Dénombrement

Ensembles finis

Exercice 1 [01528] [Correction]
Soient A et B deux parties de E et F.
Étant donnée une application $f\colon E \to F$, est-il vrai que :

(a) Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.

(b) Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.

(c) Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.

(d) Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Calcul de sommes

Exercice 2 [01539] [Correction]
Soit E un ensemble à n éléments. Calculer

$$\sum_{X\subset E}\operatorname{Card}(X) \text{ et } \sum_{X,Y\subset E}\operatorname{Card}(X\cap Y)$$

Listes et combinaisons

Exercice 3 [01529] [Correction]
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

Exercice 4 [01530] [Correction]
Soient $E = \{1,\dots,n\}$ et $F = \{1,\dots,p\}$ avec $n \le p \in \mathbb{N}$.
Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

Exercice 5 [01531] [Correction]
Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur un ensemble E à n éléments ?

Exercice 6 [01532] [Correction]
On trace dans un plan n droites en position générale (*i.e.* deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice 7 [01540] [Correction]
Combien y a-t-il de p-cycles dans le groupe $(\mathcal{S}_n,\circ)$?

Exercice 8 [01536] [Correction]
Soit E un ensemble à n éléments.

(a) Soit X une partie à p éléments de E.
Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

(b) Combien y a-t-il de couples (X,Y) formés de parties disjointes de E ?

Exercice 9 [01538] [Correction]
Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \operatorname{Card} A$.

(a) Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?

(b) Combien y a-t-il de parties X de E à $m \in \{p,\dots,n\}$ éléments contenant A ?

(c) Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que $X\cap Y = A$?

Exercice 10 [03933] [Correction]

(a) Quel est le coefficient de $a^2b^5c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?

(b) Même question avec $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_p^{k_p}$ dans $(a_1+a_2+\dots+a_p)^n$.

Exercice 11 [03956] [Correction]
Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.

(a) Combien y a-t-il de mains possibles ?

(b) Combien de ces mains comportent exactement un As ?

(c) Combien de ces mains ne comportent aucun As ?

(d) Combien comportent au moins un As ?

Exercice 12 [03959] [Correction]
Un mot M long de n lettres est constitué de r lettres différentes. La j-ème lettre apparaît p_j fois dans le mot M et donc

$$p_1+\dots+p_r = n$$

Combien d'anagrammes du mot M peut-on constituer ?

Démonstrations combinatoires

Exercice 13 [01533] [Correction]
(Formule de Chu-Vandermonde) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![0\,;p+q]\!]$. Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

Dénombrements avancés

Exercice 14 [03960] [Correction]

(a) Combien existe-t-il de suites strictement croissante de p entiers choisis dans $\{1,\dots,n\}$?

(b) Application : combien existe-t-il de suite $(x_1,\dots,x_p)$ avec

$$x_1 + \cdots + x_p \leq n \text{ et } x_1,\dots,x_p \in \mathbb{N}^*$$

(c) Même question avec

$$x_1 + \cdots + x_p = n \text{ et } x_1,\dots,x_p \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 15 [03963] [Correction]
On note d_n le nombre de permutations σ de $[\![1\,;n]\!]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!], \sigma(k) \neq k$$

On dit σ est un dérangement de $[\![1\,;n]\!]$. On convient $d_0 = 1$.

(a) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

(b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

Exercice 16 [03985] [Correction]
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1\,;n]\!]$ et $\mathcal{S}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ constitué des permutations possédant exactement $k \in [\![0\,;n]\!]$ points fixes. Enfin, on pose

$$s_n(k) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}_n(k))$$

(a) Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} s_n(k)$$

(b) Soient $n, k \geq 1$. En calculant de deux façons le nombre de couples (s, x) constitués de $s \in \mathcal{S}_n(k)$ et x point fixe de s, établir

$$k s_n(k) = n s_{n-1}(k-1)$$

(c) En déduire

$$s_n(k) = \binom{n}{k} s_{n-k}(0)$$

(d) Retrouver directement le résultat précédent.

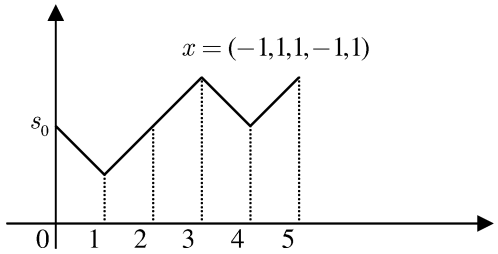
Exercice 17 [03934] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X l'ensemble de suites $(x_1,\dots,x_n)$ avec

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, x_k = 1 \text{ ou } -1$$

À chaque suite $x = (x_1,\dots,x_n)$ élément de X on associe la suite $(s_0, s_1,\dots,s_n)$ avec

$$s_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } s_k = s_{k-1} + x_k \text{ pour } k \in \{1,\dots,n\}$$

Celle-ci détermine une ligne brisée déterminée par les points de coordonnées (k, s_k) comme illustrée ci-dessous Cette ligne brisée définit un chemin joignant

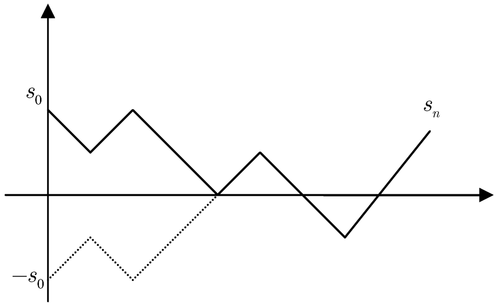


$(0, s_0)$ à (n, s_n).

(a) On note p le nombre de 1 dans la suite $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Exprimer en fonction de n, p et s_0 la valeur de s_n.

(b) Étant donnée $m \in \mathbb{N}$, combien existe-t-il de chemin $s_n = m$?

(c) On suppose $s_0 \in \mathbb{N}$. En exploitant la figure ci-dessous expliquer pourquoi il y



a autant de chemins joignant $(0, -s_0)$ à (n, m) que de chemins joignant $(0, s_0)$ à (n, m) et coupant l'axe des abscisses.

(d) En déduire le nombre de chemins joignant $(0, 1)$ à (n, m) dont tous les points sont d'ordonnées strictement positives.

Exercice 18 [04156] [Correction]

On considère une matrice 3×3 composée de 9 jetons numérotés de 1 à 9.

On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit un entier impair.

(a) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que la classe de congruence du déterminant de A modulo 2 est égale à la classe du déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes $r_{i,j}$ de la division euclidienne de $a_{i,j}$ par 2.

(b) On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\operatorname{Card} \mathcal{M}$.

On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M} \mid \det M \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre sont nuls et de déterminant impair.

(c) Donner une relation entre $\operatorname{Card} \Omega$ et $\operatorname{Card} \Delta$.

(d) On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1.

Donner le nombre K_1 de ces matrices.

On considère une matrice de Δ dont deux colonnes possèdent exactement un coefficient nul.

Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.

(e) Calculer $\operatorname{Card} \Delta$ et en déduire $\operatorname{Card} \Omega$.

(f) Déterminer la probabilité p.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) oui, car si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $f(A) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ est fini.

(b) non, il suffit de considérer une fonction constante définie sur un ensemble infini.

(c) non, il suffit de considérer une fonction constante définie sur un ensemble infini.

(d) non, il suffit de considérer une partie B formée par une infinité de valeurs non prises par f.

Exercice 2 : [énoncé]
Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties X à un k éléments dans E.
Par suite

$$\sum_{X\subset E} \mathrm{Card}(X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\mathrm{Card}(X)=k} k = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties Z à k éléments dans E.
Pour une telle partie Z, les parties X contenant Z ont $\ell \in \{k, \dots, n\}$ éléments.
Il y a $\binom{n-k}{ell-k}$ parties X à ℓ éléments contenant Z.
Pour une telle partie X, une partie Y telle que $X \cap Y = Z$ est une partie Y déterminée par $Z \subset Y \subset Z \cup C_E X$. Il y a $2^{n-\ell}$ parties Y possibles.
Il y a

$$\sum_{\ell=k}^{n} \binom{n-k}{\ell-k} 2^{n-\ell} = (1+2)^{n-k} = 3^{n-k}$$

couples (X, Y) tels que $X \cap Y = Z$.
Par suite

$$\sum_{X,Y\subset E} \mathrm{Card}(X\cap Y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\mathrm{Card}\, Z=k} \sum_{X\cap Y=Z} \mathrm{Card}(X\cap Y) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 3^{n-k}$$

Or

$$((3+x)^n)' = n(3+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 3^{n-k} x^{k-1}$$

donc

$$\sum_{X,Y\subset E} \mathrm{Card}(X\cap Y) = n4^{n-1}$$

Exercice 3 : [énoncé]
Si $n > p$, il n'y a pas d'injections possibles.
Si $n = 0$, il y a une injection : l'application vide.
Si $0 < n \le p$ alors on peut écrire $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec les x_i deux à deux distincts.
Pour former une injection de E dans F :
On choisit $f(x_1)$ dans F : p choix.
On choisit $f(x_2)$ dans $F \setminus \{f(x_1)\}$: $p-1$ choix.
...
On choisit $f(x_n)$ dans $F \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_{n-1})\}$: $p-n+1$ choix.
Au total, il y a $p \times (p-1) \times \dots \times (p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$ choix.

Exercice 4 : [énoncé]
Une application $f : E \to F$ strictement croissante est entièrement déterminée par son image qui est une partie formée de n éléments de F. Il y a $\binom{p}{n}$ parties à n éléments dans F et donc autant d'applications strictement croissantes de E vers F.

Exercice 5 : [énoncé]
Une relation d'ordre total sur E permet de définir une bijection de $\{1, \dots, n\}$ vers E et inversement.
Par suite, il y a exactement $n!$ relations d'ordre total possibles.

Exercice 6 : [énoncé]
Notons t_n le nombre de triangles formés.

$$t_0 = t_1 = t_2 = 0$$

Pour $n \ge 3$, former un triangle revient à choisir les trois droites définissant ses côtés :

$$\text{il y a } \binom{n}{3} \text{ possibilités}$$

Chacune de ses possibilités définit un véritables triangle (car il y a ni concourance, ni parallélisme) et les triangles obtenus sont deux à deux distincts. Finalement

$$t_n = \binom{n}{3}$$

Exercice 7 : [énoncé]
Une injection f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ permet de définir le p-cycle $(f(1)\dots f(p))$.
Inversement, un p-cycle de $\mathbb{N}_n$ peut être définis par exactement p injections différentes.
En vertu du principe des bergers, il y a exactement $\frac{n!}{p(n-p)!}$ p-cycles dans $\mathcal{S}_n$.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Autant que de parties de $E \setminus X$: 2^{n-p}

(b) $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n$.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Autant que de parties de $E \setminus A$: 2^{n-p}

(b) Autant que de parties de $E \setminus A$ à $m-p$ éléments : $\binom{n-p}{m-p}$.

(c) Une fois X à m éléments contenant A déterminé il y a 2^{n-m} choix de Y possibles et donc
$\sum_{m=p}^n \binom{n-p}{m-p} 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} 2^{n-p-k} = (1+2)^{n-p} = 3^{n-p}$.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Dans le développement de
$$(a+b+c)^{10} = (a+b+c)(a+b+c)\dots(a+b+c)$$
on obtient un terme $a^2b^5c^3$ en choisissant deux a, cinq b et trois c.
Il y a $\binom{10}{2}$ choix possibles pour les facteurs dont seront issus les a.
Une fois ceux-ci choisis, il y a $\binom{8}{5}$ choix possibles pour les facteurs fournissant les b.
Une fois ces choix faits, les trois facteurs restant fournissent les c.
Au total, il y a
$$\binom{10}{2}\binom{8}{5} = \frac{10!}{2!5!3!} = 2520$$
termes $a^2b^5c^3$ apparaissant lors du développement de $(a+b+c)^{10}$.

(b) On reprend le même protocole, pour obtenir
$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!}$$
si $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$ et 0 sinon.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Une main se comprend comme une partie à 5 éléments d'un ensemble à 52 éléments.
$$\binom{52}{5}$$

(b) On choisit l'As et les cartes le complétant
$$\binom{4}{1} \times \binom{48}{4}$$

(c) On choisit uniquement des cartes qui ne sont pas des As
$$\binom{48}{5}$$

(d) Par complément
$$\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$$

Exercice 12 : [énoncé]
Si l'on distingue les lettres du mot même lorsque ce sont les mêmes (par exemple, en leur affectant un indice comme dans $P_1O_1P_2I_1$), il y a $n!$ permutations possibles des lettres distinguées. Parmi celles-ci, plusieurs correspondent à une même anagramme (comme $P_1I_1P_2O_1$ et $P_2I_1P_1O_1$).
Pour chaque anagramme, il y a exactement $p_1!\dots p_r!$ permutations des lettres du mot conduisant à celui-ci car les permutations conduisant à une même anagramme se déduisent les une des autres par permutations entre elles des lettres identiques. Au total, il y a
$$\frac{n!}{p_1!\dots p_r!} \text{ anagrammes possibles}$$

Exercice 13 : [énoncé]
Soit E un ensemble à $p+q$ éléments séparé en deux parties disjointes E' et E'' de cardinaux p et q.
Il y a exactement $\binom{p+q}{n}$ parties à n éléments dans E.
Or pour former une partie à n élément de E, on peut pour chaque $k \in [\![0\,;n]\!]$ commencer par choisir k éléments dans E' avant d'en choisir $n-k$ dans E''. Il y a $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités pour chaque $k \in [\![0\,;n]\!]$ puis au total $\sum_{k=0}^n \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités d'où l'identité.

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Une suite strictement croissante de p entiers dans $\{1,\dots,n\}$ est entièrement déterminée par le choix de ses éléments qu'il suffit alors d'ordonner. Il y en a donc

$$\binom{n}{p}$$

(b) À chaque suite $(x_1,\dots,x_p)$ vérifiant $x_1+\cdots+x_p\leq n$ et $x_1,\dots,x_p\in\mathbb{N}^*$ on peut associer une suite strictement croissante $(y_1,\dots,y_p)$ d'éléments de $\{1,\dots,n\}$ en posant

$$y_k=x_1+\cdots+x_k$$

Inversement, à une suite $(y_1,\dots,y_p)$ comme au dessus correspond une unique suite $(x_1,\dots,x_p)$ comme voulue avec

$$x_1=y_1, x_k=y_k-y_{k-1} \text{ pour } k\geq 2$$

Il y a donc autant de suites $(x_1,\dots,x_p)$ vérifiant $x_1+\cdots+x_p\leq n$ et $x_1,\dots,x_p\in\mathbb{N}^*$ que de suite strictement croissantes de p éléments dans $\{1,\dots,n\}$, soit

$$\binom{n}{p}$$

(c) La condition $x_1+\cdots+x_p=n$ est remplie quand $x_1+\cdots+x_p\leq n$ mais pas $x_1+\cdots+x_p\leq n-1$. Le nombre de suite cherché est donc

$$\binom{n}{p}-\binom{n-1}{p}=\binom{n-1}{p-1}$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Pour $A\subset [\![1\,;n]\!]$, notons

$$\mathcal{S}_A=\{\sigma\in\mathcal{S}_n \mid \forall x\in A, \sigma(x)=x \text{ et } \forall x\notin A, \sigma(x)\neq x\}$$

$\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointes des $\mathcal{S}_A$ pour A parcourant $\mathcal{P}([\![1\,;n]\!])$.
Après indexation des éléments de A, une application de $\mathcal{S}_A$ peut être identifiée à un dérangement de $[\![1\,;n-k]\!]$ avec $k=\operatorname{Card}A$.
On en déduit $\operatorname{Card}\mathcal{S}_A=d_{n-k}$ puis

$$\operatorname{Card}\mathcal{S}_n=\sum_{A\subset\mathcal{P}(E)} d_{n-\operatorname{Card}A}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d_{n-k}$$

(b) Raisonnons par récurrence forte sur n.
La propriété énoncé est vrai aux rangs 0 et 1.
Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n-1$.
Pour $k\in[\![0\,;n]\!]$, posons

$$d'_k=\sum_{\ell=0}^k(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}\ell!$$

Par hypothèse de récurrence $d_k=d'_k$ pour $k\in[\![0\,;n-1]\!]$ et on veut établir l'identité pour $k=n$.
Or

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d'_{n-k}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d'_k=\sum_{k=0}^n\sum_{\ell=0}^k(-1)^{\ell-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\ell!$$

Par échange des deux sommes

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d'_{n-k}=\sum_{\ell=0}^n\sum_{k=\ell}^n(-1)^{\ell-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\ell!$$

puis glissement d'indice dans la deuxième somme

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d'_{n-k}=\sum_{\ell=0}^n\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^k\binom{n}{k+\ell}\binom{k+\ell}{\ell}\ell!$$

et expression factorielle des coefficients binomiaux

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d'_{n-k}=\sum_{\ell=0}^n\frac{n!}{(n-\ell)!}\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^k\binom{n-\ell}{k}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^k\binom{n-\ell}{k}=(1+(-1))^{n-\ell}=\begin{cases}0 & \text{si } n-\ell>0\\ 1 & \text{si } n=\ell\end{cases}$$

donc

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d'_{n-k}=n!=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d_{n-k}$$

On en déduit $d'_n=d_n$ puisque l'hypothèse de récurrence a fourni les identifications $d_k=d'_k$ pour $k\in[\![0\,;n-1]\!]$.
Récurrence établie.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) La somme étudiée dénombre les permutations de $[\![1\,;n]\!]$ selon leur nombre de points fixes
$$\sum_{k=0}^{n} s_n(k) = \operatorname{Card}\mathcal{S}_n = n!$$

(b) Pour chaque permutation de s de $\mathcal{S}_n(k)$ il y a k points fixes x possibles. Le nombre de couples cherché est donc $ks_n(k)$.
Pour chaque $x \in [\![1\,;n]\!]$, une permutation possédant k points fixes (dont x) est entièrement déterminée par sa restriction à $[\![1\,;n]\!] \setminus \{x\}$ qui est une permutation à $k-1$ points fixes. Ainsi, le nombre de couples cherché est aussi $ns_{n-1}(k-1)$.

(c) En itérant la formule ci-dessus obtenue
$$s_n(k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1}s_{n-k}(0) = \binom{n}{k}s_{n-k}(0)$$

(d) Pour déterminer une permutation élément de $\mathcal{S}_n(k)$, on choisit l'ensemble de ses k points fixes (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités) et on construit ses valeurs sur le complémentaire de l'ensemble des points fixes à partir d'une permutation de $n-k$ éléments sans points fixes (il y a $s_{n-k}(0)$ possibilités). Au total, il y a
$$\binom{n}{k}s_{n-k}(0)$$
applications de la forme voulue.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Le nombre de -1 est de $n-p$ et donc $s_n = s_0 + p - (n-p) = s_0 + 2p - n$.

(b) Si $m-(s_0+n)$ n'est pas un nombre pair, il n'y a pas de chemin solutions.
Sinon, on introduit $p \in \mathbb{Z}$ pour lequel $m - s_0 + n = 2p$.
Si $p < 0$ ou $p > n$, on ne pourra trouver de chemin solutions.
Si $0 \le p \le n$, chemins solutions correspondent aux suites x pour lesquels on positionne p termes 1 et les autres égaux à -1. Il y a $\binom{n}{p}$ positions possibles pour les termes 1 et autant de chemins solutions.

(c) Tout chemin joignant $(0, s_0)$ à (n, m) et coupant l'axe des abscisses peut être associé de façon bijective à un chemin joignant $(0, -s_0)$ à (n, m), il suffit pour cela de passer à l'opposer les termes $x_1, x_2, \dots$ jusqu'au premier pour lequel $s_0 + x_1 + \dots + x_k = 0$ et ne pas modifier les autres comme dans la figure proposé (ce résultat est connu sous le nom de principe de réflexion).

(d) Si $m-1+n$ est impair, il n'y a aucun chemins possible d'aucune sorte.
Sinon, on peut écrire $m-1+n = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et il y a alors $\binom{n}{p}$ chemins possibles (ce nombre étant nul lorsque $p < 0$ ou $p > n$).
Parmi ceux-ci, on retire ceux coupant l'axe abscisse qui par l'étude au dessus sont au nombre de $\binom{n}{p+1}$.
Finalement, il y a
$$\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1}$$
chemins solutions

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Le déterminant de A se calcule par une formule compatible avec le calcul en congruence modulo 2.

(b) Répartir les jetons dans la matrice revient à déterminer une bijection de $[\![1\,;9]\!]$ vers lui-même. On en déduit $\operatorname{Card}\mathcal{M} = 9! = 362\,880$.

(c) À chaque matrice de Ω on fait correspondre une matrice de Δ par calcul des restes $r_{i,j}$ des divisions euclidiennes modulo 2. Pour une matrice de Ω, si l'on permute les jetons impairs d'une part, et les jetons pairs d'autre part, la matrice de Δ obtenue à la fin est la même. On en déduit
$$\operatorname{Card}\Omega = 5!4!\operatorname{Card}\Delta$$

(d) Formons une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1. On choisit cette colonne et il reste deux 1 à positionner. Ceux-ci ne peuvent figurer sur la même colonne car on obtient sinon un déterminant nul. Ils ne peuvent figurer sur la même ligne pour la même raison. S'ils ne figurent ni sur la même ligne, ni sur la même colonne, la matrice est convenable. On en déduit
$$K_1 = 3 \times 3 \times 2$$
On choisit la colonne comportant un 1 et deux 0, les deux autres colonnes comportant un 0 et deux 1, puis on positionne le 1 dans la première colonne et les deux zéros dans les deux autres. Pour que la matrice obtenue soit de déterminant impair, il faut et il suffit que ces deux derniers zéros ne soient pas choisis sur la même ligne. On en déduit
$$K_2 = 3 \times 3 \times 3 \times 2$$

(e) Si une matrice de Δ possède une colonne dont trois coefficients sont égaux à 1, elle ne possède pas deux colonnes possédant exactement un coefficient nul.

Aussi, si une matrice de Δ ne possède pas de colonne dont trois coefficients sont égaux à 1, elle possède deux colonnes possédant exactement un coefficient nul.

$$\operatorname{Card}\Delta = K_1 + K_2 = 72 \text{ et } \operatorname{Card}\Omega = 207\,360$$

(f) $p = 4/7$.