dans la base de vecteurs propres de  $f$  précédente.

Résoudre l'équation  $g^2 = f$  revient alors à résoudre l'équation  $\Delta^2 = D$  avec  $\Delta$  la matrice diagonale

$$\Delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

L'équation  $\Delta^2 = D$  équivaut à

$$\forall 1 \leq i \leq n, \alpha_i^2 = \lambda_i.$$

Si les  $\lambda_i$  ne sont pas tous positifs ou nuls, il n'y a pas de solutions.

Si les  $\lambda_i$  sont tous positifs ou nuls alors les solutions de l'équation  $g^2 = f$  sont les endomorphismes représentés dans la base de vecteurs propres de  $f$  par les matrices

$$\text{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n}).$$

Si aucune des valeurs propres n'est nulle, il y a  $2^n$  solutions et si l'une d'elle est nulle, il y a  $2^{n-1}$  solutions.

**Exercice 103 :** [énoncé]

I) 3372

Puisque la matrice  $A$  est nilpotente, on a

$$A^n = O_n$$

et donc puisque  $A$  et  $B$  commutent

$$(AB)^n = A^n B^n = O_n.$$

On en déduit que la matrice  $AB$  est aussi nilpotente. Elle est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et donc

$$\text{tr}(AB) = 0.$$

II) 3362

(a) Considérons

$$\varphi: x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 - 1}.$$

La fonction  $\varphi$  est définie et continue par morceaux sur  $]0; 1[$ .

Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\varphi(x) \rightarrow 0$  et quand  $x \rightarrow 1^-$ ,

$$\varphi(x) = \frac{x}{x+1} \frac{\ln x}{x-1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Puisque  $\varphi$  se prolonge par continuité en 0 et en 1,  $\varphi$  est intégrable sur  $]0; 1[$ .

Puisque

$$|f_n(x)| = x^{2n} |\varphi(x)| \leq |\varphi(x)|$$

la fonction  $f_n$  est elle aussi intégrable sur  $]0; 1[$ .

(b) La suite de fonctions  $f_n$  converge simplement vers la fonction nulle et est dominée par la fonction intégrable  $\varphi$  donc par convergence dominée

$$J_n \rightarrow 0.$$

(c) On a

$$J_k - J_{k+1} = - \int_0^1 x^{2k+1} \ln(x) dx.$$

À l'aide d'une intégration par parties justifiée par deux convergences

$$J_k - J_{k+1} = \frac{1}{(2k+2)^2}.$$

(d) On obtient donc

$$J_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} (J_k - J_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$$

puis par translation d'indice

$$J_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

**Exercice 104 :** [énoncé]

II) a) La fonction  $t \mapsto e^t/t$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ , elle y admet donc une primitive  $F$ .

Pour  $x > 0$ , on a  $[x; 2x] \subset ]0; +\infty[$ , donc l'intégrale définissant  $f(x)$  existe et

$$f(x) = F(2x) - F(x).$$

L'étude pour  $x < 0$  est similaire en considérant  $t \mapsto e^t/t$  définie et continue sur  $]-\infty; 0[ \supset ]2x; x]$ .

b) Pour  $x > 0$ ,

$$\forall t \in [x; 2x], e^x \leq e^t \leq e^{2x}$$

donc

$$e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2$$

puis

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln 2.$$

L'étude est analogue en  $0^-$

II) 2467

(a) Commençons par observer  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons  $E = \text{Im } f + \text{Ker } g$ .

Soit  $y \in \text{Im } g$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = g(x)$  et on peut écrire  $x = a + b$  avec  $a \in \text{Im } f$  et  $b \in \text{Ker } g$ .

On a alors  $y = g(x) = g(a) + g(b) = g(a) \in \text{Im}(g \circ f)$  car  $a \in \text{Im } f$ .

Ainsi  $\text{Im } g \subset \text{Im}(g \circ f)$  et donc  $\text{Im } g = \text{Im}(g \circ f)$ . Par suite  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$ .

Par inclusion et égalité des dimensions, on a  $\text{Im } g = \text{Im}(g \circ f)$ .

Soit  $x \in E$  et  $y = g(x)$ . Puisque  $y \in \text{Im } g = \text{Im}(g \circ f)$ , il existe  $a \in E$  tel que  $y = (g \circ f)(a)$ . Posons alors  $b = x - f(a)$ . On a  $x = f(a) + b$ ,  $f(a) \in \text{Im } f$  et  $b \in \text{Ker } g$  car  $g(b) = g(x) - g(f(a)) = y - (g \circ f)(a) = 0$ .

Ainsi  $E \subset \text{Im } f + \text{Ker } g$  puis  $E = \text{Im } f + \text{Ker } g$ .

(b) ( $\Leftarrow$ ) Supposons  $\text{Im } f \cap \text{Ker } g = \{0\}$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\text{Im } f$  avec  $p = \text{rg } f$ .

On a  $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  donc  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_p))$ .

Supposons  $\lambda_1 g(e_1) + \dots + \lambda_p g(e_p) = 0$ .

On a  $g(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) = 0$  donc  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p \in \text{Ker } g$ . Or

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p \in \text{Im } f$  donc  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$  puisque  $\text{Im } f \cap \text{Ker } g = \{0\}$ .

Puisque la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est libre, on obtient  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ .

Ainsi la famille  $(g(e_1), \dots, g(e_p))$  est libre et c'est donc une base de  $\text{Im}(g \circ f)$ .

On en déduit  $\text{rg}(g \circ f) = p = \text{rg } f$ .

( $\Rightarrow$ ) Par contraposée, supposons  $\text{Im } f \cap \text{Ker } g \neq \{0\}$ .

Soit  $e_1 \in \text{Im } f \cap \text{Ker } g$  un vecteur non nul.

La famille  $(e_1)$  est libre, on peut donc la compléter en une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $\text{Im } f$ .

On a  $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  donc  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_p))$ .

Or  $g(e_1) = 0$  donc  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Vect}(g(e_2), \dots, g(e_p))$  puis

$\text{rg}(g \circ f) \leq p - 1 < p$ .

Ainsi  $\text{rg}(g \circ f) \neq \text{rg } f$ .

**Exercice 105 :** [énoncé]

I) Si  $\lambda > 0$ , on obtient un hyperboloïde à deux nappes.

Si  $\lambda = 0$ , c'est un cône.

Enfin, si  $\lambda < 0$ , c'est un hyperboloïde à une nappe.

II) 2392

(a)  $f_n \xrightarrow{CS} f$  avec

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a; 1[ \\ f(1)/2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Sachant  $|f_n(x)| \leq |f(x)|$  avec  $f$  intégrable sur  $[a; b]$ , on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

(b) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \left[ \frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 - \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt.$$

D'une part

$$\left[ \frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 = \frac{\ln 2}{n} f(1) + \frac{\ln(1+a^n)}{n} f(a) = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

car  $\ln(1+a^n) \rightarrow 0$ .



D'autre part

$$\left| \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \|f'\|_\infty \int_0^1 t^n dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant  $\ln(1+u) \leq u$ .

Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 106 : [énoncé]**

I) 1063 Puisque  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est décroissante

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2}$$

donc

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

d'où l'on obtient :  $u_n \sim 1/n$ .

Il y a donc divergence de la série de terme général  $u_n$ .

II) 3205 a) L'image d'un endomorphisme est toujours stable par celui-ci...

b) Si  $x \in \text{Im } u$  alors il existe  $a \in E$  tel que  $x = u(a)$ . On a alors

$$u^2(x) = u^3(a) = -u(a) = -x.$$

On en déduit  $v^2 = -\text{Id}_E$  donc  $v$  est un isomorphisme et  $v^{-1} = -v$ .

c) D'une part

$$\det(v^{-1}) = \frac{1}{\det v}$$

et d'autre part

$$\det(-v) = (-1)^{\dim \text{Im } u} \det v$$

donc

$$(-1)^{\dim \text{Im } u} > 0.$$

On en déduit que la dimension de l'image de  $u$  est paire.

**Exercice 107 : [énoncé]**

I) La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable.

Après calculs

$$\chi_A = -(X+3)(X-3)^2.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est le plan d'équation

$$x + y + z = 0.$$

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux, on peut affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est la droite  $x = y = z$ .

On en déduit une base orthonormée de diagonalisation puis une matrice  $P$  convenable

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

II) a) L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur  $] -1 ; 1[$  d'équation homogène

$$(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0.$$

On vérifie par le calcul que la fonction

$$\varphi: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est solution de cette équation homogène et qu'elle ne s'annule pas.

b) Par la méthode de Lagrange, on cherche une deuxième solution indépendante de la forme

$$\psi: x \mapsto \lambda(x)\varphi(x) \text{ avec } \lambda \text{ fonction deux fois dérivable.}$$

On parvient à l'équation

$$\lambda''(x) = \frac{x}{1-x^2} \lambda'(x).$$

La fonction  $\lambda: x \mapsto \arcsin x$  convient ce qui donne

$$\psi: x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on applique la méthode de variation des constantes et on cherche cette solution de la forme

$$y(x) = \lambda(x)\varphi(x) + \mu(x)\psi(x)$$

avec  $\lambda, \mu$  fonctions dérivables vérifiant

$$\lambda'(x)\varphi(x) + \mu'(x)\psi(x) = 0.$$

On parvient au système

$$\begin{cases} \lambda'(x)\varphi(x) + \mu'(x)\psi(x) = 0 \\ \lambda'(x)\varphi'(x) + \mu'(x)\psi'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Après résolution

$$\lambda(x) = -\sqrt{1-x^2} \text{ et } \mu(x) = \sqrt{1-x^2} \arcsin x - x \text{ conviennent}$$

et donc

$$y(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

est solution particulière.

### Exercice 108 : [énoncé]

(a)  $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{L}(E)$ ,  $\tilde{0} \in \mathcal{C}(f)$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $g, h \in \mathcal{C}(f)$ . On a

$$f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) = \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = (\lambda g + \mu h) \circ f$$

donc  $\lambda g + \mu h \in \mathcal{C}(f)$ .

(b) Supposons

$$\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E.$$

En appliquant  $f^{n-1}$  à cette relation, on obtient  $\lambda_0 f^{n-1}(a) = 0_E$  et donc

$$\lambda_0 = 0 \text{ car } f^{n-1}(a) \neq 0_E.$$

En répétant l'opération, on obtient successivement la nullité de chaque  $\lambda_k$ .

La famille  $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$  est alors libre puis base de  $E$  car constituée de  $n = \dim E$  vecteurs de  $E$ .

(c) L'application  $\varphi_a$  est linéaire car

$$\varphi_a(\lambda f + \mu g) = \lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda \varphi_a(f) + \mu \varphi_a(g).$$

Si  $\varphi_a(g) = 0_E$  alors  $g(a) = 0_E$  puis  $g(f(a)) = f(g(a)) = 0_E$ , etc. L'application  $g$  est alors nulle sur une base et c'est donc l'application nulle. Ainsi  $\varphi_a$  est injective.

Soit  $b \in E$ . Considérons l'application linéaire  $g$  définie par

$$g(a) = b, g(f(a)) = f(b), \dots, g(f^{n-1}(a)) = f^{n-1}(b).$$

L'application linéaire  $g$  est entièrement définie par l'image d'une base et l'on vérifie  $g \circ f = f \circ g$  sur chaque vecteur de cette base. Ainsi  $g \in \mathcal{C}(f)$  et l'on vérifie  $\varphi_a(g) = b$ . Ainsi  $\varphi_a$  est surjective.

(d) Par l'isomorphisme  $\dim \mathcal{C}(f) = n$ .

Il est immédiat de vérifier  $\text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1}) \subset \mathcal{C}(f)$  ainsi que la liberté de la famille  $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ .

Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut

$$\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1}).$$

### Exercice 109 : [énoncé]

(a)  $(v \circ u)^2 = v \circ \text{Id}_F \circ u = v \circ u$  donc  $v \circ u$  est un projecteur.

(b) Le rang d'un projecteur est égal à sa trace donc

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{tr}(v \circ u) = \text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(\text{Id}_F) = p.$$

On a

$$\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v \text{ et } \dim \text{Im}(v \circ u) = \text{rg}(v \circ u) = p \geq \text{rg}(v) = \dim \text{Im } v.$$

On en déduit

$$\text{Im}(v \circ u) = \text{Im } v.$$

On a

$$\text{Ker } u \subset \text{Ker}(v \circ u) \text{ et } \dim \text{Ker } u = n - \text{rg } u \geq n - p = n - \text{rg}(v \circ u) = \dim \text{Ker}(v \circ u)$$

donc

$$\text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker } u.$$

### Exercice 110 : [énoncé]

(a) Si  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$  s'annulent sur  $W$ , il en est de même de  $\lambda f + \mu g \dots$

(b) Soit  $V$  un supplémentaire de  $W$  dans  $E$ . L'application

$$\Phi: A \rightarrow \mathcal{L}(V, F)$$

qui à  $f \in A$  associe sa restriction au départ de  $V$  est un isomorphisme car une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions linéaires sur deux espaces supplémentaires.

On en déduit

$$\dim A = \dim \mathcal{L}(V, F) = (\dim E - \dim W) \times \dim F.$$

**Exercice 111 :** [\[énoncé\]](#) $f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$  et si  $i \neq j$ , $f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(0) = 0.$ 

Ainsi

$$f(A) = f\left(\sum a_{i,j}E_{i,j}\right) = \lambda \operatorname{tr} A$$

en notant  $\lambda$  la valeur commune des  $f(E_{i,i})$ .**Exercice 112 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\left(\frac{1}{x \ln x}\right)' = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}.$$

La fonction  $x \mapsto 1/x \ln x$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

On en déduit

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} \geq \int_2^{N+1} \frac{dt}{t \ln t} = \ln \ln(N+1) - \ln \ln 2 \rightarrow +\infty.$$