Développements limités

Calcul de développements limités

Exercice 1 [01447] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(\pi/4)$ de $\sin x$
b) $DL_4(1)$ de $\frac{\ln x}{x^2}$
c) $DL_5(0)$ de $\mathrm{sh}x\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}x$.

Exercice 2 [00226] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
b) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$
c) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

Exercice 3 [00745] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\mathrm{e}^x)$
b) $DL_3(0)$ de $\ln(2+\sin x)$
c) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3+\cos x}$

Exercice 4 [00292] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$
b) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sqrt{1+x})$
c) $DL_3(0)$ de $\ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

Exercice 5 [01448] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$
b) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
c) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)$

Exercice 6 [01451] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}$
b) $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan x}{\tan x}$
c) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$

Exercice 7 [00751] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$
b) $DL_2(0)$ de $\frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}$
c) $DL_3(0)$ de $\frac{x\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x-1}$

Exercice 8 [01449] [correction]
Former le $DL_3(1)$ de $\arctan x$

Exercice 9 [01452] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_{10}(0)$ de $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$
b) $DL_{1000}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$

Exercice 10 [01453] [correction]
Exprimer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 11 [01454] [correction]
Pour $\alpha = -1/2$ et $k \in \mathbb{N}$, exprimer

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

à l'aide de nombres factoriels.
En déduire une expression du $DL_{2n+1}(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis du $DL_{2n+2}(0)$ de $\arcsin(x)$.

Exercice 12 [01455] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ de $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

Exercice 13 [01456] [correction]
Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 14 [03025] [correction]
En calculant de deux façons le développement limité à l'ordre n de $(\mathrm{e}^x - 1)^n$, établir que pour tout $0 \leqslant \ell \leqslant n$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}k^\ell}{\ell!} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

Exercice 15 [02519] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

Notion de développement asymptotiques

Exercice 16 [01457] [correction]
Former le développement asymptotique en 0 de l'expression considérée à la précision demandée :
a) $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ à la précision $x^{5/2}$
b) x^x à la précision $(x\ln x)^2$

Exercice 17 [01458] [correction]
Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée à la précision demandée :
a) $\sqrt{x+1}$ à la précision $1/x^{3/2}$.
b) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ à la précision $1/x^2$.
c) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $1/x^2$.

Exercice 18 [03431] [correction]
Former le développement asymptotique quand $x \to +\infty$ de $\arctan x$ à la précision $1/x^3$.

Exercice 19 [01459] [correction]
Réaliser un développement asymptotique de la suite considérée à la précision demandée :
a) $u_n = \ln(n+1)$ à la précision $1/n^2$
b) $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ à la précision $1/n^2$
c) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ à la précision $1/n$
d) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $1/n^2$.

Exercice 20 [01476] [correction]
Former le développement asymptotique, en $+\infty$, à la précision $1/n^2$ de

$$u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$$

Applications à l'étude de fonctions

Exercice 21 [01461] [correction]
Déterminer un équivalent simple des fonctions proposées au voisinage de 0 :

a) $x(2+\cos x) - 3\sin x$ b) $x^x - (\sin x)^x$ c) $\arctan(2x) - 2\arctan(x)$

Exercice 22 [01462] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x}$$

Exercice 23 [01463] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to 2}\left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)} \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} \quad \text{c) } \lim_{x\to a}\frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}$$

Exercice 24 [01464] [correction]
Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 25 [01465] [correction]
Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 26 [01466] [correction]
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 [01467] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$$

définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 28 [01468] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$$

définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 29 [01469] [correction]
Etudier les asymptotes de

$$x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$$

Exercice 30 [01470] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les $DL_n(0)$ sont nuls.

Exercice 31 [01471] [correction]
Soit $f :]0, 1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

a) Montrer que f est convexe sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
b) Montrer que, pour tout $x > 1$ on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{x\,dt}{t\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2\,dt}{t\ln t}$$

En déduire que $\lim_{x\to 1+} f(x) = \ln 2$. De même, établir : $\lim_{x\to 1-} f(x) = \ln 2$.
c) On prolonge f par continuité en 1, en posant $f(1) = \ln 2$.
Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
Etablir la convexité de f sur $]0, +\infty[$.

Application à l'étude de suites

Exercice 32 [01472] [correction]
Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

a) $2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$ b) $\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ c) $\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}$

Exercice 33 [01473] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left((n+1)^{1/n}-n^{1/n}\right)$

Exercice 34 [01474] [correction]
Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$$

Exercice 35 [01475] [correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$$

Application à l'étude de points singuliers

Exercice 36 [01480] [correction]
Pour chacune des courbes qui suivent, déterminer les points singuliers et préciser l'allure de la courbe au voisinage de ceux-ci :

a) $\begin{cases} x(t)=t-\text{th}t \\ y(t)=1/\text{ch}t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t)=3t-t^3 \\ y(t)=2t^2-t^4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t)=t^2+t^4 \\ y(t)=t^2+t^5 \end{cases}$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o((x - \frac{\pi}{4})^3)$
b) $\frac{\ln x}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1))^4$.
c) $\mathrm{sh}x\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}x = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
b) $\ln(1+\sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
c) $\cos(\ln x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \mathrm{o}((x-1)^3)$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) $\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$
b) $\ln(2+\sin x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$
c) $\sqrt{3+\cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$

Exercice 4 : [énoncé]
a) $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{\mathrm{e}}{48}x^3 + o(x^3)$.
b) $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) = \ln 2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^3)$
c) $\ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = 2\ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

Exercice 5 : [énoncé]
a) $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + o(x^2)$
b) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$
c) $\ln\left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

Exercice 6 : [énoncé]
a) $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$
b) $\frac{\arctan x}{\tan x} = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$
c) $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

Exercice 7 : [énoncé]
a) $\frac{x-\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$
b) $\frac{\sin x}{\exp(x)-1} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$
c) $\frac{x\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x - 1} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$

Exercice 8 : [énoncé]
On primitive de $DL_2(1)$ de $\frac{1}{1+x^2}$:
$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

Exercice 9 : [énoncé]
a) $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + o(t^9)$ dont $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = t - \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{24}t^9 + o(t^{10})$
puis $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$
b) $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln(\mathrm{e}^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})) = \ln(\mathrm{e}^x) + \ln(1 - \frac{x^{1000}\mathrm{e}^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})) =$
$x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + o(x^{1000})$.

Exercice 10 : [énoncé]
$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k}(-x)^k + o(x^n)$ avec
$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} = (-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2^k k!} = (-1)^k\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$.
Au final, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}x^k + o(x^n)$

Exercice 11 : [énoncé]
On a

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

puis

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Exercice 12 : [énoncé]
$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$ et $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$.
Donc $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

Exercice 13 : [énoncé]
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2} > 0$$

de plus $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty, \lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.
Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En particulier f^{-1} admet une $DL_5(0)$, de plus comme f est impaire, f^{-1} l'est aussi et le $DL_5(0)$ de f^{-1} est de la forme :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

En réalisant un $DL_5(0)$ de $f^{-1}(f(x))$ on obtient :

$$f^{-1}(f(x)) = ax + (a+b)x^3 + (\frac{1}{2}a + 3b + c)x^5 + o(x^5)$$

Or $f^{-1}(f(x)) = x$, donc :

$$a = 1, b = -1 \text{ et } c = \frac{5}{2}$$

Exercice 14 : [énoncé]
D'une part $\mathrm{e}^x - 1 = x + o(x)$ donne

$$(\mathrm{e}^x - 1)^n = x^n + o(x^n)$$

D'autre part

$$(\mathrm{e}^x - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\mathrm{e}^{kx}$$

or

$$\mathrm{e}^{kx} = \sum_{\ell=0}^n \frac{k^\ell}{\ell!}x^\ell + o(x^n)$$

donc, en réordonnant les sommes

$$(\mathrm{e}^x - 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}k^\ell}{\ell!}x^\ell$$

L'unicité des développements limités entraîne la relation proposée.

Exercice 15 : [énoncé]
a) f est évidemment dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^\star$ et aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
b) f admet pour développement limité à l'ordre $n-1$: $f(x) = o(x^{n-1})$.
Si f admet un $DL_n(0)$ celui-ci serait de la forme

$$f(x) = ax^n + o(x^n)$$

ce qui entraîne que $\sin(1/x)$ admet une limite finie en 0 ce qui est notoirement faux.

Exercice 16 : [énoncé]
a) $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{5/2} + o(x^{5/2})$
b) $x^x = 1 + x\ln x + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + o(x^2\ln^2 x)$

Exercice 17 : [énoncé]
a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x}\sqrt{1+1/x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.
b) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x = -\ln x + 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
c) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{x} + \frac{11\mathrm{e}}{24}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 18 : [énoncé]
On a pour $x > 0$

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$$

donc

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Exercice 19 : [énoncé]
a) $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
b) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{8}\frac{1}{n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$.
c) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
d) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2n} + \frac{11\mathrm{e}}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 20 : [énoncé]
On a
$$u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \sum_{k=0}^{n-4}\frac{k!}{n!}$$
Or
$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-4}\frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-4}\frac{(n-4)!}{n!} \leqslant n\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = o(1/n^2)$$
Donc
$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 21 : [énoncé]
Par développements limités :
a) $x(2+\cos x) - 3\sin x \sim \frac{1}{60}x^5$
b) $x^x - (\sin x)^x = x^x(1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x) \sim \frac{1}{6}x^3$
c) $\arctan(2x) - 2\arctan(x) \sim -2x^3$

Exercice 22 : [énoncé]
a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)} = \frac{1}{3}6^{4/13}5^{5/26}$
b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = \mathrm{e}$
c) $x^a - a^x \sim a^a(1-\ln a)(x-a)$ si $a \neq 1$ et
$\arctan(x) - \arctan(a) \sim (\arctan(a))'(x-a) = \frac{(x-a)}{1+a^2}$.
Si $a \neq 1$,
$$\lim_{x\to a}\frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = a^a(1+a^2)(1-\ln a)$$
Si $a = 1$,
$$\lim_{x\to a}\frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = 2$$

Exercice 24 : [énoncé]
On a
$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$
Par suite f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$.
De plus ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{3}$.
L'équation de la tangente en 0 est $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$ et la courbe est localement en dessous de celle-ci.

Exercice 25 : [énoncé]
On a
$$f(x) = ax - a(1 + \frac{1}{2}a)x^2 + a(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a^2)x^3 + o(x^3)$$
Pour que f présente un point d'inflexion en 0, il faut que $a(1+\frac{1}{2}a) = 0$ i.e. : $a = -2$.
Inversement si $a = -2$,
$$f(x) = -2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$
et par suite f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 26 : [énoncé]
f est définie sur $\mathbb{R}^\star$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$
donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -1/2$ et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 : [énoncé]
On a
$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{1/x} = x + 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
Par suite, la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe et la courbe est au dessus de celle-ci.

Exercice 28 : [énoncé]
On a
$$f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln(x)) = \ln 2.x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
La droite d'équation $y = \ln 2.x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe et la courbe est en dessous de celle-ci.

Exercice 29 : [énoncé]
On a
$$\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} = x\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}} = x + 1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Courbe en dessous (resp. au dessus) de l'asymptote en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 30 : [énoncé]
f est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$.
Montrons par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ est de la forme :
$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$$
pour $x \neq 0$ avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
Pour $n = 0$: ok.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.
$f^{(n)}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour $x \neq 0$,
$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}$$
avec $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$.
Récurrence établie.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \underset{y=1/x^2}{=} P_n(\sqrt{y})\mathrm{e}^{-y} \to 0$ quand $x \to 0^+$et de même quand $x \to 0^-$.
Par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$ dans une version généralisée, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par suite $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Exercice 31 : [énoncé]
a) Soit G une primitive de la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ sur $]0,1[$ (resp. sur $]1,+\infty[$).
Pour tout $x \in]0,1[$ (resp. $]1,+\infty[$), on a $f(x) = G(x^2) - G(x)$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ (resp. sur $]1,+\infty[$) et
$$f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$
On a alors
$$f''(x) = \frac{x\ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$$
Soit $g(x) = x\ln x - x + 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g'(x) = \ln(x)$. Puisque $g(1) = 0$, la fonction g est positive puis $f'' \geqslant 0$ sur $]0,1[$ (resp. $]1,+\infty[$).
b) Pour $x > 1$,
$$\forall t \in \left[x, x^2\right], \frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}$$
D'où
$$\int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t.\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t.\ln t}$$
Comme $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t.\ln t} = \ln 2$, on obtient
$$x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln 2$$
puis $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \ln 2$.
Pour $x < 1$,
$$\forall t \in \left[x^2, x\right], \frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}$$
D'où
$$\int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t.\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t.\ln t}$$
On obtient $x^2\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x\ln 2$ puis $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \ln 2$.
c) f est continue sur $]0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et
$$f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$
Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on a f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(1) = 1$.
De même, en exploitant
$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h) - h}{(1+h)(\ln(1+h))^2} \sim \frac{h^2/2}{(1+h)h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}$$

on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f''(1) = 1/2$.
Comme f'' est positive sur $]0,+\infty[$, on peut conclure que f est convexe sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 32 : [énoncé]
a)
$$2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{4n\sqrt{n}}$$
b)
$$\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)} \sim \frac{1/n}{1/2n^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$
c) $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$ or
$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)^3 + o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$$
et
$$\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3 + o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$$
donc
$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) $n\sin\frac{1}{n} \sim \frac{n}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$
b) $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}+o(1)}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}}$.
c) $n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} n^2(\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+1/n)}{n}} - 1) \sim \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$ donc
$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right) = 1$

Exercice 34 : [énoncé]
On a
$$\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} = \frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{\ln b}{n}}}{2} = 1 + \frac{\ln a + \ln b}{2n} + o\left(1/n\right)$$
donc
$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \mathrm{e}^{n(\ln(1+\frac{\ln a+\ln b}{2n}+o(1/n))} = \mathrm{e}^{\frac{\ln a+\ln b}{2}+o(1)} \to \sqrt{ab}$$

Exercice 35 : [énoncé]
On a
$$3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3} = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 2} - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 3} = 1 + \frac{3\ln 2 - 2\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc
$$\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(3\sqrt[n]{2}+2\sqrt[n]{3})} = \mathrm{e}^{\ln(8/9)+o(1)} \to \frac{8}{9}$$

Exercice 36 : [énoncé]
Notons $M(t)$ le point courant de l'arc considéré.
a) On a
$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{th}^2 t \\ y'(t) = -\mathrm{sh}t/\mathrm{ch}^2 t \end{cases}$$
donc
$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$
Le point $M(0)$ est le seul point singulier. Puisque
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}t^3 + o(t^3) \\ y(t) = 1 - \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2) \end{cases}$$
On obtient $p = 2$, $q = 3$ car
$$\begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$
On a un point de rebroussement de première espèce, tangente dirigée par $\vec{u}(0,-1)$.
b) On a
$$\begin{cases} x'(t) = 3(1-t^2) \\ y'(t) = 4t(1-t^2) \end{cases}$$
donc
$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \pm 1$$
Les points $M(1)$ et $M(-1)$ sont les seuls points singuliers. Puisque
$$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$$

$M(-t)$ est symétrie de $M(t)$ par rapport à (Oy). Il suffit d'étudier $M(1)$. On a

$$\begin{cases} x(1+h) = 2 - 3h^2 - h^3 \\ y(1+h) = 1 - 4h^2 - 4h^3 + o(h^3) \end{cases}$$

donc $p = 2$ et $q = 3$ car

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

On a un point de rebroussement de première espèce, tangente dirigée par $\vec{u}(-3,-4)$.
c) On a

$$\begin{cases} x'(t) = 2t + 4t^3 \\ y'(t) = 2t + 5t^4 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

Le point $M(0)$ est le seul point singulier. Puisque

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^4 \\ y(t) = t^2 + o(t^4) \end{cases}$$

donc $p = 2$ et $q = 4$ car

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

On a un point de rebroussement de seconde espèce, tangente dirigée par $\vec{u}(1,1)$.
Puisque

$$y(t) - x(t) = t^5 - t^4 = t^4(1-t)$$

$M(t)$ est en dessous de sa tangente en $M(0)$.
Pour $t \geqslant 0$,

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) \leqslant y(t) \end{cases}$$

donc $M(-t)$ est en dessous de $M(t)$.