

Exercice 1 [03760] [[Correction](#)]

(a) Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}$$

(b) Donner la limite de f en $x = 1$.

Exercice 2 [03759] [[Correction](#)]

Soient p et q deux projecteurs d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E vérifiant

$$\text{Im } p \subset \ker q$$

Montrer que $p + q - p \circ q$ est un projecteur et préciser son image et son noyau.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

- (a) Pour que la racine carrée soit définie pour $t \in]0; 1[$, il est nécessaire que $x \in [-1; 1]$.

Pour $x \in]-1; 1[$, l'intégrale définissant f converge par les arguments d'intégrabilité suivant

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{C^{te}}{\sqrt{1-t}}$$

Pour $x = \pm 1$, l'intégrale définissant f diverge car

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-t)}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{1-t} \geq 0$$

L'ensemble de définition de f est donc $] -1; 1[$.

- (b) Sur $]0; 1[$, la fonction f est croissante et admet donc une limite en 1^- .
Par l'absurde, si celle-ci est finie égale à $\ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall a \in [0; 1[, \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \leq \ell$$

Par intégration sur un segment, la fonction de x déterminée par le premier membre est continue en $x = 1$, on en déduit

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \leq \ell$$

Or ceci est absurde car par non intégrabilité d'une fonction positive

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} +\infty$$

Exercice 2 : [énoncé]

Puisque $\text{Im } p \subset \ker q$, on a $q \circ p = 0$ et en développant puis en simplifiant

$$(p + q - p \circ q)^2 = p + q - p \circ q$$

On peut donc conclure que $r = p + q - p \circ q$ est un projecteur.

Montrons

$$\text{Im } r = \text{Im } p + \text{Im } q$$

L'inclusion \subset est immédiate car

$$\forall x \in E, r(x) = p(x - q(x)) + q(x)$$

Inversement, soit $x \in \text{Im } p + \text{Im } q$. On peut écrire $x = p(a) + q(b)$ avec $a, b \in E$. On a alors par le calcul

$$r(x) = r(p(a)) + r(q(b)) = p(a) + q(b) = x$$

et ainsi $x \in \text{Im } r$.

Montrons aussi

$$\ker r = \ker p \cap \ker q$$

L'inclusion \supset est immédiate. Inversement, pour $x \in \ker r$ on a

$$p(x) + q(x) - p \circ q(x) = 0_E$$

En appliquant q , on obtient $q(x) = 0_E$ puis on en déduit aussi $p(x) = 0_E$ et ainsi $x \in \ker p \cap \ker q$.