# Déterminants

## Groupe symétrique

**Exercice 1** [ 02231 ] [Correction]
Soit $n \geq 2$ et $c$ la permutation circulaire $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$.
Déterminer toutes les permutations $\sigma$ de $\mathcal{S}_n$ qui commutent avec $c$.

**Exercice 2** [ 02225 ] [Correction]
Dans $\mathcal{S}_n$ avec $n \geq 2$, on considère une permutation $\sigma$ et un $p$-cycle :

$$c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$$

Observer que la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un $p$-cycle qu'on précisera.

**Exercice 3** [ 02224 ] [Correction]
Soient $n$ un entier supérieur à 2, $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Montrer que $\sigma$ et $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ commutent si, et seulement si, $\{i, j\}$ est stable par $\sigma$.

**Exercice 4** [ 00121 ] [Correction]
Soit $H$ l'ensemble des $\sigma \in \mathcal{S}_n$ vérifiant $\sigma(k) + \sigma(n + 1 - k) = n + 1$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
Montrer que $H$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$

**Exercice 5** [ 02226 ] [Correction]
Déterminer la signature de :

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

**Exercice 6** [ 02227 ] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la signature de la permutation suivante :

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$.

**Exercice 7** [ 02228 ] [Correction]
Soit $n \geq 2$ et $\tau$ une transposition de $\mathcal{S}_n$.

(a) Montrer que l'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ vers $\mathcal{S}_n$.

(b) En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}_n$ formé des permutations de signature 1 élément de $\mathcal{S}_n$.

**Exercice 8** [ 02230 ] [Correction]
Soit $n \geq 5$.
Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}$ sont deux cycles d'ordre 3 de $\mathcal{S}_n$, alors il existe une permutation $\sigma$, paire, telle que

$$\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

## Formes multilinéaires alternées

**Exercice 9** [ 01410 ] [Correction]
Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.
Soient $f$ une forme linéaire sur $E$, $p$ la projection vectorielle sur $F$ parallèlement à $G$ et $q = \mathrm{Id} - p$ sa projection complémentaire.
Montrer que l'application $\varphi \colon E \times E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur $E$.

## Déterminant d'un endomorphisme

**Exercice 10** [ 01411 ] [Correction]
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}$. Montrer que l'espace $E$ est de dimension paire.

**Exercice 11** [ 01412 ] [Correction]
Soit $V = \{x \mapsto \mathrm{e}^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

(a) Montrer que $V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.

(b) Montrer que l'application $D\colon f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $V$ dont on calculera le déterminant.

**Exercice 12** [ 03071 ] [Correction]
Soit $f$ un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

(a) Montrer qu'il existe d'uniques complexes $a, b$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$$

(b) Exprimer en fonction de $a$ et $b$ le déterminant de $f$.

**Exercice 13** [ 00752 ] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ déterminé par

$$\varphi_A(M) = AM$$

Calculer la trace et le déterminant de $\varphi_A$

**Exercice 14** [ 03641 ] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

(a) Montrer que $A$ est inversible.

(b) On suppose en outre

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,i} > 0$$

Montrer que $\det A > 0$.

## Déterminant d'une matrice carrée

**Exercice 15** [ 01414 ] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Former une relation liant $\det(A)$ et $\det \bar{A}$.

**Exercice 16** [ 01415 ] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

**Exercice 17** [ 01416 ] [Correction]
Soit $A$ une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n+1$. Montrer

$$\det A = 0$$

Ce résultat est-il encore vrai lorsque $A$ est d'ordre pair ?

**Exercice 18** [ 01417 ] [Correction]
Comparer $\det(a_{i,j})$ et $\det((-1)^{i+j} a_{i,j})$ où $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 19** [ 03382 ] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$$

Montrer

$$2^{n-1} \mid \det A$$

**Exercice 20** [ 00738 ] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$.
Calculer le déterminant de la matrice $B$ de colonnes

$$C_1 - C_2, \ldots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$$

**Exercice 21** [ 02603 ] [Correction]
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si la matrice $A$ est à coefficients entiers, qu'elle est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.

(a) Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ alors $|\det A| = 1$.

(b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}, A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

Calculer $\det A$ et $\det B$.

**Exercice 22** [ 02604 ] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})(n \geq 2)$ de colonnes $A_1, \ldots, A_n$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $B_1, \ldots, B_n$ déterminées par

$$B_j = \sum_{i \neq j} A_i$$

Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.

**Exercice 23** [ 02695 ] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (avec $n \geq 2$) vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A+X) = \det A + \det X$$

Montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

**Exercice 24** [ 00229 ] [Correction]
Soient $A$ et $H$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{rg} H = 1$. Montrer :

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq \det A^2$$

**Exercice 25** [ 01587 ] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Établir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

**Exercice 26** [ 03278 ] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq 1$$

Montrer

$$|\det A| \leq 1$$

## Calculs de déterminants élémentaires

**Exercice 27** [ 01418 ] [Correction]
Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$.

**Exercice 28** [ 01419 ] [Correction]
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a_{\max(i,j)})$.
En déduire en particulier $\det(\max(i,j))$ et $\det(\min(i,j))$.

**Exercice 29** [ 01420 ] [Correction]
Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

**Exercice 30** [ 01421 ] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leq k \leq n$ on a

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

**Exercice 31** [ 01423 ] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer ${}^tA.A$. En déduire $\det A$.

(b) Soient $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2$$

**Exercice 32** [ 03377 ] [Correction]

(a) Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

(b) En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

**Exercice 33** [ 03366 ] [Correction]
Montrer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

# Calculs de déterminants avancés

**Exercice 34** [ 01425 ] [Correction]
Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}_{[n]}$$

(a) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de $x$.

(b) Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

**Exercice 35** [ 02693 ] [Correction]
Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$
où $x, a_1, \dots, a_n$ réels.

**Exercice 36** [ 00299 ] [Correction]
On pose
$$P_n(X) = X^n - X + 1 \text{ (avec } n \geq 2)$$

(a) Montrer que $P_n$ admet $n$ racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.

(b) Calculer le déterminant de
$$\begin{pmatrix} 1 + z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + z_n \end{pmatrix}$$

**Exercice 37** [ 03806 ] [Correction]
*(Déterminant de Hurwitz)* Soient $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante
$$H = \begin{pmatrix} a + \lambda_1 & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & a + \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Exercice 38** [ 03124 ] [Correction]
Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de coefficient
$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ b_j & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 39** [ 03578 ] [Correction]
Soient un naturel $n \geq 2$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n$ réels distincts de $[0\,;\pi]$. On pose
$$P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_j - \cos x_i)$$
et on considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient général
$$m_{i,j} = \cos\left((j-1)x_i\right)$$

(a) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$ et donner son coefficient dominant.

(b) Calculer $\det M_n$ en fonction de $P_n$.

**Exercice 40** [ 03577 ] [Correction]
Pour une famille de $n$ réels distincts $(x_k)$ de $[0\,;\pi]$, on pose
$$P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_i - \cos x_j)$$

(a) Combien le produit définissant $P_n$ comporte-t-il de facteurs ?

(b) Pour $(i, j) \in [\![1\,;4]\!]^2$ écrire la matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de coefficient général
$$m_{i,j} = \cos\left((j-1)x_i\right)$$

(c) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$.

(d) Calculer $\det M$ en fonction de $P_4$ et montrer $|\det M| < 24$

## Calculs de déterminants par une relation de récurrence

**Exercice 41** [ 01426 ] [Correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 42** [ 01427 ] [Correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 43** [ 01429 ] [Correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite $(H_n)$ avec

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

**Exercice 44** [ 01431 ] [Correction]
Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & & \vdots \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \ddots & \vdots \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en notant

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Exercice 45** [ 01432 ] [Correction]
Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en notant par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Exercice 46** [ 03254 ] [Correction]
Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

# Calculs de déterminants tridiagonaux

**Exercice 47** [ 02584 ] [Correction]
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ; calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 48** [ 00739 ] [Correction]
Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 49** [ 00740 ] [Correction]
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 50** [ 00741 ] [Correction]
Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

**Exercice 51** [ 01433 ] [Correction]
Pour $a \in \mathbb{K}^*$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

# Applications des déterminants

**Exercice 52** [ 01422 ] [Correction]
*(Identité de Lagrange)* Calculer de deux façons :

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$$

**Exercice 53** [ 01441 ] [Correction]
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Pour quelles valeurs de $\lambda$, a-t-on $\det(A - \lambda I_3) = 0$ ?

(b) Déterminer une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $E$ telle que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**Exercice 54** [ 01442 ] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [-\varepsilon\,;\varepsilon], A + xB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

**Exercice 55** [ 01445 ] [Correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

(a) Calculer $\det M$.

(b) Déterminer, en fonction de $\alpha$ le rang de $M$.

**Exercice 56** [ 03417 ] [Correction]
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble formé des matrices inversibles d'ordre $n$ à coefficients entiers dont l'inverse est encore à coefficients entiers.
Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers ($n \geq 2$). Montrer qu'il existe une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est formée des entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ si, et seulement si, ces entiers sont premiers dans leur ensemble.

**Exercice 57** [ 00749 ] [Correction]
Établir que l'inverse de la matrice $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est à coefficients entiers.

## Systèmes de Cramer

**Exercice 58** [ 01437 ] [Correction]
Soient $a, b, c$ et $d$ des éléments de $\mathbb{K}$. Résoudre sur $\mathbb{K}$ les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$ avec $a, b, c$ deux à deux distincts.

(b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^3x+b^3y+c^3z=d^3 \end{cases}$ avec $a, b, c$ deux à deux distincts et $a+b+c \neq 0$.

**Exercice 59** [ 01438 ] [Correction]
Résoudre

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$$

en fonction de $a, b, c \in \mathbb{C}$.

**Exercice 60** [ 01439 ] [Correction]
Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ \bar{a}x+y+az=0 \\ \bar{a}^2x+\bar{a}y+z=0 \end{cases}$$

**Exercice 61** [ 01440 ] [Correction]
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts.

(a) Résoudre

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$$

en introduisant : $P = X^3 - (x+yX+zX^2)$

(b) Même question pour

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^4 \\ x+by+b^2z=b^4 \\ x+cy+c^2z=c^4 \end{cases}$$

## Comatrice

**Exercice 62** [ 01444 ] [Correction]
Soient $n$ un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Établir

$$\begin{cases} \operatorname{rg}(A)=n \implies \operatorname{rg}\big(\operatorname{Com}(A)\big)=n \\ \operatorname{rg}(A)=n-1 \implies \operatorname{rg}\big(\operatorname{Com}(A)\big)=1 \\ \operatorname{rg}(A)\leq n-2 \implies \operatorname{rg}\big(\operatorname{Com}(A)\big)=0 \end{cases}.$$

(b) Montrer

$$\det\big(\operatorname{Com}(A)\big) = \big(\det(A)\big)^{n-1}$$

(c) En déduire

$$\operatorname{Com}\big(\operatorname{Com}(A)\big)$$

**Exercice 63** [ 03142 ] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que les matrices $A$ et $B$ commutent. Montrer que les comatrices de $A$ et $B$ commutent.

**Exercice 64** [ 03576 ] [Correction]

(a) Donner le rang de $B = {}^t(\operatorname{Com} A)$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(b) On se place dans le cas où $\operatorname{rg} A = n-1$.
Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AC = CA = O_n$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$C = \lambda B$$

**Exercice 65** [ 02659 ] [Correction]
Soient des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux.
Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n$$

**Exercice 66** [ 03944 ] [Correction]
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la comatrice de $S$ est symétrique.

## Déterminants de Vandermonde et apparentés

**Exercice 67** [ 02385 ] [Correction]
Calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

**Exercice 68** [ 02386 ] [Correction]
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

## Calculs de déterminants par blocs

**Exercice 69** [ 03129 ] [Correction]
Soit $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $C$ et $D$ commutent.

(a) On suppose que $D$ est inversible, établir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

(b) Généraliser la formule au cas où $D$ n'est plus supposée inversible.

**Exercice 70** [ 02694 ] [Correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

**Exercice 71** [ 02387 ] [Correction]

(a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$$

(b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

(c) Trouver un contre-exemple à b) si $A$ et $B$ ne commutent pas.

(d) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

**Exercice 72** [ 00198 ] [Correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

(a) À quelle condition la matrice $A$ est-elle inversible ?

(b) Donner son inverse quand cela est possible.

**Exercice 73** [ 00713 ] [Correction]
On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
On écrit la comatrice de $M$ sous une forme analogue

$$\operatorname{Com} M = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
Vérifier

$$\det A' = \det(M)^{p-1} \det D$$

**Exercice 74** [ 03147 ] [Correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose $C^tD$ symétrique et $D$ inversible. Montrer que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(A^tD - B^tC\right)$$

(b) On suppose toujours $C^tD$ symétrique mais on ne suppose plus $D$ inversible.
Montrer que l'égalité précédente reste vraie.

**Exercice 75** [ 03288 ] [Correction]
Soient $A, B, C, D$ des matrices carrées d'ordre $n$, réelles et commutant deux à deux. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $AD - BC$ l'est.

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
Pour commencer, notons que, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ $c^{k-1}(1) = k$ et par conséquent $c^{-(k-1)}(k) = 1$.
Soit $\sigma$ une permutation commutant avec $c_n$.
Posons $k = \sigma(1) \in \{1,2,...,n\}$ et $s = c^{-(k-1)} \circ \sigma$ de sorte que $s(1) = 1$.
Comme $\sigma$ et $c$ commutent, $s$ et $c$ commutent aussi et on a pour tout $2 \leq i \leq n$, $s = c^{(i-1)} \circ s \circ c^{-(i-1)}$ d'où
$s(i) = c^{(i-1)} \circ s \circ c^{-(i-1)}(i) = \sigma^{(i-1)} \circ s(1) = \sigma^{(i-1)}(1) = i$ car $c^{-(i-1)}(i) = 1$.
Par conséquent $s = \mathrm{Id}$ puis $\sigma = c^k$.
Inversement les permutations de la forme $c^k$ avec $1 \leq k \leq n$ commutent avec $c$.

**Exercice 2 :** [énoncé]
Pour $x = \sigma(a_i)$, on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma(a_{i+1})$$

(en posant $a_{p+1} = a_1$).
Pour $x \notin \{\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_p)\}$, on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma \circ \sigma^{-1}(x) = x$$

car $c(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(x)$ puisque $\sigma^{-1}(x) \notin \{a_1,\dots,a_p\}$.
Ainsi

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix}\sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \dots & \sigma(a_p)\end{pmatrix}$$

**Exercice 3 :** [énoncé]
Si $\{i,j\}$ est stable par $\sigma$ alors $\{\sigma(i),\sigma(j)\} = \{i,j\}$.
On a alors

$$\forall x \notin \{i,j\}, (\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(x) = (\tau \circ \sigma)(x)$$

Pour $x = i$ alors $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(j) = (\tau \circ \sigma)(i)$ et pour $x = j$, $(\sigma \circ \tau)(j) = \sigma(i) = (\tau \circ \sigma)(j)$.
Par suite

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$$

Inversement, si $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ alors $\sigma(i) = (\sigma \circ \tau)(j) = (\tau \circ \sigma)(j) = \tau(\sigma(j))$.
Puisque $\tau(\sigma(j)) \neq \sigma(j)$ on a $\sigma(j) \in \{i,j\}$.
De même $\sigma(i) \in \{i,j\}$ et donc $\{i,j\}$ stable par $\sigma$.

**Exercice 4 :** [énoncé]
$H \subset \mathcal{S}_n$, $\mathrm{Id} \in H$. Remarquons, $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $\sigma(k) = n+1-\sigma(n+1-k)$.
Soient $\sigma,\sigma' \in H$,

$$(\sigma' \circ \sigma)(k) = \sigma'(\sigma(k)) = n+1-\sigma'(n+1-\sigma(k)) = n+1-\sigma' \circ \sigma(n+1-k)$$

donc $\sigma' \circ \sigma \in H$.
Soit $\sigma \in H$. Posons $\ell = \sigma^{-1}(k)$. On a

$$\sigma(n+1-\ell) = n+1-\sigma(\ell) = n+1-k$$

donc $\sigma^{-1}(n+1-k) = n+1-\ell$ puis

$$\sigma^{-1}(k) + \sigma^{-1}(n+1-k) = \ell + (n+1-\ell) = n+1$$

**Exercice 5 :** [énoncé]
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation $\sigma$ :

$$I(\sigma) = \mathrm{Card}(\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ et $I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

(a) $I(\sigma) = 2+3+2+4+3+2+1+0 = 17$ donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.

(b) $I(\sigma) = 0+1+0+3+0+2+0+0 = 6$ donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.

**Exercice 6 :** [énoncé]
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation $\sigma$ :

$$I(\sigma) = \mathrm{Card}(\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ et $I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

(a) $I(\sigma) = (n-1)+(n-2)+\dots+1+0 = \frac{n(n-1)}{2}$ donc

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(b) $I(\sigma) = 0+1+2+\dots+(n-1)+0+\dots+0 = \frac{n(n-1)}{2}$ donc

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

**Exercice 7 :** [énoncé]

(a) L'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est involutive, donc bijective.

(b) L'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ transforme $\mathcal{A}_n$ en $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ donc $\operatorname{Card} \mathcal{A}_n = \operatorname{Card} \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$. Or $\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointe de $\mathcal{A}_n$ et de $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ donc
$$\operatorname{Card} \mathcal{A}_n = \frac{1}{2} \operatorname{Card} \mathcal{S}_n = \frac{n!}{2}$$

**Exercice 8 :** [énoncé]

Notons que
$$\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \end{pmatrix}$$
Soit $\sigma\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ une permutation définie par :
$$\sigma(a) = a', \sigma(b) = b' \text{ et } \sigma(c) = c'$$
Si $\sigma$ est paire alors le problème est résolu.
Si $\sigma$ est impaire alors soit $c \neq d \in \mathbb{N}_n \setminus \{a, b, c\}$ et $\tau = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$.
$\sigma \circ \tau$ est une permutation paire satisfaisante.

**Exercice 9 :** [énoncé]

$\varphi\colon E \times E \to \mathbb{K}$.
$\varphi(y, x) = f(p(y))f(q(x)) - f(p(x))f(q(x)) = -\varphi(x, y)$. Il suffit d'étudier la linéarité en la 1ère variable.
$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = f(p(\lambda x + \mu x'))f(q(y)) - f(p(y))f(q(\lambda x + \mu x'))$ or $f$, $p$ et $q$ sont linéaires donc
$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = (\lambda f(p(x)) + \mu f(p(x')))\, f(q(y)) - f(p(y))\, (\lambda f(q(x)) + \mu f(q(x')))$
puis en développant et en réorganisant : $\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x', y)$.
$\varphi$ est donc une forme bilinéaire antisymétrique donc alternée.

**Exercice 10 :** [énoncé]

Posons $n = \dim E$. Comme $\det(f^2) = \det(-I_n)$ on a $\det(f)^2 = (-1)^n \geq 0$, donc $n$ est pair.

**Exercice 11 :** [énoncé]

(a) Il est clair que $V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On pose $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k \mathrm{e}^x$.
$\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ forme une base de $V$, donc $\dim V = n + 1$.

(b) Pour $f(x) = P(x)\mathrm{e}^x$ on a $D(f)(x) = f'(x) = (P(x) + P'(x))\mathrm{e}^x$.
$D$ est bien une application de $V$ dans $V$.
De plus la linéarité de $D$ découle de la linéarité de la dérivation et on peut donc conclure $D \in \mathcal{L}(V)$.
Puisque $(x^k\mathrm{e}^x)' = (x^k + kx^{k-1})\mathrm{e}^x$ on a $D(f_k) = f_k + kf_{k-1}$ donc a
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$
Par suite $\det D = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$.

**Exercice 12 :** [énoncé]

(a) La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Pour $a, b \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi_{a,b}\colon z \mapsto az + b\bar{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et sa matrice dans la base $(1, i)$ est
$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b & \operatorname{Im} b - \operatorname{Im} a \\ \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b & \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} b \end{pmatrix}$$
Pour $f$ endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de matrice
$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$
dans la base $(1, i)$, on a $f = \varphi_{a,b}$ si, et seulement si,
$$\begin{cases} \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b = \alpha \\ \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b = \beta \\ \operatorname{Im} b - \operatorname{Im} a = \gamma \\ \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} b = \delta \end{cases}$$
Ce système possède une unique solution qui est
$$a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2} \text{ et } b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}$$

(b) Le déterminant de $f$ vaut
$$\det f = \alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2$$

**Exercice 13 :** [énoncé]
Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On observe

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

Par suite dans la base $(E_{1,1},\dots,E_{n,1},E_{1,2},\dots,E_{n,2},\dots,E_{1,n},\dots,E_{n,n})$, la matrice de l'endomorphisme $\varphi_A$ est diagonale par blocs avec $n$ blocs diagonaux tous égaux à $A$. On en déduit

$$\operatorname{tr}\varphi_A = n\operatorname{tr}A \text{ et } \det\varphi_A = (\det A)^n$$

**Exercice 14 :** [énoncé]

(a) Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de $A$ et supposons

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$$

Si $m = \max(|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|) \neq 0$ alors, puisque pour tout $1 \le i \le n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} = 0$$

on obtient

$$|\lambda_i| \le \frac{\sum_{j\neq i}|\lambda_j|\,|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \le m\frac{\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < m$$

ce qui est absurde compte tenu de la définition de $m$.
Par suite, la famille $(C_1,\dots,C_n)$ est libre et donc $A$ inversible.

(b) Considérons l'application $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xI_n)$.
La fonction $f$ est clairement polynomiale de monôme dominant $x^n$, elle est donc continue et de limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
De plus, le résultat précédent s'applique à la matrice $A + xI_n$ pour tout $x \ge 0$ et donc $f(x) \neq 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
Par continuité, la fonction $f$ ne peut prendre de valeurs $\le 0$ et donc

$$\forall x \ge 0, f(x) > 0$$

En particulier $\det A = f(0) > 0$.

**Exercice 15 :** [énoncé]
Par conjugaison d'une somme et de produits

$$\det\bar{A} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

**Exercice 16 :** [énoncé]
Ici ${}^t\!A = \bar{A}$, donc $\det(A) = \det({}^t\!A) = \det\bar{A}$.
Comme

$$\det\bar{A} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

on peut conclure $\det A \in \mathbb{R}$.

**Exercice 17 :** [énoncé]
Comme ${}^t\!A = -A$ on a

$$\det A = \det{}^t\!A = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det A = -\det A$$

donc $\det A = 0$.
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fournit un contre-exemple au second problème posé.

**Exercice 18 :** [énoncé]
Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = ((-1)^{i+j}a_{i,j})$. On a

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma(i)+i}a_{\sigma(i),i}$$

en regroupant les puissance de $(-1)$

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)+i}\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}$$

puis

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)(-1)^{n(n+1)}\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}$$

Ainsi
$$\det B = (-1)^{n(n+1)} \det A = \det A$$
car $n(n+1)$ est pair.

**Exercice 19 :** [énoncé]
En ajoutant la première colonne de $A$ à chacune des suivantes, on obtient une matrice dont les colonnes d'indices 2 jusqu'à $n$ ont pour coefficients $0, 2$ ou $-2$. On peut donc factoriser 2 sur chacune de ces colonnes et l'on obtient
$$\det A = 2^{n-1} \det B$$
avec $B$ une matrice dont les coefficients sont $0, 1$ ou $-1$ de sorte que $\det B \in \mathbb{Z}$

**Exercice 20 :** [énoncé]
La somme des colonnes de $B$ est nulle donc $\det B = 0$.

**Exercice 21 :** [énoncé]

(a) $AA^{-1} = I_n$ donne $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ or $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ donc $\det A = \pm 1$.

(b) Posons $P(x) = \det(A + xB)$. $P$ est une fonction polynomiale de degré inférieur à $n$.
Pour tout $x \in \{0, 1, \dots, 2n\}$, on a $P(x) = \pm 1$ donc $P(x)^2 - 1 = 0$.
Le polynôme $P^2 - 1$ possède au moins $2n + 1$ racines et est de degré inférieur à $2n$, c'est donc le polynôme nul.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \pm 1$.
Pour $x = 0$, on obtient $\det A = \pm 1$.
Pour $x \to +\infty$,
$$\det\left(\frac{1}{x}A + B\right) = \frac{P(x)}{x^n} \to 0$$
donne $\det B = 0$.

**Exercice 22 :** [énoncé]
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de l'espace des colonnes,
$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(A_1, \dots, A_n)$$
et
$$\det B = \det_{\mathcal{B}}(B_1, \dots, B_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n B_i, B_2, \dots, B_n\right)$$
avec
$$\sum_{i=1}^n B_i = (n-1)\sum_{i=1}^n A_i$$
Par suite
$$\det B = (n-1)\det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, B_2 - \sum_{i=1}^n A_i, \dots, B_n - \sum_{i=1}^n A_i\right)$$
Ce qui donne
$$\det B = (n-1)\det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, -A_2, \dots, -A_n\right) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1, \dots, A_n)$$
Finalement
$$\det B = (-1)^{n-1}(n-1)\det A$$

**Exercice 23 :** [énoncé]
Notons que pour $n = 1$ : la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout $A$ et tout $X$.
On suppose dans la suite $n \geq 2$.
Pour $X = A$, la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2\det A$ et donc $\det A = 0$.
La matrice $A$ n'est donc par inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec $P, Q$ inversibles et
$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$
Posons alors $X = QJ'_rP$ avec
$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$
Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$.
On en déduit que la matrice $J'_r$ est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

**Exercice 24 :** [énoncé]
La matrice $H$ est équivalente à la matrice $J_1$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position $(1,1)$. Notons $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$H = QJ_1P$$

et introduisons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ déterminée par

$$A = QBP$$

La relation

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq \det A^2$$

équivaut alors à la relation

$$\det(B+J_1)\det(B-J_1) \leq \det B^2$$

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $B$ et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\det(B+J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1+E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B-J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1-E_1, C_2, \dots, C_n)$$

Par multilinéarité du déterminant

$$\det(B+J_1) = \det B + \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B-J_1) = \det B - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)$$

d'où l'on tire

$$\det(B+J_1)\det(B-J_1) = \det B^2 - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)^2 \leq \det B^2$$

**Exercice 25 :** [énoncé]
En retranchant la première ligne aux autres lignes, le déterminant de la matrice $A + xJ$ apparaît comme le déterminant d'une matrice où figure des $x$ seulement sur la première ligne. En développant selon cette ligne, on obtient que $\det(A + xJ)$ est une fonction affine de la variable $x$.
De plus

$$\det(A - xJ) = \det(-{}^tA - xJ) = (-1)^{2n}\det({}^tA + xJ)$$

et puisque la matrice $J$ est symétrique

$$\det(A - xJ) = \det({}^tA + x{}^tJ) = \det(A + xJ)$$

La fonction affine $x \mapsto \det(A - xJ)$ est donc une fonction paire et par conséquent c'est une fonction constante. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det(A + 0.J) = \det A$$

**Exercice 26 :** [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons la propriété vérifiée pour $n \geq 1$.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés énoncées. En développant le déterminant de $A$ selon la première ligne, on obtient

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1,j}\Delta_{1,j}$$

avec $\Delta_{1,j}$ mineur d'indice $(1,j)$ de la matrice $A$.
Puisque la matrice définissant le mineur $\Delta_{1,j}$ est à coefficients positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne est inférieure à 1, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et affirmer $|\Delta_{1,j}| \leq 1$.
On en déduit

$$|\det A| \leq \sum_{j=1}^{n+1} a_{1,j} \leq 1$$

Récurrence établie.

**Exercice 27 :** [énoncé]

(a) En développant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

(b) En sommant les colonnes sur la première et en factorisant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

En retirant la première ligne aux suivante et en développant sur la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-a & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$$

(c) En retranchant la première colonne aux suivantes puis en sommant les colonnes sur la première

$$D=\begin{vmatrix}a+b & b+c & c+a\\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2\\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a+b & c-a & c-b\\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2\\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2c & c-a & c-b\\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2\\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3\end{vmatrix}$$

En factorisant par 2 puis en retranchant la première colonne aux suivantes

$$D=2\begin{vmatrix}c & -a & -b\\ c^2 & -a^2 & -b^2\\ c^3 & -a^3 & -b^3\end{vmatrix}$$

Enfin en factorisant on se ramène à un déterminant de Vandermonde

$$D=2abc\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ c & a & b\\ c^2 & a^2 & b^2\end{vmatrix}=2abc\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-c & b-c\\ 0 & a^2-c^2 & b^2-c^2\end{vmatrix}$$

Finalement

$$D=2abc(a-c)(b-c)\begin{vmatrix}1 & 1\\ a+c & b+c\end{vmatrix}=2abc(a-c)(b-c)(b-a)$$

(d) En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la dernière)

$$D=\begin{vmatrix}a & a & a & a\\ a & b & b & b\\ a & b & c & c\\ a & b & c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a & a & a\\ 0 & b-a & b-a & b-a\\ 0 & 0 & c-b & c-b\\ 0 & 0 & 0 & d-c\end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)(d-c)$$

(e) En sommant toutes les colonnes sur la première et en factorisant

$$D=\begin{vmatrix}a & c & c & b\\ c & a & b & c\\ c & b & a & c\\ b & c & c & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b+2c & c & c & b\\ a+b+2c & a & b & c\\ a+b+2c & b & a & c\\ a+b+2c & c & c & a\end{vmatrix}=(a+b+2c)\begin{vmatrix}1 & c & c & b\\ 1 & a & b & c\\ 1 & b & a & c\\ 1 & c & c & a\end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne aux suivantes et en factorisant

$$D=(a+b+2c)\begin{vmatrix}1 & c & c & b\\ 0 & a-c & b-c & c-b\\ 0 & b-c & a-c & c-b\\ 0 & 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}$$

donc

$$D=(a+b+2c)(a-b)\begin{vmatrix}a-c & b-c\\ b-c & a-c\end{vmatrix}=(a+b+2c)(a-b)((a-c)^2-(b-c)^2)$$

puis

$$D=(a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c)$$

(f) En retirant la première colonne aux suivantes

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \cos a & \cos b & \cos c\\ \sin a & \sin b & \sin c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \cos a & \cos b-\cos a & \cos c-\cos a\\ \sin a & \sin b-\sin a & \sin c-\sin a\end{vmatrix}$$

Par la formule de factorisation

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$D=-4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\begin{vmatrix}\sin\frac{b+a}{2} & \sin\frac{c+a}{2}\\ \cos\frac{b+a}{2} & \cos\frac{c+a}{2}\end{vmatrix}$$

puis

$$D=-4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{b-c}{2}$$

**Exercice 28 :** [énoncé]

$$\det(a_{\max(i,j)})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque colonne la précédente (en commençant par la première)

$$\det(a_{\max(i,j)})=\begin{vmatrix}a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & a_n\\ 0 & a_2-a_3 & & a_{n-1}-a_n & a_n\\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & \ddots & a_{n-1}-a_n & a_n\\ (0) & & & 0 & a_n\end{vmatrix}$$

et donc

$$\det(a_{\max(i,j)})=(a_1-a_2)(a_2-a_3)\dots(a_{n-1}-a_n)a_n$$

Pour $a_i = i$,

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (-1)^{n-1} n$$

Pour $a_i = n + 1 - i$,

$$\det(a_{\min(i,j)}) = 1$$

**Exercice 29 :** [énoncé]

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & a_1 - a_2 & \\ (0) & & & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1 - a_2)^{n-1} \text{ via } \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ \vdots \\ C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n \end{matrix}$$

**Exercice 30 :** [énoncé]
Via $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (dans cet ordre)

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ & & 3 & \cdots & 3 \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & n \end{vmatrix} = n!$$

**Exercice 31 :** [énoncé]

(a) ${}^t AA = \operatorname{diag}(\delta, \delta, \delta, \delta)$ avec $\delta = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Par suite $\det A = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.
Or $b, c, d$ fixés, par développement de déterminant, l'expression de $\det A$ est un polynôme en $a$ unitaire de degré 4 donc

$$\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

(b) Avec des notations immédiates : $AA' = A''$ avec :

$$\begin{cases} a'' = aa' - bb' - cc' - dd' \\ b'' = ab' + b'a + cd' - dc' \\ c'' = ac' - bd' + ca' + db' \\ d'' = ad' + bc' - cb' + da' \end{cases}$$

Par égalité des déterminants et considération de signes

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 (a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2)^2$$

et les quantités suivantes étant positives

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2$$

avec $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$ par opérations.

**Exercice 32 :** [énoncé]

(a) En factorisant les colonnes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne $a$ fois la précédente

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

et enfin en développant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

(b) En séparant la première colonne en deux

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Puis en procédant à des combinaisons judicieuses sur les colonnes

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}$$

Enfin, par permutation des colonnes dans le deuxième déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

**Exercice 33 :** [énoncé]
En sommant toutes les colonnes sur la première

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la fin)

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

On développe selon la première colonne et on se ramène à

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

avec $a = 1-n$ et $b = 1$. La poursuite du calcul donne alors

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}n^{n-2}$$

d'où la formule proposée.

**Exercice 34 :** [énoncé]

(a) En retirant la première colonne aux suivantes

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a - \lambda_1 & \cdots & a - \lambda_1 \\ b + x & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b + x & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Puis en développant selon la première colonne on obtient une expression de la forme.

$$\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$$

(b) Par déterminant triangulaire

$$\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a} \text{ et}$$
$$\beta = \frac{b\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a\prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a}$$

**Exercice 35 :** [énoncé]
En retirant la première colonne aux autres, on obtient un déterminant où ne figurent des $x$ que sur la première colonne. En développant selon cette première colonne, on obtient une expression affine de la variable $x$.

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix} = \alpha x + \beta$$

Il reste à déterminer les réels $\alpha, \beta$ exprimant cette fonction affine.
D'une part

$$\beta = \begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n$$

et d'autre part

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}'_{x=0}$$

La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants obtenus lorsqu'on ne dérive qu'une colonne

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & (0) \\ & \vdots & \\ (0) & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

où la colonne formée de 1 est à la position $j$. Chaque déterminant se calcule en développant selon la ligne ne contenant que le coefficient 1 et l'on obtient

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} a_i$$

**Exercice 36 :** [énoncé]

(a) Par l'absurde, supposons que $P_n$ possède une racine multiple $z$. Celle-ci vérifie

$$P_n(z) = P_n'(z) = 0$$

On en tire

$$z^n - z + 1 = 0 (1) \text{ et } nz^{n-1} = 1 \ (2)$$

(1) et (2) donnent

$$(n-1)z = n \ (3)$$

(2) impose $|z| \leq 1$ alors que (3) impose $|z| > 1$. C'est absurde.

(b) Posons $\chi(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice étudiée. On vérifie

$$\chi(z_i) = \begin{vmatrix} 1+z_1-z_i & & 1 & & (1) \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & & \\ (1) & & 1 & & 1+z_n-z_i \end{vmatrix}$$

En retranchant la $i$-ème colonne à toutes les autres et en développant par rapport à la $i$ème ligne, on obtient

$$\chi(z_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (z_j - z_i) = (-1)^{n-1} P'(z_i)$$

Cependant les polynômes $\chi$ et $P'$ ne sont pas de même degré... En revanche, les polynômes $\chi$ et $(-1)^n(P - P')$ ont même degré $n$, même coefficient dominant $(-1)^n$ et prennent les mêmes valeurs en les $n$ points distincts $z_1, \dots, z_n$. On en déduit qu'ils sont égaux. En particulier le déterminant cherché est

$$\chi(0) = (-1)^n \left(P(0) - P'(0)\right) = 2(-1)^n$$

**Exercice 37 :** [énoncé]

On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a+\lambda_1 \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \lambda_1 E_1 + aC$$

avec $E_1$ colonne élémentaire et $C$ colonne constituée de 1.
On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$\det H = \det\left(\lambda_1 E_1 + aC, \dots, \lambda_n E_n + aC\right)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne $C$ apparaît deux fois. On obtient

$$\det H = \det(\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda_1 E_1, \dots, aC, \dots, \lambda_n E_n)$$

et donc

$$\det H = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + a \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k$$

**Exercice 38 :** [énoncé]

Notons $D_n$ le déterminant recherché.
On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1 E_1 + b_1 C$$

avec $E_1$ colonne élémentaire et $C$ colonne constituée de 1.
On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$D_n = \det\left(a_1 E_1 + b_1 C, \dots, a_n E_n + b_n C\right)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne $C$ apparaît deux fois. On obtient

$$D_n = \det(a_1 E_1 + \dots + a_n E_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(a_1 E_1, \dots, b_i C, \dots, a_n E_n)$$

et donc

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n} a_k$$

**Exercice 39 :** [énoncé]

(a) $\cos(0.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 0.
$\cos(1.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 1.
Par récurrence double, on montre que $\cos(jx_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré $j$ en exploitant la relation :

$$\cos\left((j+1)x_i\right)+\cos\left((j-1)x_i\right)=2\cos(x_i)\cos(jx_i)$$

On peut aussi par récurrence affirmer que le coefficient dominant de $\cos(jx_i)$ est $2^{j-1}$ pour $j\geq 1$.
On peut même être plus précis et affirmer que $\cos\left((j-1)x_i\right)$ est une expression polynomiale de degré $j-1$ en $\cos(x_i)$.

(b) $\det M_n$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus $n-1$.
Puisque $\cos(x_2),\dots,\cos(x_n)$ sont $n-1$ racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M_n=\lambda(x_2,\dots,x_n)\prod_{j=2}^{n}(\cos x_j-\cos x_1)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2,\dots,x_n)$ est polynomiale en $\cos(x_2)$ de degré au plus $n-2$ (car il y a déjà le facteur $\cos(x_2)-\cos(x_1)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3),\dots,\cos(x_n)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2,\dots,x_n)=\mu(x_3,\dots,x_n)\prod_{j=3}^{n}(\cos x_j-\cos x_2)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M_n=\alpha_n\prod_{1\leq i<j\leq n}(\cos x_j-\cos x_i)=\alpha_n P$$

Il reste à déterminer la valeur de $\alpha_n$ ...
Un calcul immédiat donne $\alpha_2=1$.
En développant selon la dernière ligne

$$\det M_n=\cos((n-1)x_n)\det M_{n-1}+\cdots$$

où les points de suspensions contiennent une expression polynomiale en $\cos(x_n)$ de degré $<n-1$.
En identifiant les coefficients dominant des expressions polynomiale en $\cos(x_n)$ dans cette égalité, on obtient

$$\alpha_n=2^{n-2}\alpha_{n-1}$$

Cette relation permet de conclure

$$\alpha_n=2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

**Exercice 40 :** [énoncé]

(a) Il y autant de facteurs que de paires $\{i,j\}$ *i.e.*

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

(b)

$$M=\begin{pmatrix}1&\cos x_1&\cos(2x_1)&\cos(3x_1)\\1&\cos x_2&\cos(2x_2)&\cos(3x_2)\\1&\cos x_3&\cos(2x_3)&\cos(3x_3)\\1&\cos x_4&\cos(2x_4)&\cos(3x_4)\end{pmatrix}$$

(c) La propriété est immédiate pour $j=1$ ou $j=2$.
Pour $j=3$, $\cos(2x_i)=2\cos^2 x_i-1$.
Pour $j=4$, $\cos(3x_i)=4\cos^3 x_i-3\cos x_i$.

(d) $\det M$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus 3.
Puisque $\cos(x_2),\cos(x_3),\cos(x_4)$ sont 3 racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M=\lambda(x_2,x_3,x_4)\prod_{j=2}^{4}(\cos x_1-\cos x_j)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2,x_3,x_4)$ est polynomiale $\cos(x_2)$ de degré au plus 2 (car il y a déjà le facteur $\cos(x_1)-\cos(x_2)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3),\cos(x_4)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2,\dots,x_n)=\mu(x_3,x_4)\prod_{j=3}^{4}(\cos x_2-\cos x_j)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M=\alpha\prod_{1\leq i<j\leq 4}(\cos x_i-\cos x_j)=\alpha P_4$$

Il reste à déterminer la valeur de $\alpha$ ...
Une démarche analogue à la précédente aurait donnée

$$\begin{vmatrix}1&\cos x_1&\cos(2x_1)\\1&\cos x_2&\cos(2x_2)\\1&\cos x_3&\cos(2x_3)\end{vmatrix}=\beta P_3$$

et

$$\begin{vmatrix}1&\cos x_1\\1&\cos x_2\end{vmatrix}=\gamma P_2 \text{ avec } \gamma=-1$$

En développant $\det M$ selon la dernière ligne et en considérant le coefficient dominant de $\det M$ vu comme polynôme en $\cos(x_3)$ on obtient

$$4\beta P_3 = (-1)^3 \alpha P_3$$

et de façon analogue on a aussi

$$2\gamma P_2 = (-1)^2 \beta P_2$$

On en déduit

$$\alpha = 8$$

Puisque $\operatorname{Card} \mathfrak{S}_4 = 24$, $\det M$ peut se voir comme la somme de 24 termes qui sont tous inférieurs à 1 en valeur absolue. On en déduit

$$|\det M| \leq 24$$

Certains des termes (par exemple $1 \times \cos(x_1) \times \cos(2x_2) \times \cos(3x_3)$) étant strictement inférieurs à 1 en valeur absolue, on a aussi

$$|\det M| < 24$$

**Exercice 41 :** [énoncé]
Par les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = D_{n-2}$$

Comme $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, on a

$$D_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

**Exercice 42 :** [énoncé]
Par les opérations élémentaires : $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$ on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & (1) \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 1 & (1) & & & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$$

La suite $(D_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double $-1$.
Sachant $D_1 = 0$ et $D_2 = -1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$$

**Exercice 43 :** [énoncé]
En décomposant la dernière colonne en somme de deux colonnes

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n & 0 \\ (1) & & & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

En retranchant la dernière colonne à chacune des autres

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & (0) & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & n-1 & 1 \\ (0) & & & 1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

En développant selon la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n & 0 \\ (1) & & & n \end{vmatrix}_{[n]} = nD_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$$

Par suite

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!}$$

donc

$$\frac{D_n}{n!} = D_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

puis

$$D_n = (1+H_n)n!$$

**Exercice 44 :** [énoncé]
En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_1^0 & C_1^1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-2}^{n-2} \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne, on obtient

$$D_n = D_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = D_1 = 1$$

**Exercice 45 :** [énoncé]
En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière) on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et en exploitant $C_p^0 = C_{p+1}^0$, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^0 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = D_n$$

Finalement

$$D_n = 1$$

**Exercice 46 :** [énoncé]
Cas $b = c$ :
C'est un calcul classique, on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ puis
$L_i \leftarrow L_i - L_1 (i = 2, \dots, n)$ pour triangulariser le déterminant et obtenir

$$\det A_n = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

Cas $b \neq c$ :
Posons $D_n = \det A_n$. À chaque ligne on retranche la précédente

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c-a & a-b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & c-a & a-b \end{vmatrix}$$

et on développe selon la dernière colonne

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \text{ avec } n \geq 2$$

Ainsi

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + b(a-b)(a-c)^{n-2} + \dots + b(a-b)^{n-2}(a-c)^1 + (a-b)^{n-1}D_1$$

Par sommation géométrique des premiers termes

$$D_n = b(a-c)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{a-b}{a-c}\right)^{n-1}}{1-\frac{a-b}{a-c}} + a(a-b)^{n-1}$$

puis après simplification

$$D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$$

**Exercice 47 :** [énoncé]
Par développement d'un déterminant tridiagonal,

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

La suite $(D_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2-(a+b)r+ab=0$ de racines $a$ et $b$.
Si $a \neq b$ alors on peut écrire $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ et compte tenu des valeurs initiales, on obtient

$$D_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

Si $a = b$ alors on peut écrire $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ et on parvient cette fois-ci à

$$D_n = (n+1)a^n$$

**Exercice 48 :** [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geq 2$

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$$

$(D_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2-(1+x^2)r+x^2=0$ de racines 1 et $x^2$.
Si $x^2 \neq 1$ alors $D_n = \lambda + \mu x^{2n}$ avec $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$
$D_0 = 1$ et $D_1 = 1+x^2$ donnent

$$D_n = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$$

Si $x^2 = 1$ alors $D_n = \lambda n + \mu$.
$D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n+1$$

**Exercice 49 :** [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geq 2$

$$D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$$

$(D_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$ de racines $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
Si $\theta \neq 0 \quad [\pi]$ alors $D_n = \lambda\cos n\theta + \mu\sin n\theta$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2\cos\theta$ donnent

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta = 2\cos\theta \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1/\tan\theta \end{cases}$$

Ainsi

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Si $\theta = 0 \quad [2\pi]$ alors $D_n = \lambda n + \mu$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n+1$$

Si $\theta = \pi \quad [2\pi]$ alors $D_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = (-1)^n(n+1)$$

**Exercice 50 :** [énoncé]
En développant selon la première colonne, puis la première ligne et en recommençant : $D_n = (-n) \times 1 \times (2-n) \times 3$ etc...
Si $n$ est pair le développement s'arrête sur le calcul de

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si $n$ est impair le développement s'arrête par l'étape

$$\begin{vmatrix} 0 & n-2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3(n-2)\begin{vmatrix} 0 & n \\ 1 & n \end{vmatrix} = 3n(n-2)$$

En écrivant $n = 2p+1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{p+1}(1 \times 3 \times \cdots \times 2p+1)^2$$

**Exercice 51 :** [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geq 2$

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

$(D_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2ar + a^2 = 0$ de racines double $a$.
On a alors $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
$D_0 = 1$ et $D_1 = 2a$ donnent

$$D_n = (n+1)a^n$$

**Exercice 52 :** [énoncé]
D'une part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{vmatrix} = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

**Exercice 53 :** [énoncé]

(a) Après calculs

$$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$$

On a donc

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \iff \lambda = 1, 2 \text{ ou } 4$$

(b) Après résolution de l'équation $f(x) = \lambda x$ pour $\lambda = 1, 2$ ou $4$, on obtient

$$\varepsilon_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3, \varepsilon_2 = e_1 - e_2 + e_3 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$$

convenables.

**Exercice 54 :** [énoncé]
Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On sait

$$\det(A + xB) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i),i} + x b_{\sigma(i),i})$$

La fonction $x \mapsto \det(A + xB)$ est continue (car polynomiale) et ne s'annule pas en 0 (car $\det(A) \neq 0$), donc elle ne s'annule pas sur un voisinage de 0 ce qui résout le problème posé.

**Exercice 55 :** [énoncé]

(a) En écrivant la première colonne comme somme de deux colonnes on obtient

$$\det M = 1 - (-1)^n \alpha^n$$

(b) Si $\det M \neq 0$ alors $M$ est inversible et $\operatorname{rg} M = n$.
Si $\det M = 0$ alors $M$ n'est pas inversible donc $\operatorname{rg} M < n$.
Or $M$ possède une matrice extraite de rang $n-1$ donc $\operatorname{rg} M = n-1$.
Finalement

$$\operatorname{rg} M = \begin{cases} n-1 & \text{si } -\alpha \in U_n \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 56 :** [énoncé]
Soit $A$ une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Le déterminant de $A$ ainsi que celui de son inverse sont des entiers. Puisque

$$\det A \times \det A^{-1} = 1$$

on en déduit $\det A = \pm 1$. Inversement, si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est de déterminant $\pm 1$ alors son inverse, qui s'exprime à l'aide de la comatrice de $A$, est à coefficients entiers. Ainsi les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices à coefficients entiers de déterminant $\pm 1$.
Soit $A$ une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est formée par les entiers $a_1, \ldots, a_n$. En développant le calcul de $\det A$ selon la première ligne de la matrice, on obtient une relation de la forme

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 1$$

avec les $u_k$ égaux, au signe près, à des mineurs de la matrice $A$. Ces $u_k$ sont donc des entiers et la relation qui précède assure que les entiers $a_1, \ldots, a_n$ sont premiers dans leur ensemble.
Pour établir la réciproque, raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$ pour établir qu'il existe une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1, dont la première ligne est $a_1, \ldots, a_n$ premiers dans leur ensemble.
Pour $n = 2$. Soient $a, b$ deux entiers premiers entre eux. Par l'égalité de Bézout, on peut écrire

$$au + bv = 1 \text{ avec } u, v \in \mathbb{Z}$$

Considérons alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -v & u \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

Celle-ci étant de déterminant 1, elle appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.
Soient $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ des entiers premiers dans leur ensemble. Posons

$$d = \operatorname{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$$

Les entiers $d$ et $a_{n+1}$ étant premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$du + a_{n+1}v = 1$$

De plus, on peut écrire

$$a_1 = da_1', \dots, a_n = da_n'$$

avec $a_1', \dots, a_n'$ premiers dans leur ensemble.
Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a_1' & a_2' & \cdots & a_n' \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

de déterminant 1.
Considérons alors la matrice

$$\begin{pmatrix} da_1' & da_2' & \cdots & da_n' & a_{n+1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} & 0 \\ -va_1' & -va_2' & \cdots & -va_n' & u \end{pmatrix}$$

Celle-ci est à coefficients entiers et en développant son déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient 1.
Récurrence établie.

**Exercice 57 :** [énoncé]
On a $H^{-1} = \frac{1}{\det H} {}^t\operatorname{Com} H$ avec $\operatorname{Com} H = (H_{i,j})$.
Par opérations élémentaires,

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} (a_i + b_j)}$$

En simplifiant les facteurs communs, on obtient

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = \frac{(-1)^{k+\ell}(n+k-1)!(n+\ell-1)!}{(k+\ell-1)(k-1)!^2(\ell-1)!^2(n-k)!(n-\ell)!}$$

puis

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = (-1)^{k+\ell}(k+\ell-1)\binom{n+k-1}{k+\ell-1}\binom{n+\ell-1}{k+\ell-1}\binom{k+\ell-2}{k-1} \in \mathbb{Z}$$

**Exercice 58 :** [énoncé]

(a) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$\begin{cases} x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ y = \frac{(d-a)(c-a)(c-d)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ z = \frac{(b-a)(d-a)(d-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \end{cases}$$

(b) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)(d+b+c)}{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$$

et $y$, $z$ par symétrie.

**Exercice 59 :** [énoncé]
Le système est de Cramer via déterminant de Vandermonde.
$(1) + (2) + (3)$ donne

$$x = \frac{a+b+c}{3}$$

$(1) + j^2(2) + j(3)$ donne

$$y = \frac{a + bj^2 + cj}{3}$$

et $(1) + j(2) + j^2(3)$ donne

$$z = \frac{a + bj + cj^2}{3}$$

**Exercice 60 :** [énoncé]
Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \bar{a} & 1 & a \\ \bar{a}^2 & \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & \bar{a}(1-|a|^2) & 1-|a|^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & 0 & 1-|a|^2 \end{vmatrix}$$

Si $|a| \neq 1$ alors est le système est de Cramer et homogène

$$\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$$

Si $|a| = 1$ alors le système équivaut à une seule équation

$$x + ay + a^2 z = 0$$

car les deux autres lui sont proportionnelles. On en déduit

$$\mathcal{S} = \left\{(-ay - a^2 z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{C}\right\}$$

**Exercice 61 :** [énoncé]
Les deux systèmes proposés sont de Cramer via déterminant de Vandermonde.

(a) Si $x, y, z$ est sa solution alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ et donc

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)$$

On en déduit

$$x = abc, y = -(ab+bc+ca) \text{ et } z = a+b+c$$

(b) Introduisons

$$P = X^4 - (x + yX + zX^2)$$

Si $x, y, z$ est solution alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ et donc

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$$

Puisque le coefficient de $X^3$ dans $P$ est nul, la somme des racines de $P$ est nulle et donc

$$a + b + c + d = 0$$

puis

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X+(a+b+c))$$

En développant, on obtient

$$x = \sigma_3\sigma_1, y = \sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 \text{ et } z = \sigma_1^2 - \sigma_2$$

avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les expressions symétriques élémentaires en $a, b, c$.

**Exercice 62 :** [énoncé]

(a) Si $\text{rg}(A) = n$ alors $A$ est inversible et sa comatrice l'est alors aussi donc

$$\text{rg}(\text{Com}(A)) = n$$

Si $\text{rg}(A) \leq n-2$ alors $A$ ne possède pas de déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul. Par suite $\text{Com}(A) = O_n$ et donc

$$\text{rg}(\text{Com}(A)) = 0$$

Si $\text{rg}(A) = n-1$, exploitons la relation $A^t\,\text{Com}(A) = \det(A).I_n = O_n$.
Soient $f$ et $g$ les endomorphismes de $K^n$ canoniquement associés aux matrices $A$ et ${}^t\,\text{Com}(A)$.
On a $f \circ g = 0$ donc $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$. Comme $\text{rg}(f) = n-1$, $\dim \text{Ker}(f) = 1$ et par suite $\text{rg}(g) \leq 1$.
Ainsi $\text{rg}(\text{Com}(A)) \leq 1$.
Comme $\text{rg}(A) = n-1$, il existe un déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et par suite $\text{Com}(A) \neq O_n$.
Finalement

$$\text{rg}(\text{Com}(A)) = 1$$

(b) Comme $A^t\,\text{Com}(A) = \det(A).I_n$ on a

$$\det(A)\det\bigl(\text{Com}(A)\bigr) = \bigl(\det(A)\bigr)^n$$

Si $\det(A) \neq 0$ alors

$$\det\bigl(\text{Com}(A)\bigr) = \bigl(\det(A)\bigr)^{n-1}$$

Si $\det(A) = 0$ alors $\text{rg}(\text{Com}(A)) \leq 1 < n$ donc

$$\det(\text{Com}(A)) = 0$$

(c) Si $\text{rg}(A) = n$ alors

$${}^t\,\text{Com}(\text{Com}(A)).\,\text{Com}(A) = \det(\text{Com}(A)).I_n = \det(A)^{n-1}.I_n$$

Donc

$${}^t\,\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}\,\text{Com}(A)^{-1}$$

Or ${}^t\,\text{Com}(A).A = \det(A).I_n$ donc

$${}^t\,\text{Com}(A) = \det(A).A^{-1}$$

puis sachant ${}^t(B)^{-1} = ({}^tB)^{-1}$ on a :

$$\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-2}A$$

Si $\operatorname{rg}(A) \leq n-1$ et $n \geq 3$ alors $\operatorname{rg}\big(\operatorname{Com}(A)\big) \leq 1 \leq n-2$ donc

$$\operatorname{Com}(\operatorname{Com}(A)) = O_n$$

Si $n = 2$ alors pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Com}(\operatorname{Com}(A)) = A$$

**Exercice 63 :** [énoncé]
Cas $A$ et $B$ inversibles
Puisque $A$ et $B$ commutent, leurs inverses commutent aussi
On en déduit

$$\frac{1}{\det A}{}^t(\operatorname{Com} A)\frac{1}{\det B}{}^t(\operatorname{Com} B) = \frac{1}{\det B}{}^t(\operatorname{Com} B)\frac{1}{\det A}{}^t(\operatorname{Com} A)$$

En simplifiant et en transposant on obtient

$$\operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B) = \operatorname{Com}(B)\operatorname{Com}(A)$$

Cas général
Pour $p$ assez grand, les matrices

$$A + \frac{1}{p}I_n \text{ et } B + \frac{1}{p}I_n$$

sont inversibles et commutent donc

$$\operatorname{Com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)\operatorname{Com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right) = \operatorname{Com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right)\operatorname{Com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient

$$\operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B) = \operatorname{Com}(B)\operatorname{Com}(A)$$

**Exercice 64 :** [énoncé]

(a) On sait $AB = BA = \det(A)I_n$.
Si $\operatorname{rg} A = n$ alors $A$ est inversible donc $B$ aussi et $\operatorname{rg} B = n$.
Si $\operatorname{rg} A = n-1$ alors $\dim\operatorname{Ker} A = 1$ et puisque $AB = O_n$, $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$ puis $\operatorname{rg} B \leq 1$.
De plus, la matrice $A$ étant de rang exactement $n-1$, elle possède un mineur non nul et donc $B \neq O_n$. Finalement $\operatorname{rg} B = 1$.
Si $\operatorname{rg} A \leq n-2$ alors tous les mineurs de $A$ sont nuls et donc $B = O_n$ puis $\operatorname{rg} B = 0$.

(b) Puisque $\operatorname{rg} A = n-1$, $\dim\operatorname{Ker} A = 1$ et $\dim\operatorname{Ker}{}^tA = 1$.
Il existe donc deux colonnes $X$ et $Y$ non nulles telles que

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} X \text{ et } \operatorname{Ker}{}^tA = \operatorname{Vect} Y$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AM = MA = O_n$.
Puisque $AM = O_n$, $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} X$ et donc on peut écrire par blocs

$$M = (\lambda_1 X \mid \ldots \mid \lambda_n X) = XL$$

avec $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
La relation $MA = O_n$ donne alors $XLA = O_n$ et puisque $X \neq 0$, on obtient $LA = 0$ puis ${}^tA{}^tL = 0$. Ceci permet alors d'écrire $L$ sous la forme $L = \lambda{}^tY$ puis $M$ sous la forme

$$M = \lambda X{}^tY$$

Inversement une telle matrice vérifie $AM = MA = O_n$ et donc

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA = O_n\} = \operatorname{Vect}(X{}^tY)$$

Cet espace de solution étant une droite et la matrice $B$ étant un élément non nul de celle-ci, il est dès lors immédiat d'affirmer que toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AC = CA = O_n$ est nécessairement colinéaire à $B$.

**Exercice 65 :** [énoncé]
Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u\det A + v\det B = 1$. $U = u^t(\operatorname{Com} A)$ et $V = v^t(\operatorname{Com} B)$ conviennent alors.

**Exercice 66 :** [énoncé]
Le coefficient d'indice $(i,j)$ de la comatrice de $S$ est

$$(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

avec $\Delta_{i,j}$ le mineur d'indice $(i,j)$ de la matrice $S$ *i.e.* le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne de $S$. Or le déterminant d'une matrice est aussi celui de sa transposée et puisque la matrice $S$ est symétrique, le mineur d'indice $(i,j)$ est égal à celui d'indice $(j,i)$. On en déduit que la comatrice de $S$ est symétrique.

**Exercice 67 :** [énoncé]
Considérons le polynôme
$$P(X)=(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$$
Celui-ci se développe sous la forme
$$P(X)=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\dots+\alpha_0$$
avec $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_k=(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ où les $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ désignent les expressions symétriques élémentaires en $a_1,\dots,a_n$.
En procédant à l'opération $C_n\leftarrow C_n+\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_jC_{j+1}+\sum_{j=n}^{n-1}\alpha_jC_j$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en
$$P(a_i)-\alpha_ka_i^k=-\alpha_ka_i^k \text{ car } P(a_i)=0$$
Ainsi
$$D_k=(-1)^{n+1-k}\sigma_{n-k}\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^k\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^k\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^k\end{vmatrix}$$
En permutant de façon circulaire les $n-k$ dernières colonnes, on obtient
$$D_k=\sigma_{n-k}\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$
Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient
$$D_k=\sigma_{n-k}\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

**Exercice 68 :** [énoncé]
En développant selon la première ligne, on peut affirmer que $\Delta$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$.
Pour $k\in\{1,\dots,n\}$,
$$\Delta(\lambda_k)=(-1)^{k+1}\prod_{i\neq k}(\lambda_k-\lambda_i)V_{n-1}(\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_k,\dots,\lambda_n)=(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$
où $V_n(a_1,\dots,a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1,\dots,a_n)$.
Le polynôme $\Delta$ coïncide en $n$ point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, ils sont donc égaux.

**Exercice 69 :** [énoncé]

(a) On multiplie la matrice étudiée par une matrice triangulaire par blocs afin que le produit obtenu soit lui aussi triangulaire par blocs.

On a
$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & \mathrm{O}_n\\ -C & \mathrm{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AD-BC & B\\ \mathrm{O}_n & D\end{pmatrix}.$$
Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux. En calculant le déterminant des deux membres
$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\det D=\det(AD-BC)\det D.$$
On conclut en simplifiant par $\det D$ ce qui est possible car $\det D\neq 0$.

(b) On introduit $D_\varepsilon=D+\varepsilon\mathrm{I}_n$ et on passe à la limite quand $\varepsilon$ tend vers $0^+$.

La matrice $D_\varepsilon$ commute avec $C$ et, pour $\varepsilon$ assez petit et strictement positif, il s'agit d'une matrice inversible[1] ce qui permet d'écrire
$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D_\varepsilon\end{pmatrix}=\det(AD_\varepsilon-BC).$$
Les deux membres de cette équation correspondent à des fonctions continues (car polynomiales) de la variable $\varepsilon$. On conclut en passant à la limite quand $\varepsilon$ tend vers $0^+$
$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det(AD-BC).$$

**Exercice 70 :** [énoncé]
Supposons pour commencer la matrice $A$ inversible.
Par opérations par blocs :
$$\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -A^{-1}C\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ B & D-BA^{-1}C\end{pmatrix}$$
On en déduit
$$\begin{vmatrix}A & C\\ B & D\end{vmatrix}=\det(D-BA^{-1}C)\det A=\det(DA-BA^{-1}CA)$$
Or les matrices $A$ et $C$ commutent donc $A^{-1}$ et $C$ commutent aussi et
$$\begin{vmatrix}A & C\\ B & D\end{vmatrix}=\det(DA-BC)$$

1. Le déterminant de $D_\varepsilon$ est la valeur du polynôme caractéristique de $-D$ en $\varepsilon$ et celui-ci ne possède qu'un nombre fini de racines.

Supposons $A$ non inversible.
Pour $p$ assez grand, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p}I$ est inversible et commute avec $C$ donc

$$\det\begin{pmatrix} A_p & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA_p - BC)$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, la continuité du déterminant donne

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

(d) Si $A$ est inversible, on remarque

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - CB)$ car $A$ et $C$ commutent.
On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :
Les applications $A \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $A \mapsto \det(AD - CB)$ sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec $C$. Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec $C$ : si $A$ commute avec $C$ alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit $A + \lambda I_n$ est inversible et commute avec $C$). Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

**Exercice 71 :** [énoncé]

(a) En multipliant les $n$ dernières lignes par $i$ et les $n$ dernières colonnes aussi :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & -A \end{pmatrix}$$

puis par opérations sur les lignes

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & iB \\ A - iB & -A + iB \end{pmatrix}$$

et par opérations sur les colonnes

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A + iB & iB \\ 0 & -A + iB \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det(A + iB)\det(-A + iB)$$

et enfin

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A + iB)\det(A - iB)$$

Les matrices $A$ et $B$ étant réelles, cette écriture est de la forme $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$.

(b) $\det(A + iB)\det(A - iB) = \det(A^2 + B^2)$ car $A$ et $B$ commutent donc $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

**Exercice 72 :** [énoncé]

(a) Par les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \dots, L_{2n} = L_{2n} + L_n$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n & B \\ B + I_n & I_n + B \end{vmatrix}$$

Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ O_n & I_n + B \end{vmatrix} = \det(I_n - B)\det(I_n + B)$$

Ainsi $A$ est inversible si, et seulement si, $I_n - B$ et $I_n + B$ le sont (*i.e.* $1, -1 \notin \operatorname{Sp} B$).
On aurait aussi pu étudier le noyau de $A$.

(b) On peut présumer que l'inverse de $A$ est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M + BN & N + BM \\ BM + N & BN + M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M + BN = I_n \\ BM + N = O_n \end{cases} \iff \begin{cases} M = \left(I_n - B^2\right)^{-1} \\ N = -B\left(I_n - B^2\right)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (I_n - B^2)^{-1} & -B(I_n - B^2)^{-1} \\ -B(I_n - B^2)^{-1} & (I_n - B^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

On aurait pu aussi inverser l'équation $AX = Y$

**Exercice 73 :** [énoncé]

On introduit

$$N = \begin{pmatrix} {}^tA' & O_{p,n-p} \\ {}^tB' & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} A^tA' + B^tB' & B \\ C^tA' + D^tB' & D \end{pmatrix}$$

Or

$$M^t(\operatorname{Com} M) = \begin{pmatrix} A^tA' + B^tB' & A^tC' + B^tD' \\ C^tA' + D^tB' & C^tC' + D^tD' \end{pmatrix} = (\det M)^n I_p$$

donc

$$MN = \begin{pmatrix} \det(M) I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

En passant cette relation au déterminant, on obtient

$$\det M \times \det {}^tA' = \det(M)^p \det D$$

puis facilement la relation proposée sachant $\det M \neq 0$.

**Exercice 74 :** [énoncé]

(a) Cas $D$ inversible

Sachant $C^tD = D^tC$, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tD & O_n \\ -{}^tC & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tD - B^tC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant on obtient la relation

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det {}^tD = \det \left(A^tD - B^tC\right) \det D$$

puis la relation voulue sachant $\det D = \det {}^tD \neq 0$

(b) Cas $D$ non inversible

Posons $r = \operatorname{rg} C$. On peut écrire $C = PJ_rQ$ avec $P, Q$ inversibles et $J_r$ la matrice (symétrique) dont tous les coefficients sont nuls sauf les $r$ premiers de la diagonale qui sont égaux à 1. Considérons alors $D' = D + \lambda P^tQ^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut écrire

$$D' = P\left(P^{-1}D^tQ + \lambda I_n\right){}^tQ^{-1}$$

Si $-\lambda$ n'est pas valeur propre de $P^{-1}D^tQ$, la matrice $D'$ est inversible. Puisqu'une matrice n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, la matrice $D'$ est assurément inversible quand $\lambda \to 0^+$ avec $\lambda$ assez petit.

De plus, $C^tD'$ est symétrique car

$$C^tD' - D'^tC = C^tD + \lambda PJ_rQQ^{-1t}P - D^tC - \lambda P^tQ^{-1t}Q^tJ_r{}^tP = 0$$

Par l'étude qui précède, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D' \end{pmatrix} = \det \left(A^tD' - B^tC\right)$$

et en passant à la limite quand $\lambda \to 0^+$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left(A^tD - B^tC\right)$$

**Exercice 75 :** [énoncé]

Cas où la matrice $A$ inversible :

Pour

$$P = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

on a

$$MP = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det M = \det(MP) = \det A \times \det(-CA^{-1}B + D)$$

Or

$$\det A \times \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - BC)$$

car la matrice $C$ commute avec les matrices $A$ et $B$.

On en déduit

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Cas général :
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ assez grand, la matrice $A_p = A + 1/pI_n$ est inversible et les matrices $A_p, B, C, D$ commutent deux à deux. Si on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} A_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'étude qui précède donne

$$\det M_p = \det(A_pD - BC)$$

En faisant tendre $p$ vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Il est alors immédiat de conclure que l'inversibilité de $M$ équivaut à celle de $AD - BC$.