Dérivation

Dérivabilité

Exercice 1 [01354] [Correction]
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$ (b) $x \mapsto (x^2 - 1)\arccos(x^2)$

Exercice 2 [00736] [Correction]
Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

(a) $x \mapsto x|x|$ (b) $x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$

Exercice 3 [00247] [Correction]
Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

(a) $f \colon x \mapsto \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (b) $g \colon x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Calcul de dérivées

Exercice 4 [01355] [Correction]
Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1}$ (b) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ (c) $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$

Exercice 5 [00737] [Correction]
Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto x^x$ (b) $x \mapsto (\operatorname{ch} x)^x$ (c) $x \mapsto \ln|x|$

Exercice 6 [00249] [Correction]
Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \arctan\big(\mathrm{e}^x\big), f_2(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) \text{ et } f_3(x) = \arctan\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right).$$

Qu'en déduire ?

Dérivation d'application réciproque

Exercice 7 [01367] [Correction]
Soit $f \colon [0\,;\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x.$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

Application de la dérivation

Exercice 8 [01365] [Correction]
Déterminer toutes les applications $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Calcul de limites

Exercice 9 [01357] [Correction]
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en soit pas une extrémité. Si le rapport

$$\frac{1}{2h}\big(f(a+h) - f(a-h)\big)$$

admet une limite finie quand h tend vers 0, celle-ci est appelée dérivée symétrique de f en a.

(a) Montrer que, si f est dérivable à droite et à gauche en a, elle admet une dérivée symétrique en a.

(b) Que dire de la réciproque ?

Calcul de dérivées n-ième

Exercice 10 [01362] [Correction]
Calculer la dérivée n-ième de

(a) $x \mapsto x^2(1+x)^n$

(b) $x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$

Exercice 11 [01361] [Correction]
Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ puis } x \mapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 12 [00251] [Correction]
Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 13 [00743] [Correction]
Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos^3 x$

Exercice 14 [03863] [Correction]
Calculons la dérivée n-ième de la fonction réelle $t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^t$.

Exercice 15 [01363] [Correction]
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin x$. Montrer que

$$f^{(n)}(x) = 2^n \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right).$$

Exercice 16 [00254] [Correction]
Montrer que la dérivée d'ordre n de $x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$ est

$$(-1)^n x^{-(n+1)} \mathrm{e}^{1/x}.$$

Exercice 17 [00252] [Correction]
Soit $f: x \mapsto \arctan x$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2).$$

(b) En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 18 [01364] [Correction]
En calculant de deux façons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$, établir

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 19 [05023] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\bigl(x^n \ln(x)\bigr) = n!\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

(b) En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Théorème de Rolle

Exercice 20 [01370] [Correction]
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas.
Montrer que f ne peut être périodique.

Exercice 21 [01371] [Correction]
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in \left]0\,;1\right[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Exercice 22 [00256] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.
Montrer que la dérivée de f s'annule.

Exercice 23 [01372] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I.

(a) Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.

(b) Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)$ -ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.
On pourra introduire une fonction auxiliaire.

Exercice 24 [00262] [Correction]
On pose $f\colon x \mapsto \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$.

(a) Montrer que f est une fonction polynomiale de degré n.

(b) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

(c) Montrer que f possède exactement n racines distinctes toutes dans $]-1\,;1[$.

Exercice 25 [02820] [Correction]
Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a, b, c trois points distincts de I.
Montrer

$$\exists d \in I, \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d).$$

Exercice 26 [01376] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b \in \mathbb{R}$ et $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.
Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0$$

alors il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 27 [01373] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 28 [01374] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{+\infty} f = f(0).$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 29 [01377] [Correction]
Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0\,;a]$ et dérivable sur $]0\,;a]$.
On suppose

$$f(0) = 0 \text{ et } f(a)f'(a) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \,]0\,;a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 30 [01380] [Correction]
Soit $a > 0$ et $f\colon [0\,;a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

(a) Montrer que la dérivée de $x \mapsto f(x)/x$ s'annule sur $]0\,;a[$.

(b) En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Exercice 31 [01375] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ et } f'(a) > 0, f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in \,]a\,;b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et

$$f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0.$$

Exercice 32 [03436] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que

$$f(c) = f''(c).$$

Indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire dépendant de $f(x)$, $f'(x)$ et e^x

Exercice 33 [05027] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable s'annulant en a et b.

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.

(b) Montrer qu'il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que $f'(c) + cf(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Exercice 34 [01386] [Correction]
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Montrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.

Exercice 35 [01382] [Correction]
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;a+2h]$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).
Montrer

$$\exists c \in \left]a\,;a+2h\right[, f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

On pourra introduire $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$.

Exercice 36 [01384] [Correction]
À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 37 [00267] [Correction]
Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Exercice 38 [01385] [Correction]
Montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

En déduire, pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

Exercice 39 [00727] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

(a) Si f'' est bornée, que dire de $f'(x)$ quand $x \to +\infty$?

(b) Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse du a) ?

Obtention d'inégalités

Exercice 40 [01383] [Correction]
Établir les inégalités suivantes :

(a) $\forall x \in \left]-1\,;+\infty\right[, \frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \mathrm{e}^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 41 [01402] [Correction]
Soit $p \in \left]0\,;1\right]$.

(a) Établir que pour tout $t \ge 0$, on a

$$(1+t)^p \le 1 + t^p.$$

(b) En déduire que pour tout $x, y \ge 0$,

$$(x+y)^p \le x^p + y^p.$$

Classe d'une fonction

Exercice 42 [01387] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 43 [01388] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique.
Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 44 [01389] [Correction]
Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 45 [01390] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction

$$f_n\colon x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 46 [01368] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2).$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est définie et continue sur $]-\infty\,;1]$.
Par opérations, f est dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[$.
Quand $h \to 0^+$,
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sqrt{1-h} \to 1$$
et quand $h \to 0^-$,
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} \to -1$$
f n'est pas dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivée à droite et à gauche.
Quand $h \to 0^-$,
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{-h-2h^2-h^3}}{h} \to -\infty$$
f n'est pas dérivable en 1, il y a une tangente verticale à son graphe en cet abscisse.

(b) $f(x) = (x^2-1)\arccos x^2$ est définie et continue sur $[-1\,;1]$.
Par opération f est dérivable sur $]-1\,;1[$.
Quand $h \to 0^-$,
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = (2+h)\arccos((1+h)^2) \to 0$$
f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.
Par parité, f est aussi dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) $f(x) = x|x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Quand $h \to 0^+$,
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = h \to 0$$
et quand $h \to 0^-$,
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = -h \to 0$$
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(b) $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Quand $h \to 0$,
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{|h|+1} \to 1$$
donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Quand $h \to 0$,
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$
n'a pas de limite. La fonction f n'est pas dérivable en 0.

(b) g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Quand $h \to 0$,
$$\frac{g(h)-g(0)}{h} = h\sin\left(\frac{1}{h}\right) \to 0.$$
La fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) $x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
$$\left(\frac{\arctan x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-2x\arctan x}{(x^2+1)^2}.$$

(b) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$,
$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' = \frac{-2}{(x+1)^3}.$$

(c) $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
$$\left(\frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}\right)' = \frac{\cos x}{(\cos x+2)^4} + \frac{4\sin^2 x}{(\cos x+2)^5} = \frac{4+2\cos x-3\cos^2 x}{(\cos x+2)^5}.$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) $x \mapsto x^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$(x^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln x})' = (1 + \ln x)x^x.$$

(b) $x \mapsto (\operatorname{ch} x)^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$((\operatorname{ch} x)^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln \operatorname{ch} x}\right)' = (\ln \operatorname{ch} x + x \operatorname{th} x)(\operatorname{ch} x)^x.$$

(c) $x \mapsto \ln|x|$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$,

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Exercice 6 : [énoncé]

$$f_1'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}, f_2'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \text{ et } f_3'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}.$$

On en déduit

$$f_1(x) = \frac{1}{2}f_2(x) + \frac{\pi}{4} = f_3(x) + \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 7 : [énoncé]

f est continue et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(\pi/2) = 1 + \pi/2$ donc f réalise une bijection de $[0\,;\pi/2]$ vers $[0\,;1+\pi/2]$ et son application réciproque f^{-1} est continue.

f est dérivable sur $]0\,;\pi/2]$ avec

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$$

donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0\,;\pi/2]) =]0\,;1+\pi/2]$.

Étude de la dérivabilité de f^{-1} en 0

Quand $h \to 0^+$, en posant $x = f^{-1}(h) \to 0$

$$\frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} = \frac{x}{f(x)}.$$

Or

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{\sin x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x} + \mathrm{o}(\sqrt{x}) + x} \sim \sqrt{x} \to 0$$

donc f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$.

Exercice 8 : [énoncé]

Soit f solution. En dérivant la relation par rapport à x, on obtient :

$$f'(x+y) = f'(x).$$

La fonction f est donc de dérivée constante et par suite f est affine.

De plus la relation $f(0+0) = f(0) + f(0)$ entraîne $f(0) = 0$ et donc f est linéaire.

Inversement : ok.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Si $f_d'(a)$ et $f_g'(a)$ existent alors

$$\frac{1}{2h}\big(f(a+h) - f(a-h)\big) = \frac{1}{2h}\big(f(a+h) - f(a)\big) + \frac{1}{-2h}\big(f(a-h) - f(a)\big)$$

et donc

$$\frac{1}{2h}\big(f(a+h) - f(a-h)\big) \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}\big(f_d'(a) + f_g'(a)\big).$$

(b) Pour $f(x) = \sqrt{|x|}$, la dérivée symétrique en 0 existe alors que la fonction n'y est pas dérivable ni à droite, ni à gauche.

Exercice 10 : [énoncé]

On exploite la formule de Leibniz

(a)

$$\big(x^2(1+x)^n\big)^{(n)} = \binom{n}{0}x^2\big((1+x)^n\big)^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2)'\big((1+x)^n\big)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)''\big((1+x)^n\big)^{(n$$

donc

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = n!x^2 + 2n.n!x(1+x) + n(n-1)\frac{n!}{2}(1+x)^2.$$

(b)

$$\big((x^2+1)\mathrm{e}^x\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2+1)^{(k)}(\mathrm{e}^x)^{(n-k)} = \big(x^2 + 2nx + n(n-1) + 1\big)\mathrm{e}^x.$$

Exercice 11 : [énoncé]
En calculant les dérivées successives

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

on montre par récurrence

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

De même, mais en gérant de plus un signe

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Enfin

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

Exercice 12 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}.$$

Or

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ et } \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) On a

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

donc on peut linéariser

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x).$$

On sait

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2) \text{ et } (\cos 3x)^{(n)} = 3^n \cos(3x + n\pi/2)$$

et on obtient donc

$$(\cos^3 x)^{(n)} = \frac{1}{4}\big(3\cos(x+n\pi/2) + 3^n\cos(3x+n\pi/2)\big).$$

Exercice 14 : [énoncé]
On peut écrire

$$\cos(t)\mathrm{e}^t = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\big)$$

et donc

$$(\cos(t)\mathrm{e}^t)^{(n)} = \big(\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t})\big)^{(n)} = \mathrm{Re}\big((1+\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\big).$$

Or $(1+\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}$ puis

$$(\cos(t)\mathrm{e}^t)^{(n)} = 2^{n/2}\mathrm{e}^t\cos(t + n\pi/4).$$

Exercice 15 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$f^{(n+1)}(x) = \left(2^n\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right)'$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n\left(\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right)\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}$$

puis

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}\sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{6}\right)\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}.$$

Récurrence établie.
On peut aussi écrire

$$f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin x = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{(\sqrt{3}+i)x}\big)$$

et exploiter ceci pour calculer directement la dérivée d'ordre n.

Exercice 16 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: ok.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$\left(x^n \mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = \left(x.x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = x\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} + (n+1)\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)}$$

donc

$$\left(x^n \mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = x\left((-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}\right)' + (n+1)(-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}$$

ce qui donne

$$\left(x^n \mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} x^{-(n+2)}\mathrm{e}^{1/x}.$$

Récurrence établie.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et}$$
$$\cos(f(x))\sin(f(x)+\pi/2) = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Supposons la propriété vérifiée au rang $n \geq 1$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{1+x^2}\begin{bmatrix} -\sin(f(x))\sin\left(nf(x)+n\pi/2\right) \\ +\cos\left(nf(x)+n\pi/2\right)\cos(f(x)) \end{bmatrix}\cos^{n-1}(f(x)).$$

Or

$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2(f(x))$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = n!\begin{bmatrix} \sin(f(x))\cos\left(nf(x)+(n+1)\pi/2\right) \\ +\sin\left(nf(x)+(n+1)\pi/2\right)\cos(f(x)) \end{bmatrix}\cos^{n+1}(f(x))$$

puis

$$f^{(n+1)}(x) = n!\sin\left((n+1)f(x)+(n+1)\pi/2\right)\cos^{n+1}(f(x)).$$

Récurrence établie.

(b) Puisque $\arctan x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, $\cos(f(x)) \neq 0$.
Par suite

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff \sin(nf(x)+n\pi/2) = 0$$

et donc

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff f(x) = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \text{ avec } k \in \{1,\dots,n-1\}.$$

Au final, les racines de $f^{(n)}$ sont les

$$\cot\frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in \{1,\dots,n-1\}.$$

Exercice 18 : [énoncé]

On sait[1]

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^n\right) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \quad \textit{pour tous } n,k \in \mathbb{N} \textit{ avec } k \leq n.$$

D'une part

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{2n}\right) = \frac{(2n)!}{n!}x^n. \tag{1}$$

D'autre part, on obtient par la formule de Leibniz,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{2n}\right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n \times x^n\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left(x^n\right)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^n\right)$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left(x^n\right) = \frac{n!}{k!}x^k \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^n\right) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}x^n. \tag{2}$$

L'identification des formules (**??**) et (**??**) donne

$$\frac{(2n)!}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 n!\,x^n \quad \text{car} \quad \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Il suffit ensuite de poser $x = 1$ et de réorganiser l'identité pour conclure

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

1. Voir sujet 4794.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) On remarque que la fonction $x \mapsto x^n \ln(x)$ est indéfiniment dérivable ce qui légitime le calcul de sa dérivée d'ordre n.
On établit l'identité proposée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, la propriété est immédiate car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\ln(x)\big) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Supposons l'identité vraie au rang $n \geq 1$.

Une dérivée d'ordre $n+1$ est la dérivée de la dérivée d'ordre n mais aussi la dérivée d'ordre n de la dérivée.

On écrit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(x^{n+1}\ln(x)\big) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^{n+1}\ln(x)\big)\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big((n+1)x^n\ln(x) + x^n\big)\\ &= (n+1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n\ln(x)\big) + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n\big).\end{aligned}$$

Par dérivation successives, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n\big) = n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\big(x^{n-1}\big) = \dots = n(n-1)\times\dots\times 1\times x^0 = n!\,.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on poursuit

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(x^{n+1}\ln(x)\big) = (n+1)\cdot n!\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \dots\frac{1}{n}\right) + n!\,.$$

Enfin, il suffit d'écrire $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$ pour conclure

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(x^{n+1}\ln(x)\big) = (n+1)!\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

La récurrence est établie.

(b) *On applique la formule de Leibniz.*

On obtient

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n\ln(x)\big) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\big(x^n\big)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big(\ln(x)\big)$$

avec [2]

$$\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\big(x^n\big) = \frac{n!}{k!}x^k \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big(\ln(x)\big) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k} \quad \text{pour } k \geq 1$$

ce qui donne

$$n!\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \underbrace{n!\,\ln(x)}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{n!}{k}.$$

Après simplification, on obtient la relation demandée.

Exercice 20 : [énoncé]

Si f est T-périodique avec $T > 0$ alors en appliquant le théorème de Rolle entre par exemple 0 et T, la dérivée de f s'annule.

Exercice 21 : [énoncé]

Soit $\varphi\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$$

φ est dérivable et $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.

Exercice 22 : [énoncé]

f admet un maximum sur $[a\,;b]$ qui ne peut être ni en a, ni en b : la dérivée de f s'y annule.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) Notons $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ les $n+1$ points où nous savons que f s'annule.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on peut appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a_{i-1}\,;a_i]$.
En effet f est continue sur $[a_{i-1}\,;a_i]$, dérivable sur $]a_{i-1}\,;a_i[$ et $f(a_{i-1}) = 0 = f(a_i)$.
Par le théorème de Rolle, il existe $b_i \in\,]a_{i-1}\,;a_i[$ tel que $f'(b_i) = 0$.
Puisque $b_1 < a_1 < b_2 < \dots < a_{n-1} < b_n$, les $b_1, \ldots, b_n$ sont deux à deux distincts.
Ainsi f' s'annule au moins n fois.
De même, f'' s'annule au moins $n-1$ fois et ainsi de suite jusqu'à $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

2. Voir sujet New4794.

(b) Considérons $g(x) = f(x)e^{\alpha x}$. g s'annule $n+1$ fois donc g' s'annule au moins n fois.
Or $g'(x) = \big(f'(x) + \alpha f(x)\big)e^{\alpha x}$ donc les annulations de g' sont les annulations de $f' + \alpha f$.
Puisque $f' + \alpha f$ s'annule n fois, la dérivée $(n-1)$-ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ donc $\big((X^2-1)^n\big)^{(n)}$ est de degré n.

(b) Introduisons $g\colon x \mapsto (x^2-1)^n$ de sorte que $f = g^{(n)}$
Quand $x \to 1$ On a

$$g(x) = (x+1)^n(x-1)^n = 2^n(x-1)^n + \mathrm{o}\big((x-1)^n\big).$$

Par la formule de Taylor-Young, on a parallèlement

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \mathrm{o}\big((x-1)^n\big)$$

donc

$$f(1) = g^{(n)}(1) = 2^n n!$$

et de manière similaire

$$f(-1) = (-1)^n 2^n n!$$

(c) 1 et -1 sont racines de multiplicité n de $g\colon x \mapsto (x^2-1)^n$, 1 et -1 sont donc racines de $g, g', \dots, g^{(n-1)}$.
En appliquant le théorème de Rolle, on montre que $g', g'', \dots, g^{(n)} = f$ admettent resp. $1, 2, \dots, n$ racines dans $]-1\,;1[$. Puisque f est de degré n, celles-ci sont simples et il ne peut y en avoir d'autres.

Exercice 25 : [énoncé]
Considérons

$$g\colon x \mapsto (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - \frac{1}{2}(a-b)(b-x)(x-a)K$$

où la constante K est choisie de sorte que $g(c) = 0$ (ce qui est possible).
La fonction g s'annule en a, en b et en c donc par le théorème de Rolle, il existe $d \in I$ tel que $g''(d) = 0$ ce qui résout le problème posé.

Exercice 26 : [énoncé]
En appliquant le théorème de Rolle à f entre a et b : il existe $c_1 \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à f' entre a et c_1 : il existe $c_2 \in\,]a\,;c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.
...
En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n-1)}$ entre a et c_{n-1} : il existe $c_n \in\,]a\,;c_{n-1}[$ tel que $f^{(n)}(c_n) = 0$.
$c = c_n$ résout le problème.

Exercice 27 : [énoncé]
Puisque $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe $a < 0$ et $b > 0$ tels que

$$f(a) > f(0) + 1 \text{ et } f(b) > f(0) + 1.$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre a et 0, d'une part, et 0 et b d'autre part, il existe $\alpha \in\,]a\,;0[$ et $\beta \in\,]0\,;b[$ tels que $f(\alpha) = f(0) + 1 = f(\beta)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre α et β, il existe $c \in\,]\alpha\,;\beta[\, \subset \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 28 : [énoncé]
Si f est constante, la propriété est immédiate.
Sinon, il existe $x_0 \in\,]0\,;+\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$.
Posons $y = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(0))$ qui est une valeur intermédiaire à $f(0)$ et $f(x_0)$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in\,]0\,;x_0[$ tel que $f(a) = y$.
Puisque $\lim_{+\infty} f = f(0)$, y est une valeur intermédiaire à $f(x_0)$ et une valeur $f(x_1)$ avec x_1 suffisamment grand. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in\,]x_0\,;x_1]$ tel que $f(b) = y$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[a\,;b]$, on peut alors conclure.

Exercice 29 : [énoncé]
Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$.
Puisque $f'(a) < 0$, il existe $b \in\,]0\,;a[$ tel que $f(b) > f(a)$.
En appliquant le théorème de valeurs intermédiaires entre 0 et b, il existe $\alpha \in\,]0\,;b[$ tel que $f(\alpha) = f(a)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre α et a, on obtient $c \in\,]\alpha\,;a[\, \subset\,]0\,;a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) La fonction $g\colon x \mapsto f(x)/x$ est définie, continue et dérivable sur $]0\,;a]$.
Quand $x \to 0$,
$$g(x) \to f'(0) = 0.$$
Prolongeons g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
Puisque g est continue sur $[0\,;a]$, dérivable sur $]0\,;a[$ et puisque $g(0) = g(a)$, le théorème de Rolle assure l'annulation de la dérivée de g en un point $c \in\,]0\,;a[$.

(b)
$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$
donc $g'(c) = 0$ donne $cf'(c) = f(c)$.
La tangente à f en c a pour équation :
$$y = f'(c)(x - c) + f(c) = f'(c)x.$$
Elle passe par l'origine.

Exercice 31 : [énoncé]
Puisque $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, il existe $x_1 \in\,]a\,;b[$ tel que $f(x_1) > 0$.
En effet, si pour tout $x_1 \in\,]a\,;b[$, $f(x_1) \le 0$ alors quand $h \to 0^+$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0$ et donc $f'(a) \le 0$.
De même, puisque $f(b) = 0$ et $f'(b) > 0$, il existe $x_2 \in\,]a\,;b[$ tel que $f(x_2) < 0$.
Puisque f prend une valeur positive et une valeur négative dans $]a\,;b[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'y annule.
Ainsi il existe $c_2 \in\,]a\,;b[$ tel que $f(c_2) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[a\,;c_2]$ et $[c_2\,;b]$, on obtient c_1 et c_3.

Exercice 32 : [énoncé]
Introduisons $\varphi\colon x \mapsto \big(f(x) - f'(x)\big)\mathrm{e}^x$.
La fonction φ est définie et continue sur $[a\,;b]$, φ est dérivable sur $]a\,;b[$ et $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$.
Par le théorème de Rolle, on peut affirmer qu'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que
$$\varphi'(c) = 0.$$
Or
$$\varphi'(x) = \big(f(x) - f''(x)\big)\mathrm{e}^x$$
donc $\varphi'(c) = 0$ donne
$$f(c) = f''(c).$$

Exercice 33 : [énoncé]

On introduit une fonction auxiliaire dont l'annulation de la dérivée fait apparaître la relation souhaitée.

(a) Considérons la fonction $\varphi\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$. Celle-ci est dérivable par produit de fonctions qui le sont et
$$\varphi'(x) = \big(f'(x) + \alpha f(x)\big)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$
De plus, φ s'annule en a et b ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle. Il existe donc $c \in\,]a\,;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Puisque le facteur exponentiel ne s'annule pas, ceci donne $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.

(b) On suit la même démarche avec la fonction auxiliaire $\psi\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\psi(x) = f(x)\mathrm{e}^{x^2/2}$$
pour laquelle
$$\psi'(x) = \big(f'(x) + xf(x)\big)\mathrm{e}^{x^2/2}.$$

Exercice 34 : [énoncé]
($\Longleftarrow$) En vertu de l'inégalité des accroissements finis.
($\Longrightarrow$) Si f est k lipschitzienne alors $\forall x, y \in I$ tels que $x \ne y$ on a $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le k$.
À la limite quand $y \to x$ on obtient $\left|f'(x)\right| \le k$. Par suite f' est bornée.

Exercice 35 : [énoncé]
La fonctionφ proposée est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;a+h]$.
$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$
Par le théorème des accroissements finis appliqué à φ entre a et $a+h$, il existe$b \in\,]a\,;a+h[$ tel que
$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(b) = h(f'(b+h) - f'(b)).$$
Par le théorème des accroissements finis appliqué à f' entre b et $b+h$, il existe $c \in\,]b\,;b+h[\, \in\,]a\,;a+2h[$ tel que
$$f'(b+h) - f'(b) = hf''(c) \text{ puis } f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice 36 : [énoncé]
Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto x e^{1/x}$ entre x et $x+1$:
il existe $c_x \in]x\,;x+1[$ tel que

$$(x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x} = \left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}}(x+1-x) = \left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}}.$$

Quand $x \to +\infty$, $c_x \to +\infty$ car $c_x \geq x$.
Par suite

$$\left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}} \to 1$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = 1.$$

Exercice 37 : [énoncé]
En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^{1/x}$ entre n et $n+1$, on obtient

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1-\ln c}{c^2}c^{1/c}$$

avec $c \in]n\,;n+1[$.
Puisque $c \sim n \to +\infty$, $\ln c \sim \ln n$ et puisque $c^{1/c} \to 1$

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Exercice 38 : [énoncé]
On applique le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln x$ entre x et $x+1$.
Il existe $c \in]x\,;x+1[$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{c}.$$

Or $x < c < x+1$ donne

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

puis l'encadrement voulu.

$$\sum_{p=n+1}^{kn} \ln(p+1) - \ln p \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \ln p - \ln(p-1)$$

donne

$$\ln\frac{kn+1}{n+1} \leq \sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p} \leq \ln k.$$

Par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p} = \ln k.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Posons $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\left|f''(x)\right| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) de terme général

$$x_n = n\frac{\varepsilon}{M}$$

diverge vers $+\infty$ et donc

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \to 0.$$

Par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$\left|f(x_{n+1}) - f(x_n)\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{M}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]x_n\,;x_{n+1}[$ tel que

$$\left|f'(c_n)\right|(x_{n+1} - x_n) \leq \frac{\varepsilon^2}{M}$$

ce qui donne

$$\left|f'(c_n)\right| \leq \varepsilon.$$

Puisque f'' est bornée par M, la fonction f' est M-lipschitzienne et donc

$$\forall u \in [x_n\,;x_{n+1}], \left|f'(u) - f'(c_n)\right| \leq M|u - c_n| \leq \varepsilon$$

puis

$$\forall u \in [x_n\,;x_{n+1}], \left|f'(u))\right| \leq \varepsilon + \left|f'(c_n)\right| \leq 2\varepsilon$$

et, puisque ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en posant $A = x_N$,

$$\forall u \geq A, \left|f'(u)\right| \leq 2\varepsilon.$$

On peut conclure que f' converge vers 0 en $+\infty$.

(b) Posons

$$f(t)=\frac{\cos(t^2)}{t+1}.$$

On vérifie aisément que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et converge en $+\infty$ sans que f' converge en 0.

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Soit $f\colon x\mapsto x-\ln(1+x)$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{x}{1+x}.$$

Le tableau des variations de f est alors

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f est positive.
Soit $g\colon x\mapsto \ln(1+x)-x/(1+x)$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$.

$$g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}.$$

Le tableau des variations de g est alors

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que g est positive.

(b) Soit $f\colon x\mapsto \mathrm{e}^x-1-x-\frac{1}{2}x^2$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$f'''(x)=\mathrm{e}^x\geq 0.$$

On obtient les variations suivantes

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f est positive.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Étudions la fonction $\delta\colon t\mapsto 1+t^p-(1+t)^p$ définie continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a $\delta(0)=0$ et pour $t>0$,

$$\delta'(t)=p\bigl(t^{p-1}-(1+t)^{p-1}\bigr).$$

Puisque $p-1\leq 0$, $t^{p-1}\geq(1+t)^{p-1}$ et donc $\delta'(t)\geq 0$. On en déduit que pour tout $t\geq 0$, $\delta(t)\geq 0$ puis l'inégalité demandée.

(b) Pour $x=0$, l'inégalité est immédiate et pour $x>0$,

$$(x+y)^p=x^p\left(1+\frac{y}{x}\right)^p\leq x^p\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^p\right)=x^p+y^p.$$

Exercice 42 : [énoncé]

f' est continue sur le segment $[a\,;b]$ elle y est donc bornée par un certain M.
Par l'inégalité des accroissements finis, f est M lipschitzienne.

Exercice 43 : [énoncé]

La dérivée de f est continue et périodique donc bornée par son max sur une période (qui existe par continuité sur un segment). Par l'inégalité des accroissements finis, il en découle que f est lipschitzienne.

Exercice 44 : [énoncé]

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $x>0$, $f'(x)=2x\ln x+x$.
Quand $x\to 0^+$, $f'(x)\to 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
De plus, f' est continue en 0 et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 45 : [énoncé]

Procédons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$, la fonction considérée est continue.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.
f_{n+1} est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Pour $x\neq 0$, $f_{n+1}'(x)=(n+2)f_n(x)$.
Quand $x\to 0$, $f_{n+1}'(x)\to 0=(n+2)f_n(0)$ donc f_{n+1} est dérivable en 0 et $f_{n+1}'(0)=0$.
Ainsi f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_{n+1}'=(n+2)f_n$.
Par hypothèse de récurrence, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Récurrence établie.

Exercice 46 : [énoncé]
Posons $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(\sqrt{t}).$$

Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

g est continue et

$$g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t}) - f'(0)}{2\sqrt{t}} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{f''(0)}{2}$$

donc g est dérivable et g' est continue en 0.
Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$.