

Compléments sur les séries numériques

Nature de séries numériques

Exercice 1 [02432] [Correction]

- (a) Étudier $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\dots+x^n}$.
 (b) Étudier $\sum v_n$ où $v_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x+\dots+x^n}$.

Exercice 2 [03881] [Correction]

Pour $a > 0$, étudier la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}.$$

Exercice 3 [01040] [Correction]

Donner la nature de la série des $\frac{j^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 [01064] [Correction]

Montrer la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(\ln(1))^2 + (\ln(2))^2 + \dots + (\ln(n))^2}.$$

Exercice 5 [01066] [Correction]

Pour $\alpha > 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{S_n}$ selon la valeur du réel α .

Exercice 6 [02430] [Correction]

On note $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$.

- (a) Déterminer la limite de u_n .
 (b) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2} .
 (c) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
 (d) Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n/n^α .

Nature de séries de signe non constant

Exercice 7 [01034] [Correction]

Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

- (a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ (c) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$
 (b) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (d) $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Exercice 8 [01035] [Correction]

Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Exercice 9 [01039] [Correction]

Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right).$$

Exercice 10 [03772] [Correction]

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 11 [01045] [Correction]

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}.$$

Exercice 12 [02351] [Correction]Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

$$(a) u_n = \frac{1}{\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}} \quad (b) u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} \quad (c) u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$$

Exercice 13 [02793] [Correction]Convergence de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.**Exercice 14** [01335] [Correction]

Étudier la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}.$$

Exercice 15 [01337] [Correction]

Quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}?$$

Exercice 16 [03208] [Correction] α désigne un réel strictement positif.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x} dx.$$

Exercice 17 [05040] [Correction]

Déterminer la nature des séries qui suivent :

$$(a) \sum \frac{n^n}{e^n \cdot n!} \quad (b) \sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (c) \sum \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Convergence de séries à termes positifs**Emploi du critère spécial****Exercice 18** [01038] [Correction](a) Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$ de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

(b) Montrer que

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

(c) Déterminer un équivalent de R_n .(d) Donner la nature de la série de terme général R_n .**Exercice 19** [01036] [Correction]

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

est un réel négatif.

Exercice 20 [01037] [Correction]

On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt$$

déterminer le signe de I .

Exercice 21 [04131] [Correction]

On pose

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } u_n = \ln(e^{s_n} - 1).$$

- (a) Énoncer le théorème des séries spéciales alternées, en faire la preuve.
- (b) Prouver que les suites $(s_n)_{n \geq 1}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ convergent.
- (c) Étudier la nature de $\sum u_n$.

Exercice 22 [05035] [Correction]

Déterminer les natures des séries

- (a) $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$
- (b) $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln(n) \rfloor}}{n}$

Nature de séries dépendant d'un paramètre

Exercice 23 [01065] [Correction]

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^\alpha} \text{ (avec } \alpha \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Même question avec la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 24 [01087] [Correction]

Soit $\alpha > 0$. Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}.$$

Exercice 25 [02515] [Correction]

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$$

pour $\alpha > 0$.

Exercice 26 [02790] [Correction]

Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$$

où $a > 0$.

Exercice 27 [02791] [Correction]

Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 28 [02802] [Correction]

Soient $(a, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = a^{\sum_{k=1}^n 1/k^\alpha}.$$

- (a) Pour quels couples (a, α) la suite (u_n) est-elle convergente? Dans la suite, on suppose que tel est le cas, on note $\ell = \lim u_n$ et on pose, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n - \ell.$$

- (b) Nature des séries de termes généraux v_n et $(-1)^n v_n$.

Exercice 29 [03429] [Correction]

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Déterminer la nature des séries de termes généraux

$$v_n = \binom{n+p}{p}^{-\alpha} \text{ et } w_n = (-1)^n \binom{n+p}{p}^{-\alpha}.$$

Exercice 30 [03704] [Correction]

- (a) En posant $x = \tan t$, montrer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Donner en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série

$$\sum \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

(c) Même question pour

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}.$$

(d) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}.$$

Exercice 31 [02423] [Correction]

On pose

$$u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \text{ et } v_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}.$$

- (a) Déterminer la nature de la série de terme général u_n selon α .
- (b) Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon α .

Transformation d'Abel

Exercice 32 [01043] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n \sin k \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k}.$$

- (a) Montrer que $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
- (b) En déduire que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge.

Exercice 33 [02352] [Correction]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π . On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}.$$

(a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

(b) En observant que $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, établir que la série de terme général u_n converge.

(c) En exploitant l'inégalité $|\cos x| \geq \cos^2 x$, établir que la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 34 [01041] [Correction]

Soient (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.

(a) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.

(b) En déduire que la série $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.

(c) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 35 [02582] [Correction]

(a) Montrer l'existence, pour $\theta \in]0; \pi[$, d'un majorant M_θ de la valeur absolue de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \cos(k\theta).$$

(b) Montrer que $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2; +\infty[$.

(c) En remarquant de $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n\theta).$$

(d) En utilisant $|\cos(k\theta)| \geq \cos^2(k\theta)$, étudier la convergence de $\sum |u_n|$.

Exercice 36 [01042] [Correction]

Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Établir la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z_n}{n}.$$

Exercice 37 [03685] [Correction]

Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ diverge.

Établir que pour tout $\alpha \in]-\infty; 1]$, la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge aussi.

Exercice 38 [01028] [Correction]

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels strictement positifs.

- (a) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

- (b) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge. Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge vers 0.
- (c) Donner un exemple de suite (u_n) qui ne converge pas vers 0, alors que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge.

Exercice 39 [03879] [Correction]

On donne une suite réelle (a_n) .

On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge.

Calcul de somme

Exercice 40 [03895] [Correction]

Existence et valeur de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right).$$

Exercice 41 [02806] [Correction]

Nature et calcul de la somme de la série de terme général

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Exercice 42 [01053] [Correction]

On pose

$$u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme vaut

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 43 [02803] [Correction]

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1}.$$

Calcul de somme par dérivation ou intégration

Exercice 44 [01052] [Correction]

Soit $\alpha > 0$. Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k + \alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

Exercice 45 [01051] [Correction]

Soit $x \in]-1; 1[$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k.$$

Exercice 46 [02805] [Correction]

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Exercice 47 [01338] [Correction]

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Étude de séries à termes positifs

Comparaison séries intégrales

Exercice 48 [02434] [Correction]

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos(x^{1/3})}{x^{2/3}}.$$

(a) Nature la série de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n).$$

(b) Nature de la série de terme général $f(n)$.

On pourra montrer que $\sin(n^{1/3})$ n'admet pas de limite quand $n \rightarrow +\infty$.

(c) Nature de la série de terme général

$$\frac{\sin(n^{1/3})}{n^{2/3}}.$$

Exercice 49 [02810] [Correction]

On pose $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ pour tout $x \geq 1$ et $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ pour tout entier $n \geq 2$.

(a) Montrer que f' est intégrable sur $[1; +\infty[$.

(b) Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.

(c) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.

(d) En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 50 [03045] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n : x \in]n; +\infty[\rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k}.$$

Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe un unique réel, noté x_n tel que $f_n(x_n) = a$. Déterminer un équivalent de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 51 [03086] [Correction]

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \right).$$

Exercice 52 [04069] [Correction]

Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et croissante.

Établir que les objets suivants ont même nature

$$\int_0^{+\infty} f(e^{-t}) dt, \sum f(e^{-n}) \text{ et } \sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 53 [05038] [Correction]

Soit $f: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, de classe \mathcal{C}^1 et de dérivée décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les séries

$$\sum f'(n) \quad \text{et} \quad \sum \frac{f'(n)}{f(n)}$$

ont même nature.

Exercice 54 [05039] [Correction]

Soit $f: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 dont la dérivée est décroissante et de limite nulle.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Établir

$$0 \leq \int_k^{k+1} f(t) dt - \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) \leq \frac{1}{8}(f'(k) - f'(k+1)).$$

(b) En déduire que¹

$$S_n = \int_1^n f(t) dt - \left(\frac{1}{2}f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) \right)$$

admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

1. S_n compare une intégrale à l'approximation de celle-ci obtenue par la méthode des trapèzes.

- (c) *Application*: On considère la fonction $f: x \mapsto -\ln(x)$. Établir² la convergence de la suite de terme général

$$\sigma_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n.$$

Exercice 55 [05042] [Correction]

Soit $f: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant³, pour tout $x \geq 1$,

$$\int_1^x |f'(t)| dt \leq M.$$

- (a) Montrer

$$\sum f(n) \text{ converge} \iff \left(\int_1^n f(t) dt\right) \text{ converge.}$$

- (b) *Application*: Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n}.$$

Comportement asymptotique de sommes

Exercice 56 [01089] [Correction]

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}.$$

- (a) Donner un équivalent simple de S_n .
 (b) Montrer que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + C + o(1).$$

Exercice 57 [01090] [Correction]

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}.$$

2. Pour résoudre cette question, on ne s'autorise pas l'emploi de la formule de Stirling.
 3. Au chapitre suivant, on dira simplement que f' est intégrable sur $[1; +\infty[$. On peut noter que cette hypothèse est satisfaite lorsque f est monotone et admet une limite finie en $+\infty$.

- (a) Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers une constante C .
 (b) Établir que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 58 [03179] [Correction]

- (a) Sous réserve d'existence, déterminer pour $\alpha \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

- (b) Sous réserve d'existence, déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

Exercice 59 [01091] [Correction]

On pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{3k-1}{3k}.$$

- (a) Montrer qu'il existe des constantes α et β telles que

$$\ln u_n = \alpha \ln n + \beta + o(1).$$

En déduire un équivalent de u_n .

- (b) Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 60 [03882] [Correction]

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n}.$$

Exercice 61 [01092] [Correction]

Déterminer un équivalent simple de :

(a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)}$

(b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)}$

Exercice 62 [03226] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$n_p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid H_n \geq p\}.$$

Déterminer un équivalent de n_p quand $p \rightarrow +\infty$

Exercice 63 [01325] [Correction]

Soit $j \in \mathbb{N}$. On note Φ_j le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \geq j.$$

- (a) Justifier la définition de Φ_j .
- (b) Démontrer que $\Phi_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$.
- (c) Démontrer $\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e$.

Exercice 64 [02950] [Correction]

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}_+^* .

On pose

$$v_n = \frac{1}{nu_n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 u_n} \left(\sum_{k=1}^n k u_k \right).$$

On suppose que (v_n) tend vers $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Étudier la convergence de (w_n) .

Exercice 65 [02809] [Correction]

On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}.$$

- (a) Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ .
- (b) Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

Emploi de la constante d'Euler

Exercice 66 [01055] [Correction]

Justifier et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}.$$

Exercice 67 [02354] [Correction]

Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 68 [01046] [Correction]

Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 69 [01054] [Correction]

On rappelle l'existence d'une constante γ telle qu'on ait

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

- (a) Calculer la somme de la série de terme général $u_n = (-1)^{n-1}/n$.
- (b) Même question avec $u_n = 1/n$ si $n \neq 0$ [3] et $u_n = -2/n$ sinon.

Exercice 70 [02804] [Correction]

Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}.$$

Exercice 71 [02964] [Correction]

Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right).$$

Exercice 72 [01056] [Correction]

(a) Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$u_n = \sum_{p=2}^n \frac{\ln p}{p}.$$

On pourra introduire la fonction $f: t \mapsto (\ln t)/t$.

(b) À l'aide de la constante d'Euler, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 73 [04171] [Correction]

(a) Soit (u_n) une suite telle que $u_n = O(1/n^2)$. Que dire de $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$?

(b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec γ une constante réelle qu'on ne cherchera pas à calculer.

On pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor.$$

(c) Convergence et somme de $\sum_{n \geq 2} u_n$.

Exercice 74 [01077] [Correction]

Étudier la limite de

$$u_n = \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du + \ln n.$$

Théorème de Cesaro

Exercice 75 [00307] [Correction]

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On désire établir que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2.$$

(b) Établir que pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$|v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

(d) *Application:* Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow \alpha \neq 0$. Donner un équivalent simple de u_n .

Exercice 76 [00308] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle.

(a) On suppose que (u_n) converge vers ℓ et on considère

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(b) On suppose

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{n} \rightarrow \ell.$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n^2}.$$

Exercice 77 [00309] [Correction]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in]0; +\infty[.$$

Montrer

$$\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell.$$

Exercice 78 [03219] [Correction]

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

- (a) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$
 (b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}.$$

- (c) En déduire un équivalent de $(u_n)_{n \geq 0}$

Séries dont le terme général est défini par récurrence**Exercice 79** [03371] [Correction]

- (a) Déterminer la limite de la suite définie par

$$u_0 \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

- (b) Déterminer la limite de la suite définie par

$$v_n = nu_n.$$

- (c) Donner la nature de la série $\sum u_n$ et celle de la série $\sum (-1)^n u_n$

Exercice 80 [03012] [Correction]

La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est définie par $a_0 \in]0; \pi/2[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sin(a_n).$$

Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

Exercice 81 [02961] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n > 0$,

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1}).$$

Étudier la suite (u_n) puis la série de terme général u_n .

Exercice 82 [02440] [Correction]

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}.$$

- (a) Étudier la convergence de la suite (a_n) .
 (b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
 (c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2 .
 (d) Déterminer la nature de la série de terme général a_n à l'aide de la série

$$\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Exercice 83 [02951] [Correction]

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in [0; 1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

- (a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
 (b) Même question lorsque u_n est définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^{1+\alpha}$ (avec $\alpha > 0$).

Exercice 84 [02960] [Correction]

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in]0; 1]$ et que, pour un certain $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}^\beta = \sin u_n^\beta.$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 85 [02433] [Correction]

Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

- (a) Condition nécessaire et suffisante sur α pour que (u_n) converge.
 (b) Equivalent de u_n dans le cas où (u_n) diverge.
 (c) Equivalent de $(u_n - \ell)$ dans le cas où (u_n) converge vers ℓ .

Application à l'étude de suites

Exercice 86 [02418] [Correction]

Former un développement asymptotique à trois termes de la suite (u_n) définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}.$$

Exercice 87 [03057] [Correction]

On note $(z_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général

$$z_n = 2n \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right).$$

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2n-1}{z_n-1} \frac{2n-2}{z_n-2} \cdots \frac{2n-n}{z_n-n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \prod_{k=1}^n \frac{2n-k}{z_n-k} \right|.$$

Étude théorique

Exercice 88 [01033] [Correction]

Montrer que la somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente n'est que semi-convergente.

Exercice 89 [02962] [Correction]

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 90 [03097] [Correction]

On dit que la série de terme général u_n enveloppe le réel A si, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)| \leq |u_{n+1}|.$$

On dit qu'elle enveloppe strictement le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $]0; 1[$ telle que pour tout entier naturel n :

$$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}.$$

- Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$.
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.
- Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe strictement A , alors elle est alternée.
Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.
- Démontrer que, si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$
 $A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est du signe de u_{n+1} , alors, elle enveloppe strictement A .
- Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe A et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement A .

Exercice 91 [03207] [Correction]

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n.$$

- Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.
- Soient a et b deux éléments de E déterminés par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1. \end{cases}$$

Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$.

- Calculer

$$w_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}.$$

- On pose $c_n = a_n/b_n$ lorsque l'entier n est supérieur ou égal à 1. Démontrer l'existence de

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n.$$

- Démontrer l'existence d'un unique réel r tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + rb_n) = 0.$$

Exercice 92 [03917] [Correction]

Soit $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante à termes strictement positifs telle que la série $\sum e_n$ converge.

On pose

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n \text{ et } r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

On introduit

$$G = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \mid (d_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \right\}.$$

On dit que la suite e est une base discrète lorsque G est un intervalle.

- (a) Montrer que G est bien défini. Déterminer son maximum et son minimum.
- (b) On suppose dans cette question que (e_n) est une base discrète. Montrer que $e_n \leq r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) On suppose que $e_n \leq r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [-s; s]$. On définit la suite (t_n) par

$$t_0 = 0 \text{ et } t_{n+1} = \begin{cases} t_n + e_n & \text{si } t_n \leq t \\ t_n - e_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$|t - t_n| \leq e_n + r_n$$

et conclure.

- (d) Dans cette question, on suppose $e_n = 1/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer G . Quelles suites (d_n) permettent d'obtenir respectivement 0, 1, 1/2, 2 et 1/3 ? Pour $x \in G$, y a-t-il une unique suite $(d_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n ?$$

Condensation

Exercice 93 [02796] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = 2^n u_{2^n}.$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 94 [03676] [Correction]

- (a) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, positive et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. On pose

$$v_n = p^n u_{p^n}.$$

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum v_n \text{ converge.}$$

- (b) *Application:* Étudier la convergence des séries

$$\sum \frac{1}{n \ln n} \text{ et } \sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

Exercice 95 [03677] [Correction]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = n u_{n^2}.$$

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum v_n \text{ converge.}$$

Exercice 96 [02797] [Correction]

Soit (u_n) une suite décroissante d'éléments de \mathbb{R}_+ , de limite 0. Pour $n \geq 1$, on pose

$$v_n = n^2 u_{n^2}.$$

Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Produits numériques

Exercice 97 [05043] [Correction]

Soit q un réel tel que $|q| < 1$. Établir l'identité

$$\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + q^k) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^{2k-1})}$$

où les produits infinis correspondent aux limites quand n tend vers $+\infty$ des produits pour k allant de 1 à n .

Exercice 98 [05044] [[Correction](#)]

Soit (a_n) une suite de réels tous différents de -1 telle que la série $\sum a_n$ converge.

On pose

$$P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a_k) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite (P_n) admet une limite finie et que celle-ci est non nulle si, et seulement si, la série de terme général a_n^2 converge.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé](#)

- (a) L'intégrale définissant u_n est bien définie car elle porte sur une fonction sur le segment $[0; 1]$. On peut aussi la comprendre comme une intégrale généralisée convergente sur $[0; 1[$

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\dots+x^n} = \int_{[0;1[} \frac{dx}{1+x+\dots+x^n}$$

et par sommation géométrique

$$\int_{[0;1[} \frac{dx}{1+x+\dots+x^n} = \int_{[0;1[} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx.$$

Posons

$$f_n(x) = \frac{1-x}{1-x^{n+1}}.$$

Sur $[0; 1[$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f: x \mapsto 1-x$.

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$\left| \frac{1-x}{1-x^{n+1}} \right| \leq \frac{1-x}{1-x} = 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par convergence dominée

$$u_n \rightarrow \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

et donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- (b) On amorce les calculs comme au dessus pour écrire

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x+\dots+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}} (1-x) dx.$$

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}} (1-x) dx = \left[-\frac{1}{n+1} \ln(1-x^{n+1})(1-x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx$$

Le terme entre crochet est nul (il suffit d'écrire $x = 1-h$ avec $h \rightarrow 0$, pour étudier la limite en 1)

Il reste

$$v_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx.$$

Par développement en série entière de la fonction $u \mapsto -\ln(1-u)$

$$v_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^{(n+1)k} dx.$$

Posons

$$g_k(x) = \frac{1}{k} x^{(n+1)k}.$$

La série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $[0; 1[$ en vertu de la décomposition en série entière précédente.

Les fonctions g_k et la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k: x \mapsto -\ln(1-x^{n+1})$ sont continues par morceaux.

Enfin, les fonctions g_k sont intégrables sur $[0; 1[$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{k} x^{(n+1)k} \right| dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} < +\infty.$$

On peut donc intégrer terme à terme pour écrire donc

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^{(n+1)k} dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} \leq \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

puis finalement

$$v_n \leq \frac{C}{(n+1)^2}.$$

La série à termes positifs $\sum v_n$ est donc convergente.

Exercice 2 : [énoncé](#)

On sait

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

et donc

$$a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = e^{\ln a \ln n + \gamma \ln a + o(1)} \sim \frac{e^{\gamma \ln a}}{n^{-\ln a}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs

$$\sum_{n \geq 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \text{ converge} \iff -\ln a > 1$$

ce qui fournit la condition $a < e^{-1}$.

Exercice 3 : [énoncé]

On peut écrire

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} + \frac{j^{3n+3}}{\sqrt{3n+3}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{j^{3n+1}(1+j+j^2)}{\sqrt{3n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc la série des termes

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} + \frac{j^{3n+3}}{\sqrt{3n+3}}$$

est absolument convergente. Ainsi, il y a convergence des sommes partielles

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{j^k}{\sqrt{k}}.$$

Puisque, les termes

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}}, \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}}$$

sont de limite nulle, on a aussi convergence des sommes partielles

$$S_{3n+1} = \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{j^k}{\sqrt{k}} = S_{3n} + \frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}}$$

$$S_{3n+1} = \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{j^k}{\sqrt{k}} = S_{3n+1} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}}.$$

Les trois suites extraites (S_{3n}) , (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) convergeant vers une même limite, on peut affirmer que la série $\frac{j^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Exercice 4 : [énoncé]

Par comparaison série-intégrale, on majore u_n par le terme général d'une série convergente.

La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue et croissante donc

$$\int_{k-1}^k (\ln(t))^2 dt \leq (\ln(k))^2 \text{ pour tout } k \geq 2$$

En sommant pour k allant de 2 à n , on obtient

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k (\ln(t))^2 dt \leq \sum_{k=2}^n (\ln(k))^2 = \sum_{k=1}^n (\ln(k))^2 \text{ pour tout } n \geq 2$$

et donc

$$\int_1^n (\ln(t))^2 dt \leq \sum_{k=1}^n (\ln(k))^2$$

On calcule l'intégrale par intégrations par parties

$$\begin{aligned} \int_1^n (\ln(t))^2 dt &= \left[t(\ln(t))^2 \right]_1^n - \int_1^n 2 \ln(t) dt \\ &= n(\ln(n))^2 - \left[2t \ln(t) \right]_1^n + \int_1^n 2 dt \\ &= n(\ln(n))^2 - 2n \ln(n) + 2n - 2 \end{aligned}$$

Par passage à l'inverse, on obtient alors

$$u_n \leq \frac{1}{n(\ln(n))^2 - 2n \ln(n) + 2n - 2} = v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général v_n converge⁴ et, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge aussi.

Exercice 5 : [énoncé]

Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha}$$

4. Voir sujet 20171101. Notons que l'on peut par encadrement établir aussi que u_n équivaut à $1/n(\ln(n))^2$.

donc

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq R_N \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

d'où l'on obtient :

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$$

puis

$$\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)S_\infty n^{\alpha-1}}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{S_n}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi: t \mapsto 1$, on obtient $u_n \rightarrow 0$.

(b)

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)' (\tan t)^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

(c) On vérifie aisément $u_n \rightarrow 0^+$ et $u_{n+1} \leq u_n$. Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

(d) Par monotonie

$$u_n + u_{n+2} \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-2}.$$

On en déduit $u_n \sim \frac{1}{2n}$ puis par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) $|u_n| \sim 1/n^2$ donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

(b) On applique le critère spécial et on conclut que $\sum u_n$ converge.

(c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on peut conclure que $\sum u_n$ converge.

(d)

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}.3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 : [énoncé]

Il s'agit d'une série alternée.

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$$

et ainsi $\ln \sqrt[n]{n!}$ est la moyenne arithmétique de $\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n$ et donc

$$\ln \sqrt[n]{n!} \leq \ln \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}.$$

De plus par la croissance de la fonction $x \mapsto \ln x$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k \geq \frac{1}{n} \int_1^n \ln x dx = \ln n - 1 \rightarrow +\infty$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0.$$

Finalement on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et conclure.

Exercice 9 : [énoncé]

On a

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{n} = \frac{(-1)^n \pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc la série est semi-convergente.

Exercice 10 : [énoncé]

On sait $\cos(n\pi + x) = (-1)^n \cos(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Par le développement limité

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$$

on écrit

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Sachant $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$, on obtient

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Enfin, le développement⁵ limité $\sin(u) = u + o(u^2)$ donne

$$u_n = \underbrace{(-1)^n \frac{\pi}{3n}}_{=a_n} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=b_n}$$

Le terme général a_n est alterné et général décroît vers 0 en valeur absolue, la série $\sum a_n$ est donc convergente.

Le terme général b_n est dominé⁶ par $1/n^2$ et la série $\sum b_n$ est donc absolument convergente.

Par opérations, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 11 : [\[énoncé\]](#)

Par comparaison avec une intégrale :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right). \end{aligned}$$

6. On peut aussi dire qu'il est négligeable devant $1/n^{1.1}$ mais lui appliquer le critère spécial n'est pas possible à cause du terme $o(1/n^2)$ qui empêche l'étude de monotonie.

La série de terme général

$$\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

converge en vertu du critère spécial.

On a

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right) \sim \frac{1}{4n}$$

donc par comparaison de série à termes positifs il y a divergence de la série de terme général

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right).$$

Par sommation d'une série convergente et d'une série divergente la série de terme général diverge.

Exercice 12 : [\[énoncé\]](#)

(a) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc $\sum u_n$ converge.

(b) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{n \ln^2 n} + o\left(\frac{1}{n \ln^2 n}\right).$$

Or la série de la série de terme général $\frac{1}{n \ln^2 n}$ est absolument convergente (utiliser une comparaison avec une intégrale) donc $\sum u_n$ est convergente.

(c) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ est convergente alors que la série de terme général $\frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$ est divergente par équivalence de séries à termes positifs. On conclut que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 13 : [énoncé]

$\sqrt{n^2 + 1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

Exercice 14 : [énoncé]

Puisque $u_n \rightarrow 0$, il revient au même d'étudier la nature de la série de terme général

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Or

$$v_n = \frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)} + \frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln 2n)}{2n+1}.$$

D'une part

$$\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et d'autre part en vertu du théorème des accroissements finis, il existe c compris entre $\ln 2n$ et $\ln(2n+1)$ tel que

$$\frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln 2n)}{2n+1} = \frac{\cos(c)(\ln(2n+1) - \ln 2n)}{2n+1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que $v_n = O(1/n^2)$ et donc la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Exercice 15 : [énoncé]

Montrons que la série étudiée est divergente. Notons S_n la somme partielle de rang n de cette série. Nous allons construire deux suites (a_n) et (b_n) de limite $+\infty$ telles que $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend pas zéros ce qui assure la divergence de la série étudiée.

Soit $n \geq 1$ fixé. Les indices k vérifiant

$$2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq \sqrt{k} \leq 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

sont tels que

$$\operatorname{Re}(e^{i\sqrt{k}}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Posons alors

$$a_n = \lfloor 2n\pi - \pi/4 \rfloor \quad \text{et} \quad b_n = \lfloor 2n\pi + \pi/4 \rfloor.$$

On a

$$S_{b_n} - S_{a_n} = \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{e^{i\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

et donc par construction

$$\operatorname{Re}(S_{b_n} - S_{a_n}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est décroissante, on a la comparaison intégrale

$$\operatorname{Re}(S_{b_n} - S_{a_n}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{2}(\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1}).$$

Or

$$\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1} = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n+1} + \sqrt{a_n+1}} \sim \frac{2n\pi^2}{4n\pi} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

donc $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend pas vers 0 et l'on peut conclure que la série étudiée diverge.

Exercice 16 : [énoncé]

Quand $x \rightarrow 0$, on a

$$\frac{\sqrt{|x|}}{1+x} = \sqrt{|x|} - x\sqrt{|x|} + o(x^{3/2}).$$

On en déduit

$$u_n = \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} \sqrt{|x|} dx - \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} x\sqrt{|x|} dx + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right).$$

Par parité

$$u_n = \frac{(-1)^n 2}{3n^{3\alpha/2}} - \frac{2}{5n^{5\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right).$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de terme général $(-1)^n/n^{3\alpha/2}$ converge et par équivalence de séries à termes de signe constant, la série de terme général

$$-\frac{2}{5n^{5\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right) \sim -\frac{2}{5n^{5\alpha/2}}$$

converge si, et seulement si, $5\alpha/2 > 1$.

On en déduit que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\alpha > 2/5$.

Exercice 17 : [énoncé]

Notons respectivement a_n , b_n et c_n les termes généraux des séries étudiées.

(a) On détermine un équivalent de a_n à l'aide de la formule de Stirling.

On sait

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{donc} \quad a_n = \frac{n^n}{e^n \cdot n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car il s'agit d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leq 1$. Par équivalence de séries à termes positifs, on peut affirmer la divergence de la série $\sum a_n$.

(b) Par calcul asymptotique, on détermine un équivalent de b_n .

Par le développement limité $\cos(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ quand u tend vers 0,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

On poursuit en écrivant $\ln(1+u) = u + o(u)$ et l'on obtient

$$b_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge car il s'agit d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Par équivalence de séries à termes de signe constant, on peut affirmer la convergence de la série $\sum b_n$.

(c) Il n'est pas possible de proposer un équivalent du type « série de Riemann » au terme général étudié mais on peut cependant le comparer à une telle série.

En écrivant les puissances sous forme exponentielle,

$$n^2 c_n = \frac{n^2}{2\sqrt{n}} = \exp(2 \ln(n) - \sqrt{n} \ln(2)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\sqrt{n} \ln(2) + o(\sqrt{n})\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que c_n est négligeable devant $1/n^2$. Ce terme est positif et terme général d'une série convergente, la série $\sum c_n$ est alors absolument convergente et donc convergente.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) R_n est le reste de rang n de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ qui converge en vertu du critère spécial.

(b) Par décalage d'indice sur la deuxième somme

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

(c) Puisque

$$R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

on a

$$2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

Or par le critère spécial

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.$$

(d) Comme

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

la série $\sum R_n$ est convergente.

Exercice 19 : [énoncé]

À partir du rang $n = 2$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Le reste étant majorée par la valeur absolue du premier terme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!} = 1 - 4 + r$$

avec $|r| \leq \frac{64}{24}$ donc $x < 0$.

Exercice 20 : [\[énoncé\]](#)

Par découpage

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

donc par translations

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n\pi + t)}{n\pi + t} dt$$

puis la relation proposée.

I se perçoit alors comme somme d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, sa somme est donc du signe de son premier terme à savoir positif.

Exercice 21 : [\[énoncé\]](#)

- (a) Si (v_n) est une suite alternée dont la valeur absolue décroît vers 0 alors la série $\sum v_n$ converge.
Ce résultat s'obtient en constatant l'adjacence des suites extraites de rangs pairs et impairs de la suite des sommes partielles.
- (b) La suite $(s_n)_{n \geq 1}$ converge en vertu du critère spécial énoncé ci-dessus. En fait, il est « connu » que $(s_n)_{n \geq 1}$ tend vers $\ln 2$ et donc $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0.
- (c) On peut écrire

$$s_n = \ln 2 - r_n$$

avec

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

On a

$$r_n - r_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } r_n + r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car par, application du critère spécial à la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$, on peut majorer le reste par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. On en déduit

$$r_n = \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait

$$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} x - 1 + O((x - 1)^2)$$

et donc

$$u_n = e^{s_n} - 2 + O((e^{s_n} - 2)^2)$$

avec

$$e^{s_n} - 2 = 2(e^{-r_n} - 1) = -2r_n + O(r_n^2) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum u_n$ converge car c'est la somme d'une série vérifiant le critère spécial et d'une autre absolument convergente.

Exercice 22 : [\[énoncé\]](#)

Dans chaque étude, on note S_n la somme partielle de rang $n \in \mathbb{N}^*$ de la série étudiée.

- (a) Les premiers termes de la série sont

$$-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{11}, \dots$$

On regroupe par paquets les termes successifs de même signes.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{m^2-1} = \sum_{i=1}^{m^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{i} \rfloor}}{i} = \sum_{k=1}^m \left((-1)^k \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i} \right).$$

Introduisons

$$u_k = \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i} \text{ pour tout } k \geq 1.$$

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale

$$u_k \leq \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \int_{i-1}^i \frac{dt}{t} = \int_{k^2-1}^{(k+1)^2-1} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{(k+1)^2-1}{k^2-1}\right) \text{ pour tout } k \geq 2$$

et de façon semblable

$$u_{k-1} \geq \int_{(k-1)^2}^{k^2} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)^2}\right) \text{ pour tout } k \geq 2.$$

Or on observe

$$\frac{(k+1)^2 - 1}{k^2 - 1} \leq \frac{k^2}{(k-1)^2}$$

car

$$k^2(k^2 - 1) - (k-1)^2((k+1)^2 - 1) = 2k(k-1) \geq 0.$$

On en déduit que la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ est décroissante et, puisqu'elle est aussi de limite nulle, on peut assurer la convergence de la série $\sum (-1)^k u_k$. Ainsi, la suite (S_{m^2-1}) est convergente.

Cela ne suffit pas encore pour conclure : il faut étudier la convergence de la suite (S_n) et non seulement celle de la suite extraite (S_{m^2-1}) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ de sorte que $m^2 \leq n < (m+1)^2$. Les termes d'indice compris entre m^2 et $(m+1)^2 - 1$ étant tous de signe constant, la somme S_n est comprise entre S_{m^2-1} et $S_{(m+1)^2-1}$. Or ces deux sommes convergent vers S et, par encadrement, on peut conclure que (S_n) converge aussi vers S .

Finalement, la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ est convergente.

- (b) Dans cette étude, les termes successifs de mêmes signes sont plus nombreux que dans l'étude précédente et on remarque, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$S_{\lfloor e^{m+1} \rfloor - 1} - S_{\lfloor e^m \rfloor} = (-1)^m \sum_{i=\lfloor e^m \rfloor + 1}^{\lfloor e^{m+1} \rfloor - 1} \frac{1}{i}$$

car $\ln(i) \in]m; m+1[$ pour tout i compris entre $\lfloor e^m \rfloor + 1$ et $\lfloor e^{m+1} \rfloor - 1$. On en déduit

$$|S_{\lfloor e^{m+1} \rfloor - 1} - S_{\lfloor e^m \rfloor}| = \sum_{i=\lfloor e^m \rfloor + 1}^{\lfloor e^{m+1} \rfloor - 1} \frac{1}{i} \geq \int_{\lfloor e^m \rfloor + 1}^{\lfloor e^{m+1} \rfloor} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{\lfloor e^{m+1} \rfloor}{\lfloor e^m \rfloor + 1}\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$$

ce qui est incompatible avec une éventuelle convergence de $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln(n) \rfloor}}{n}$: cette série diverge.

Exercice 23 : [énoncé]

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante,

$$\int_0^n \sqrt{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x} dx$$

7. On peut même faire varier i jusqu'à $\lfloor e^{m+1} \rfloor$ si l'on tient pour acquis que e^{m+1} n'est pas un entier.

et donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}.$$

Il y a donc convergence de la série de terme général u_n si, et seulement si, $\alpha > 5/2$. Par l'encadrement qui précède :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \int_0^n \sqrt{x} dx \leq \int_n^{n+1} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3} n^{3/2} + O(\sqrt{n})$$

puis

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n 2}{3n^{\alpha-3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}\right).$$

Pour $\alpha > 5/2$: il y a absolue convergence comme ci-dessus.

Pour $3/2 < \alpha \leq 5/2$: il y a convergence par somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

Pour $\alpha \leq 3/2$: il y a divergence grossière.

Exercice 24 : [énoncé]

On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right).$$

Si $\alpha \leq 0$ alors $u_n \not\rightarrow 0$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge. Si $\alpha > 0$ alors $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. Si $\frac{3\alpha}{2} > 1$ alors

$$-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente et donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

Si $\frac{3\alpha}{2} \leq 1$ alors

$$-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right) \sim \frac{-1}{2n^{3\alpha/2}}$$

(de signe constant) est le terme général d'une série divergente donc $\sum_{n \geq 2} u_n$.

Exercice 25 : [énoncé]

Par développement

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$$

avec

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ et } w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

$\sum v_n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées et $\sum w_n$ converge si, et seulement si, $2\alpha > 1$ par équivalence de termes généraux de séries de signe constant. Au final, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

Exercice 26 : [énoncé]

On a

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$$

Par le critère spécial, $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}}$$

est terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a > 1/2$. Finalement, la série étudiée converge si, et seulement si, $a > 1/2$.

Exercice 27 : [énoncé]

On a

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(a+1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Par suite, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -1$.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Si $\alpha \leq 1$ alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

et donc $u_n \rightarrow 0$ si $a \in [0; 1[$, $u_n \rightarrow 1$ si $a = 1$ et (u_n) diverge si $a > 1$.

Si $\alpha > 1$ alors $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge et donc (u_n) aussi.

(b) Cas $\alpha \leq 1$ et $a = 1$: $u_n = 1$, $v_n = 0$ et on peut conclure.

Cas $\alpha < 1$ et $a \in [0; 1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n$, $n^2 v_n = e^{2 \ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \ln a} \rightarrow 0$ car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Cas $\alpha = 1$ et $a \in [0; 1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n = e^{(\ln n + \gamma + o(1)) \ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$ donc $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$ i.e. $a < -1/e$.

Cas $\alpha > 1$: $\ell = a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$,

$$v_n = \ell(e^{-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$$

Ainsi $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Exercice 29 : [énoncé]

On a

$$\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}{p!} \sim \frac{1}{p!} n^p$$

donc

$$v_n \sim \frac{(p!)^\alpha}{n^{p\alpha}}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série numérique $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/p$.

On a

$$\binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p}{p+1} + \binom{n+p}{p} \geq \binom{n+p}{p}$$

donc la suite $(|w_n|)$ est décroissante. De plus elle de limite nulle, le critère spécial des séries alternées assure alors la convergence de $\sum w_n$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) L'intégrale étudiée est bien définie pour $a > -1$. Par le changement de variable proposé

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a \sin^2(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(1+a)x^2}$$

puis en posant $u = x\sqrt{1+a}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Par symétrie

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

et par le calcul qui précède

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}} \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(c) Par monotonie, on a l'encadrement

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série actuellement étudiée entraîne la convergence de la précédente et inversement. La condition attendue est donc encore $\alpha > 2$.

(d) Les sommes partielles de la série étudiée ci-dessus correspondent aux intégrales suivantes

$$\int_0^n \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

La fonction intégrée étant positive, la convergence de l'intégrale entraîne la convergence de la série et inversement. On conclut que l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) Pour définir u_n , il est nécessaire de supposer $\alpha > 1$.
Par comparaison avec une intégrale, on montre

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(b) Pour définir u_n , il est nécessaire de supposer $\alpha > 0$.

Par application du critère spécial des séries alternées, v_n étant le reste de la série $\sum \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$ est du signe de $(-1)^n$ et $|v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \rightarrow 0$.

De plus

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+1)^\alpha} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+2)^\alpha}$$

donc

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha} \right).$$

Par le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{(p+n+2)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+1)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(c_n)^{\alpha+1}}$$

avec $c_n \in]p+n+1; p+n+2[$.

La suite (c_n) est croissante donc on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à

$$\sum (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha} \right)$$

et conclure que sa somme est du signe de son premier terme. Au final, $(|v_n|)$ est décroissant et en appliquant une dernière fois le critère spécial des séries alternées, on conclut que $\sum v_n$ converge.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) On a

$$\Sigma_n = \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik} \right) = \text{Im} \left(e^i \frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leq \left| e^i \frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$$

et la suite $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$ est effectivement bornée.

(b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}.$$

Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \rightarrow 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Par sommation géométrique

$$S_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right)$$

donc

$$|S_n| \leq \left|\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right| \leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}.$$

(b) On a

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n(n+1)} - S_0 + \frac{S_N}{N+1}.$$

Or

$$\frac{S_N}{N+1} \rightarrow 0 \text{ et}$$

$\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n converge.

(c) On a

$$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

donc

$$|u_n| \geq \frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \frac{1}{2n}.$$

Si $\theta = 0 \pmod{\pi}$ alors $|u_n| \geq \frac{1}{n}$ et donc $\sum |u_n|$ diverge.

Si $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ alors par ce qui précède la série $\sum \frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge et puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, par opérations, la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) $(a_n - a_{n+1})S_n = O(a_n - a_{n+1})$ et la série à termes positifs $\sum a_n - a_{n+1}$ est convergente.

(b) En séparant la somme en deux et en décalant les indices

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1})S_k = \sum_{k=0}^n a_k S_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k S_{k-1}$$

puis en regroupant

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1})S_k = a_0 S_0 + \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1}) - a_{n+1} S_n$$

avec $a_{n+1} S_n \rightarrow 0$.

Par suite $\sum a_n (S_n - S_{n-1})$ est convergente.

(c) On applique le résultat précédent à $a_n = 1/n$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$. (S_n) est bien bornée car

$$S_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ikx}\right) = \cos(nx) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

On a

$$S_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right)$$

donc

$$|S_n| \leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|} = M_\theta.$$

Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1) - x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x-1)^2} \leq 0$$

donc f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

$u_n = f(n) \cos(n\theta) = f(n)(S_n - S_{n-1})$ donc

$$\sum_{n=2}^N u_n = \sum_{n=2}^N f(n)S_n - \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1)S_n = \sum_{n=2}^N (f(n) - f(n+1))S_n + f(N+1)S_N - f(2)S_1.$$

Or $f(N+1)S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ car $S_N = O(1)$ et $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

De plus

$$|(f(n) - f(n+1))S_n| \leq M_\theta (f(n) - f(n+1))$$

avec $\sum f(n) - f(n+1)$ série convergente (car f converge en $+\infty$) donc par comparaison $\sum (f(n) - f(n+1))S_n$ est absolument convergente.

Ainsi par opérations, $\left(\sum_{n=2}^N u_n\right)_{N \geq 2}$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

On a

$$|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1} |\cos(n\theta)| \geq \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos^2(n\theta).$$

Or $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ donc $\cos^2 a \geq \frac{1}{2} \cos 2a + 1$ puis

$$|u_n| \geq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(2n\theta) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$

En reprenant l'étude qui précède avec 2θ au lieu de θ , on peut affirmer que

$$\sum \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(2n\theta)$$

converge tandis que $\sum \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)}$ diverge puisque $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Par comparaison, on peut affirmer que $\sum |u_n|$ diverge.

Exercice 36 : [énoncé]

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k.$$

On a

$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N+1}.$$

Or $\frac{S_N}{N+1} \rightarrow 0$ car (S_N) converge et $\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut conclure que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z_n}{n}$ converge.

Exercice 37 : [énoncé]

Le cas $\alpha = 1$ est entendu. Étudions $\alpha \in]-\infty; 1[$.

Par l'absurde, supposons la convergence de $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ et introduisons

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^\alpha}$$

de sorte que $S_n - S_{n-1} = a_n/n^\alpha$.

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k^{1-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{(k+1)^\alpha}$$

puis

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^n S_k \left(\frac{1}{k^{1-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}} \right) + \frac{S_n}{(n+1)^{1-\alpha}}.$$

La suite (S_n) est bornée car convergente et

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^{1-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}} \rightarrow 1$$

il y a donc absolue convergence de la série

$$\sum S_n \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}} \right)$$

et l'on en déduit la convergence de $\sum \frac{a_n}{n}$.

C'est absurde.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1} (*).$$

Montrons que la convergence de $\sum u_n$ entraîne que $n u_n \rightarrow 0$.

Posons S_n les sommes partielles de $\sum u_n$.

Par la décroissance de u_n , on a $0 \leq n u_{2n} \leq S_{2n} - S_n$.

Par suite $n u_{2n} \rightarrow 0$ et aussi $2n u_{2n} \rightarrow 0$.

De façon semblable, on obtient $nu_{2n+1} \rightarrow 0$ puis $(2n+1)u_{2n+1} \rightarrow 0$.
Ainsi $nu_n \rightarrow 0$ et donc

$$\sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

- (b) Supposons que la série de terme général v_n converge.
Si la série de terme général u_n converge alors $u_n \rightarrow 0$.
Inversement, supposons que $u_n \rightarrow 0$. On peut écrire

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}.$$

On a alors

$$0 \leq nu_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} v_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

Puisque la série des v_n converge,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \rightarrow 0 \text{ puis } nu_n \rightarrow 0.$$

La relation (*) entraîne alors la convergence de $\sum u_n$.

- (c) $u_n = 1$ convient, où si l'on veut une suite non constante, $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

Exercice 39 : [énoncé]

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1}).$$

En séparant la somme en deux et en reprenant l'indexation de la deuxième somme

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k$$

ce qui donne (sachant $S_0 = 0$)

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} S_n.$$

La suite (S_n) converge, elle est donc bornée par un certain réel M .

D'une part $a_n \rightarrow 0$ et donc $a_{n+1} S_n \rightarrow 0$.

D'autre part $|(a_k - a_{k+1}) S_k| \leq M |a_k - a_{k+1}|$ et donc la série $\sum (a_n - a_{n+1}) S_n$ converge absolument.

Par addition de convergence, on peut conclure que la série $\sum a_n^2$ converge.

Exercice 40 : [énoncé]

On a

$$\sum_{n=2}^{2N+1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{k=1}^N \ln(2k+1) - \ln(2k+1) = 0$$

et

$$\sum_{n=2}^{2N} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{n=2}^{2N+1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) + o(1) \rightarrow 0$$

donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 0.$$

Exercice 41 : [énoncé]

Le terme

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

est bien défini en tant que reste d'une série alternée satisfaisant au critère spécial.

Pour $N \leq K$ entiers,

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^K \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=N+1}^K \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

D'une part

$$\sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}.$$

D'autre part

$$\sum_{k=N+1}^K \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = N \sum_{k=N+1}^K \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

En passant à la limite quand $K \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k} + N \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Or

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

donc quand $N \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{n=1}^N u_n \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ainsi $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2.$$

Exercice 42 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \sin(\pi x) dx.$$

Posons

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx.$$

Cette intégrale est bien définie car la fonction intégrée se prolonge par continuité en 1.

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k - I \right| \leq \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} x^{n+1} dx \leq \frac{M}{n+1}$$

avec

$$M = \sup_{[0;1]} \frac{\sin(\pi x)}{1-x}.$$

On conclut que $\sum_{k=0}^n u_k \rightarrow I$ puis par changement de variable

$$\sum_{k=0}^n u_k \rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 43 : [énoncé]

Pour $t = -1$,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = -(m+1)(n+1)$$

ce qui permet de conclure.

Pour $t \neq -1$,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i t^{i+1} \frac{1 - (-t)^{m+1}}{1+t}.$$

Quand $m \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t}$$

si $|t| < 1$ et diverge sinon. Aussi, quand $|t| < 1$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t} = t \frac{1 - (-t)^{n+1}}{(1+t)^2}$$

et quand $n \rightarrow +\infty$,

$$t \frac{1 - (-t)^{n+1}}{(1+t)^2} \rightarrow \frac{t}{(1+t)^2}.$$

On conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \frac{t}{(1+t)^2}.$$

Exercice 44 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\alpha} + \varepsilon_n$$

avec

$$|\varepsilon_n| \leq \int_0^1 x^{n+\alpha} dx = \frac{1}{n+\alpha-1} \rightarrow 0$$

d'où la conclusion.

Exercice 45 : [énoncé]

Tout d'abord la série converge en vertu de la règle de d'Alembert (en traitant $x = 0$ séparément)

Puisque

$$\sum_{k=0}^n kx^k = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) = x \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)' \rightarrow \frac{x}{(1-x)^2}$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 46 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{4n+1} = \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-t^4)^n dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^4)^{N+1}}{1+t^4} dt.$$

Or

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t^4)^{N+1}}{1+t^4} dt \right| \leq \int_0^1 t^{4N+4} dt = \frac{1}{4N+5} \rightarrow 0$$

donc $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}.$$

Enfin

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right).$$

Exercice 47 : [énoncé]

Introduisons la série entière de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(4n+3)}.$$

On vérifie aisément que son rayon de convergence est égale à 1 et que sa somme est définie et continue sur $[-1; 1]$ par convergence normale.

Sur $] -1; 1[$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+1}.$$

Pour $x \neq 0$

$$\left(\frac{1}{x} S'(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$

On en déduit que sur $] -1; 1[$

$$S'(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$$

puis

$$S(x) = \int_0^x t \int_0^t \frac{du}{1-u^4}.$$

Par intégration par parties

$$S(x) = \left[\frac{1}{2}(t^2-1) \int_0^t \frac{du}{1-u^4} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1-t^2}{1-t^4} dt$$

et ainsi

$$S(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Quand $x \rightarrow 1^-$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^4} = O(\ln(1-x)) = o\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

donc

$$S(x) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{8}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = S(1) = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 48 : [énoncé]

- (a) a) Une comparaison série intégrale est inadaptée, f n'est pas monotone comme en témoigne ses changements de signe. En revanche :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) - f(n) dx.$$

Or par le théorème des accroissements fini,

$$f(x) - f(n) = f'(c_x)(x - n)$$

avec $c_x \in]n; x[$.

Après calcul de $f'(x)$, on en déduit

$$|f(x) - f(n)| \leq \frac{1}{3n^{4/3}} + \frac{2}{3n^{5/3}}$$

puis $u_n = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$.

- (b) La série de terme général $\int_n^{n+1} f(t) dt$ diverge car $\int_0^n f(t) dt = 3 \sin(n^{1/3})$ diverge. En effet si $\sin(n^{1/3})$ convergeait vers ℓ alors par extraction $\sin(n)$ aussi et il est classique d'établir la divergence de $(\sin(n))$. On en déduit que $\sum \frac{\cos(n^{1/3})}{n^{2/3}}$ diverge.
- (c) Il suffit de reprendre la même étude pour parvenir à la même conclusion $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n)$.

Exercice 49 : [énoncé]

- (a) La fonction f' est bien définie et continue par morceaux sur $[1; +\infty[$.
On a

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2}$$

et donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{x^2}.$$

La fonction $x \mapsto 1/x^2$ étant intégrable sur $[1; +\infty[$, il en est de même de f' par domination.

- (b) Par intégration par parties

$$\int_{n-1}^n f(t) dt = \left[(t - (n-1))f(t) \right]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n (t - (n-1))f'(t) dt$$

donc

$$|u_n| \leq \int_{n-1}^n (t - (n-1))|f'(t)| dt \leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt.$$

L'intégrabilité de f' permet d'introduire $\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$ et d'affirmer que les sommes partielles de la série $\sum |u_n|$ sont majorées via

$$\sum_{n=1}^N |u_n| \leq |u_1| + \int_1^N |f'(t)| dt \leq |u_1| + \int_1^{+\infty} |f'(t)| dt.$$

La série $\sum u_n$ est alors absolument convergente.

- (c) Par l'absurde, supposons que la suite $(\cos(\ln n))$ converge. La suite extraite $(\cos(\ln 2^n)) = (\cos(n \ln 2))$ aussi. Notons ℓ sa limite.
Puisque

$$\cos((n+1) \ln 2) + \cos((n-1) \ln 2) = 2 \cos(n \ln 2) \cos(\ln 2)$$

on obtient à la limite $2\ell = 2\ell \cos(\ln 2)$ et donc $\ell = 0$.

Puisque

$$\cos(2n \ln 2) = 2 \cos^2(n \ln 2) - 1$$

on obtient aussi à la limite $\ell = 2\ell^2 - 1$ ce qui est incompatible avec $\ell = 0$.

- (d) Puisque

$$\int_{n-1}^n f(t) dt = -\cos(\ln n) + \cos(\ln(n-1)).$$

La divergence de la suite $(\cos(\ln n))$ entraîne la divergence de la série

$$\sum \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

Enfin, puisque la série $\sum u_n$ converge, on peut alors affirmer que la série $\sum f(n)$ diverge.

Exercice 50 : [énoncé]

La fonction f_n est continue, strictement décroissante et de limites $+\infty$ et 0 en n et $+\infty$. On en déduit que f_n réalise une bijection de $]n; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$. Ainsi, pour tout $a > 0$, il existe un unique $x_n > n$ vérifiant $f_n(x_n) = a$.

On a

$$f_n(n+1+y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1+y-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+y} \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t+y} = \int_0^n \frac{dt}{t+y} = \ln\left(1 + \frac{n}{y}\right).$$

Pour $y = \frac{n}{e^a - 1}$,

$$f(n+1+y) \leq \ln(1 + (e^a - 1)) = a$$

et par suite

$$x_n \leq n + 1 + \frac{n}{e^a - 1}.$$

Aussi

$$f(n+y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{y+k} \geq \int_0^n \frac{dt}{t+y} = \ln\left(1 + \frac{n}{y}\right).$$

Pour $y = \frac{n}{e^a - 1}$, $f(n+y) \geq a$ et par suite

$$x_n \geq n + \frac{n}{e^a - 1}.$$

On en déduit

$$x_n \sim n + \frac{n}{e^a - 1} = \frac{e^a n}{e^a - 1}.$$

Exercice 51 : [énoncé]

On remarque

$$n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \varphi \left(\frac{k}{n} \right)$$

avec $\varphi: x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$.

La fonction φ est décroissante en tant que produit de deux fonctions décroissantes positives. Par suite

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \varphi(t) dt \leq \frac{1}{n} \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi(t) dt.$$

En sommant et en exploitant l'intégrabilité de φ au voisinage de $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n} \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \leq \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} dt = \left[-e^{1/t} \right]_1^{+\infty} = e - 1 \text{ et } \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} dt = \left[-e^{1/t} \right]_{(n-1)/n}^{+\infty} \rightarrow e - 1.$$

Par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \right) = e - 1.$$

Exercice 52 : [énoncé]

La fonction $t \mapsto f(e^{-t})$ est décroissante et positive donc, par théorème de comparaison série intégrale, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(e^{-t}) dt$ et la série $\sum f(e^{-n})$ ont même nature.

Par le changement de variable \mathcal{C}^1 bijectif $u = e^t$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(e^{-t}) dt$ à même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} f \left(\frac{1}{u} \right) du$.

La fonction $u \mapsto \frac{1}{u} f \left(\frac{1}{u} \right)$ est décroissante et positive donc, par théorème de comparaison série intégrale, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} f \left(\frac{1}{u} \right) du$ et la série $\sum \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right)$ ont même nature.

Exercice 53 : [énoncé]

La nature des séries étudiées se déduit de l'étude des intégrales associées.

La fonction f' est continue, décroissante et positive, la nature de la série $\sum f'(n)$ se déduit de l'étude de la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$\int_1^x f'(t) dt = \left[f(t) \right]_1^x = f(x) - f(1).$$

La série $\sum f'(n)$ est donc convergente si, et seulement si, la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.

Parallèlement, la fonction f'/f est aussi continue, décroissante⁸ et positive. La nature de $\sum \frac{f'(n)}{f(n)}$ se déduit alors de la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \left[\ln(f(t)) \right]_1^x = \ln(f(x)) - \ln(f(1)).$$

Par composition de limites, la fonction f admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, $\ln(f)$ y admet aussi une limite finie. On en déduit que les séries $\sum f'(n)$ et $\sum \frac{f'(n)}{f(n)}$ ont même nature.

Exercice 54 : [énoncé]

(a) On réalise une intégration par parties où l'on intègre pertinemment la fonction constante égale à 1.

Pour les fonctions u et v de classe \mathcal{C}^1 déterminées par

$$u(t) = t - \left(k + \frac{1}{2} \right) \text{ et } v(t) = f(t)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(t) dt &= \left[\left(t - k - \frac{1}{2} \right) f(t) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2} \right) f'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} (f(k+1) + f(k)) + \int_k^{k+1} \left(k + \frac{1}{2} - t \right) f'(t) dt. \end{aligned}$$

Le facteur de $f'(t)$ dans l'intégrale change de signe en $k + 1/2$. On découpe cette intégrale en ce point afin de pouvoir l'encadrer.

⁸ Les fonctions f' et $1/f$ sont décroissantes et positives donc leur produit est une fonction décroissante.

Par décroissance de f' , on sait $f'(t) \geq f'(k)$ pour tout $t \in [k; k + 1/2]$. Par intégration en bon ordre, on obtient alors

$$\int_k^{k+1/2} \underbrace{\left(k + \frac{1}{2} - t\right)}_{\geq 0} f'(t) dt \geq \int_k^{k+1/2} \left(k + \frac{1}{2} - t\right) f'(k) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} - t\right)^2 f'(k) \right]_k^{k+1/2} = \frac{1}{8} f'(k).$$

On procède de même en partant de $f'(t) \leq f'(k + 1/2)$ pour $t \in [k; k + 1/2]$ et l'on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{8} f' \left(k + \frac{1}{2}\right) \leq \int_k^{k+1/2} \left(k + \frac{1}{2} - t\right) f'(t) dt \leq \frac{1}{8} f'(k). \quad (1)$$

De la même façon, on obtient aussi

$$-\frac{1}{8} f' \left(k + \frac{1}{2}\right) \leq \int_{k+1/2}^{k+1} \underbrace{\left(k + \frac{1}{2} - t\right)}_{\leq 0} \underbrace{f'(t)}_{f'(k+1) \leq f'(k+1/2)} dt \leq -\frac{1}{8} f'(k+1). \quad (2)$$

En sommant les encadrements (??) et (??), on acquiert celui attendu

$$0 \leq \int_k^{k+1} f(t) dt - \frac{1}{2} (f(k) + f(k+1)) \leq \frac{1}{8} (f'(k) - f'(k+1)).$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n est la somme partielle de rang n de la série de terme général

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t) dt - \frac{1}{2} (f(k) + f(k+1)) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

L'étude qui précède donne $0 \leq u_k \leq f'(k) - f'(k+1)$. Or la série de terme général $f'(k) - f'(k+1)$ a la nature de la suite $(f'(k))$ et cette dernière est convergente car la fonction f' est supposée de limite nulle. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série de terme général u_k , c'est-à-dire de la suite (S_n) .

(c) Par intégration par parties, on a

$$\int_1^n f(t) dt = - \int_1^n 1 \times \ln(t) dt = - \left[t \ln(t) \right]_1^n + \int_1^n dt = -n \ln(n) + n - 1.$$

De plus, on a aussi

$$\frac{1}{2} f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) = -\ln(n!) + \frac{1}{2} \ln(n).$$

Or la fonction f satisfait les hypothèses de l'étude en cours et l'on peut donc affirmer que

$$S_n = -n \ln(n) + n - 1 + \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln(n)$$

admet une limite finie. On en déduit que le terme σ_n admet aussi une limite finie⁹.

Exercice 55 : [énoncé]

(a) Par la relation de Chasles, on écrit

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} f(t) dt \right) = \int_1^n f(t) dt.$$

La convergence de la suite $(\int_1^n f(t) dt)$ équivaut donc à la convergence de la série de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

On établit la convergence de la série de terme général $v_n = u_n - f(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties avec

$$u(t) = t - (n+1) \quad \text{et} \quad v(t) = f(t)$$

on obtient

$$u_n = \underbrace{\left[(t - (n+1)) f(t) \right]_n^{n+1}}_{=f(n)} - \int_n^{n+1} (t - (n+1)) f'(t) dt$$

et donc

$$|v_n| = \left| \int_n^{n+1} (t - (n+1)) f'(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} \underbrace{|t - (n+1)|}_{\leq 1} |f'(t)| dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt.$$

9. Voir aussi le sujet 5041 pour un calcul plus direct.

Pour tout $N \geq 1$, on a alors

$$\sum_{n=1}^N |v_n| \leq \int_1^{N+1} |f'(u)| du \leq M.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |v_n|$ sont majorées ce qui donne l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série de terme général v_n .

Enfin, puisque $u_n = v_n + f(n)$, la convergence de la série de terme général u_n équivaut à celle de la série de terme général $f(n)$.

(b) Introduisons la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t}.$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1; +\infty[$ avec, pour $t \in [1; +\infty[$,

$$f'(t) = \frac{\cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t))}{t^2}.$$

On vérifie l'hypothèse de l'énoncé. Pour tout $x \geq 1$,

$$\int_1^x |f'(t)| dt \leq \int_1^x \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t} \right]_1^x = 2 - \frac{2}{x} \leq 2 = M.$$

La convergence de la série étudiée équivaut alors à la convergence quand n croît vers l'infini du terme

$$\int_1^n \frac{\sin(\ln(t))}{t} dt.$$

On reconnaît une forme $u' \sin(u)$ ce qui permet de mener le calcul de l'intégrale

$$\int_1^n \frac{\sin(\ln(t))}{t} dt = \left[-\cos(\ln(t)) \right]_1^n = 1 - \cos(\ln(n)).$$

Puisque la suite de terme général $\cos(\ln(n))$ diverge¹⁰, la série étudiée est aussi divergente.

Exercice 56 : [énoncé]

(a) $\frac{1}{k+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série à terme positif divergente donc

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

(b) Pour être plus précis,

$$S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+\sqrt{k}} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}}$$

or

$$\frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^{3/2}}$$

et est donc le terme général d'une série convergente.

Ainsi, $S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} o\mathcal{C}'$ d'où

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + (\gamma + \mathcal{C}') + o(1) = \ln n + C + o(1).$$

Exercice 57 : [énoncé]

(a) $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$ donc la série de terme général $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ est absolument convergente. Par suite (S_n) converge vers une certaine constante C .

(b)

$$C - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

car $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série à termes positifs convergente.

Par comparaison série intégrale $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et on peut conclure comme annoncée.

Exercice 58 : [énoncé]

(a) Pour $\alpha > 1$, la série de terme général $1/n^\alpha$ converge et si l'on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

10. On peut déterminer des valeurs de n arbitrairement grandes telles que ce cosinus soit proche de 1 et d'autres telles qu'il soit proche de -1 .

on observe

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} = S_{2n} - S_n \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0.$$

Pour $\alpha = 1$, on introduit les sommes partielles harmoniques

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En notant γ la constante d'Euler, on peut écrire

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

et alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \ln 2 + o(1) \rightarrow \ln 2.$$

(b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégral, on peut écrire

$$\sin x = x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin^{(3)}(t) dt.$$

Puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin^{(3)}(t) = -\cos(t) \in [-1; 1]$$

on a

$$\forall x \geq 0, \sin x \geq x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} dt = x - \frac{1}{6}x^3.$$

D'autre part, il est bien connu que

$$\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x.$$

On en déduit

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

En vertu de ce qui précède, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \ln 2.$$

Exercice 59 : [énoncé]

(a) On a

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right).$$

Or

$$\ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right) = -\frac{1}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

donc

$$\ln u_n = -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{3} \ln n + C + o(1)$$

car $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ et $\sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est une série convergente.

(b) Puisque

$$\ln(n^{1/3}u_n) \rightarrow \beta$$

on a

$$u_n \sim \frac{e^\beta}{n^{1/3}}$$

et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 60 : [énoncé]

Posons

$$P_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n} > 0.$$

On a

$$\ln(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(3k-1) - \ln n.$$

Par comparaison série-intégrale

$$\ln 2 + \int_1^n \ln(3t-1) dt \leq \sum_{k=1}^n \ln(3k-1) \leq \int_1^{n+1} \ln(3t-1) dt.$$

Or

$$\int_1^n \ln(3t-1) dt = \frac{3n-1}{3} \ln(3n-1) - n + C = n \ln n + (\ln 3 - 1)n + O(\ln n)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \ln(3k-1) = n \ln n + (\ln 3 - 1)n + O(\ln n).$$

On en déduit

$$\ln P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 3 - 1$$

puis

$$P_n \rightarrow \frac{3}{e}.$$

Exercice 61 : [énoncé]

(a) Avec convergence des sommes engagées

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k(nk+1)} - \frac{1}{nk^2} \right) = \frac{\pi^2}{6n} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk^2(nk+1)}$$

et

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk^2(nk+1)} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} \sim \frac{\pi^2}{6n}.$$

(b) Par décomposition en éléments simples et télescopage

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 62 : [énoncé]

n_p est bien défini car $H_n \rightarrow +\infty$.

La suite (n_p) est croissante et évidemment non majorée donc

$$n_p \rightarrow +\infty.$$

Par définition de n_p , on a

$$H_{n_p} \geq p \geq H_{n_p-1}.$$

Or

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc

$$\ln n_p + \gamma + o(1) \geq p \geq \ln(n_p - 1) + \gamma + o(1).$$

Puisque

$$\ln(n_p - 1) = \ln n_p + o(1)$$

on obtient

$$p = \ln n_p + \gamma + o(1)$$

puis

$$n_p = e^{n-\gamma+o(1)} \sim e^{n-\gamma}.$$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) Puisque

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

on peut affirmer que l'ensemble

$$\left\{ p \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \geq j \right\}$$

est une partie non vide de \mathbb{N} . Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j .

(b) Par définition de Φ_j , on a

$$j \leq \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}.$$

Or, par comparaison avec une intégrale

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^{\Phi_j} \frac{dt}{t} = 1 + \ln \Phi_j.$$

On en déduit $\Phi_j \geq e^{j-1}$ puis $\Phi_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$.

(c) Par définition de Φ_j , on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_{j-1}} \frac{1}{n} \leq j \leq \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}.$$

Or, sachant que $\Phi_j \rightarrow +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln \Phi_j + \gamma + o(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{\Phi_j-1} \frac{1}{n} = \ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1).$$

Par suite

$$\ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1) \leq j \leq \ln \Phi_j + \gamma + o(1).$$

Or

$$\ln(\Phi_j - 1) = \ln \Phi_j + o(1)$$

donc

$$j = \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

puis

$$\Phi_j = e^{j-\gamma+o(1)}.$$

On en déduit

$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} = \frac{e^{j+1-\gamma+o(1)}}{e^{j-\gamma+o(1)}} = e^{1+o(1)} \rightarrow e.$$

Exercice 64 : [énoncé]

Posons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. On observe que

$$\sum_{k=1}^n k u_n = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k.$$

Par suite

$$w_n = \frac{n+1}{n} v_n - \frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k \quad (*).$$

Puisque $\frac{S_n}{n u_n} \rightarrow a$, on a $S_n \sim a n u_n$.

La série de terme général S_n est une série à termes positifs divergente donc

$$\sum_{k=1}^n S_k \sim a \sum_{k=1}^n k u_k.$$

Par suite

$$\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k \sim a w_n.$$

La relation (*) dévient alors

$$w_n = \frac{n+1}{n} v_n - a w_n + o(w_n)$$

et en on en déduit que

$$w_n \sim \frac{1}{a+1} v_n \rightarrow \frac{a}{a+1}.$$

Exercice 65 : [énoncé]

(a) On sait

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

donc

$$a_n = H_{3n} - H_n \rightarrow \ln(3) = \lambda.$$

(b) Si on sait

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

les choses vont assez vites... mais sans doute l'examinateur souhaitera la démonstration de ce résultat.

$$a_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=n+1}^{3n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{3n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln 3$$

donc

$$a_n - \lambda = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Or $\sum \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ est absolument convergente car

$$\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim -\frac{1}{2k^2}$$

donc $a_n - \lambda = R_n - R_{3n}$ avec

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Or par sommation d'équivalent sur des restes de séries convergentes à termes de signe constant,

$$R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$$

(le dernier équivalent s'obtenant, soit par comparaison série intégrale, soit par $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k-1)}$ et sommation télescopique).

Au final

$$a_n - \lambda = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{3n}.$$

Exercice 66 : [énoncé]

Par décomposition en éléments simples

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^N \frac{2}{(2n-1)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{2}{n} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 2 \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}.$$

Or

$$\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln(2N) + \gamma + o(1) - \ln N - \gamma = \ln 2 + o(1)$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \ln 2.$$

Exercice 67 : [énoncé]

On a

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$ existe.

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

donc en exploitant

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{5k+6}{k(k+1)(k+2)} = 3 \ln \frac{n^3}{(n+1)(n+2)^2} + 4 + o(1) \rightarrow 4.$$

Exercice 68 : [énoncé]

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

Sachant

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n}$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{3}{n} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} - 4 \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n}.$$

Or on sait que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$$

donc on conclut que la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4 \ln 2.$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) On a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \ln 2n + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma = \ln 2 + o(1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + o(1)$$

donc la série converge et est de somme égale à $\ln 2$.

(b) On a

$$\sum_{k=1}^{3n} u_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} = \ln 3n + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma = \ln 3 + o(1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{3n+1} u_n = \sum_{k=1}^{3n} u_n + o(1) \rightarrow \ln 3 \text{ et } \sum_{k=1}^{3n+2} u_n = \sum_{k=1}^{3n} u_n + o(1) \rightarrow \ln 3$$

donc la série converge et est de somme égale à $\ln 3$.

Exercice 70 : [énoncé]

On a

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et donc

$$\frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \sim \frac{3}{n^3}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2}$ converge

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}.$$

En introduisant la constante d'Euler γ , on sait

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1).$$

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln(N+1) + \gamma - 1 + o(1)$$

et en introduisant dans la somme les inverses des nombres pairs absents, on obtient

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} = \ln(2N+1) - \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \gamma - 1 + o(1).$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = \ln \frac{N^{18}(N+1)^6}{(2N+1)^{24}} + 18 + o(1)$$

puis à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = 18 - 24 \ln 2.$$

Exercice 71 : [énoncé]

$$\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{4n} - \frac{3}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série étudiée est absolument convergente.

On a

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = \sum_{k=1}^{4N+4} \frac{1}{k} - 4 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+2}.$$

Or

$$4 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+2} = 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} = 2 \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k}.$$

Par le développement

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on parvient à

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = \ln(4N+4) + \gamma - 2 \ln(2N+1) - 2\gamma + \ln N + \gamma + o(1)$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = 0$$

(ce qui change du $\ln 2$ traditionnel... ;-)

Exercice 72 : [énoncé]

(a) f est décroissante sur $[e; +\infty[$. Pour $p \geq 4$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \frac{\ln p}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{\ln t}{t} dt$$

donc $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + v_n$ avec

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq v_n \leq \int_3^n \frac{\ln t}{t} dt$$

donc $v_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

Étudions $w_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$, $w_n - w_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t} dt \leq 0$ donc (w_n) est décroissante.

D'autre part les calculs précédents donnent (w_n) minorée et donc on peut conclure que w_n converge. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1).$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n)}{2n} - \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n)}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln(n)}{n} = \ln 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + u_N - u_{2N}.$$

Par le développement asymptotique précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \ln 2 \cdot \ln n + \ln(2)\gamma + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C - \frac{1}{2}(\ln 2n)^2 - C + o(1)$$

et après simplification

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2).$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2).$$

N'est-ce pas magnifique ?

Exercice 73 : [énoncé]

(a) Par sommation de relations de comparaison (on compare au terme général d'une série à termes positifs convergente), on peut écrire avec existence

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right).$$

Par comparaison avec une intégrale, on poursuit

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Pour $k \geq 1$, on peut écrire

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

En sommant pour k allant de 2 jusqu'à $n-1$, il vient

$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

avec

$$\sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k^2}\right) = \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{= -\gamma} - \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{= O(1/n)}.$$

En ajoutant un terme $1/n$ et en réorganisant les membres, on obtient l'identité voulue.

(c) Posons S_n la somme partielle de rang n . On a

$$\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor = k \iff 2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

On en déduit

$$S_{2^{k+1}-1} - S_{2^k-1} = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} k = k \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2p} - \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2p+1}.$$

On adjoint les termes pairs intermédiaires à la deuxième somme

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{p} - \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} S_{2^{N+1}-1} &= \sum_{k=1}^N (S_{2^{k+1}-1} - S_{2^k-1}) + S_1 \\ &= \sum_{k=1}^N \left(k \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{p} \right) - \sum_{k=1}^N \left(k \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Après glissement d'indice dans la deuxième somme puis simplification

$$\begin{aligned} S_{2^{N+1}-1} &= \sum_{k=1}^N \left(k \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{p} \right) - \sum_{k=2}^{N+1} \left((k-1) \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{p} \right) - N \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n} - N \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{n} \\ &= \ln(2^N - 1) + \gamma + O\left(\frac{1}{2^N}\right) - N \ln 2 - NO\left(\frac{1}{2^N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \gamma. \end{aligned}$$

Cette étude ne suffit pas pour conclure, il faut encore étudier la limite de (S_n) . Pour $n \geq 1$, introduisons k tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. On a

$$S_n - S_{2^k-1} = k \sum_{p=2^k}^n \frac{(-1)^p}{p}.$$

Par application du critère spécial, cette somme est encadrée par deux sommes partielles consécutives, par exemple, celles de rangs $2^k - 1$ (qui vaut 0) et 2^k (qui vaut $1/2^k$). On en déduit :

$$|S_n - S_{2^k-1}| \leq \frac{k}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut alors conclure que la série étudiée converge et sa somme vaut γ .

Exercice 74 : [\[énoncé\]](#)

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \int_0^1 \frac{v^n - 1}{v-1} = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k dv$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1)$$

donc $u_n \rightarrow -\gamma$

Exercice 75 : [\[énoncé\]](#)

- (a) C'est la convergence de u_n vers ℓ .
- (b) On a

$$|v_n - \ell| = \frac{1}{n} |(u_1 - \ell) + \dots + (u_n - \ell)|$$

et par l'inégalité triangulaire

$$|v_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \dots + |u_n - \ell|}{n}.$$

On conclut en exploitant $|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k > n_0$.

- (c) Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} = \frac{C^{te}}{n} \rightarrow 0$$

donc pour n assez grand

$$\frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi il existe un rang n_1 au-delà duquel

$$|v_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

(d) On applique le résultat précédent à la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ et on peut affirmer

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \rightarrow \alpha.$$

Après télescopage

$$\frac{1}{n}(u_n - u_0) \rightarrow \alpha$$

puis

$$\frac{1}{n}u_n \rightarrow \alpha$$

et enfin

$$u_n \sim \alpha n.$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) Supposons $\ell = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > n_0, |u_n| \leq \varepsilon/2.$$

On a alors

$$|v_n| \leq \left| \frac{u_1 + \dots + n_0 u_{n_0}}{n^2} \right| + \left| \frac{(n_0 + 1)u_{n_0+1} + \dots + n u_n}{n^2} \right| \leq \frac{C^{te}}{n^2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

pour n assez grand.

Ainsi $v_n \rightarrow 0$.

Cas général : $u_n = \ell + w_n$ avec $w_n \rightarrow 0$:

$$v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} \ell + \frac{w_1 + \dots + n w_n}{n^2} \rightarrow \frac{\ell}{2}.$$

(b) On peut écrire

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{(u_n - u_{n-1}) + \dots + (u_1 - u_0)}{n^2} + \frac{u_0}{n^2}$$

donc

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{n \frac{(u_n - u_{n-1})}{n} + \dots + \frac{(u_1 - u_0)}{1}}{n^2} + \frac{u_0}{n^2} \rightarrow \frac{\ell}{2}.$$

Exercice 77 : [énoncé]

On a $\ln u_{n+1} - \ln u_n \rightarrow \ln \ell$ donc par Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln u_k - \ln u_{k-1} \rightarrow \ln \ell$$

d'où

$$\frac{1}{n} \ln u_n \rightarrow \ln \ell$$

puis

$$\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell.$$

Exercice 78 : [énoncé]

(a) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* car

$$\forall x > 0, \ln(1+x) > 0.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante car

$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est aussi minorée par 0 donc convergente.

En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0.

(b)

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n u_{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

car $u_{n+1} \sim u_n$.

(c) Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

puis

$$\frac{1}{n} \frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Finalement

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

Exercice 79 : [énoncé]

(a) La suite étudiée est bien définie et à termes tous positifs. On en déduit

$$0 \leq u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc par encadrement $u_n \rightarrow 0$.

(b) Pour $n \geq 1$, on peut écrire $v_n = e^{-u_{n-1}}$ et alors $v_n \rightarrow 1$ par composition de limites.

(c) On en déduit

$$u_n \sim 1/n.$$

La série $\sum u_n$ est alors divergente par équivalence de séries à termes positifs. On a aussi

$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} = \frac{1 - u_{n-1} + o(u_{n-1})}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum (-1)^n/n$ converge en vertu du critère spéciale et $\sum O(1/n^2)$ est absolument convergente par argument de comparaison. Par opération sur les séries convergentes, la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 80 : [énoncé]

La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que (a_n) tend vers 0.

Puisque

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n^2 a_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$

on obtient par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3}$$

puis

$$\frac{1}{n} \frac{1}{a_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Finalement $a_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$ et la série étudiée est divergente.

Exercice 81 : [énoncé]

La suite (u_n) est à terme strictement positifs car $u_0 > 0$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ laisse stable l'intervalle $]0; +\infty[$.

Puisque pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$, la suite (u_n) est décroissante.

Puisque décroissante et minorée, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ln(1+\ell) = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2} u_n^2}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Par le théorème de Césaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{n u_n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

On en déduit $u_n \sim \frac{2}{n}$ et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 82 : [énoncé]

(a) La suite (a_n) est bien définie et à termes positifs puisque pour tout $x \geq 0$, $1 - e^{-x} \geq 0$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \leq 1 + x$, on a $a_{n+1} \leq a_n$ et la suite (a_n) est donc décroissante.

Puisque décroissante et minorée, (a_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = 1 - e^{-\ell}$. On en déduit $\ell = 0$.

Finalement (a_n) décroît vers 0.

(b) Par le critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n a_n$ converge.

(c) Puisque $a_n \rightarrow 0$, on peut écrire $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n} = a_n - \frac{1}{2} a_n^2 + o(a_n^2)$.

Par suite $a_n^2 \sim -2(a_{n+1} - a_n)$.

Par équivalence de séries à termes positifs, la nature de la série de terme général a_n^2 est celle de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ qui est celle de la suite de terme général a_n . Finalement $\sum a_n^2$ converge.

(d) La nature de la série de terme général $\ln(a_{n+1}/a_n)$ est celle de la suite de terme général $\ln(a_n)$. C'est donc une série divergente. Or

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2} a_n + o(a_n)\right) \sim -\frac{1}{2} a_n.$$

Par équivalence de série de terme de signe constant, on peut affirmer $\sum a_n$ diverge.

Exercice 83 : [énoncé]

Dans le cas où $u_0 = 0$, la suite est nulle.

Dans le cas où $u_0 = 1$, la suite est nulle à partir du rang 1

On suppose désormais ces cas exclus.

- (a) La suite (u_n) est à termes dans $]0; 1[$ car l'application $x \mapsto x - x^2$ laisse stable cet intervalle.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ et donc $\ell = 0$.

Finalement (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n^3} \rightarrow 1.$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \rightarrow 1$$

et donc $\frac{1}{nu_n} \rightarrow 1$.

On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge.

- (b) Comme ci-dessus, on obtient que (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

$$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{(u_n u_{n+1})^\alpha} \sim \frac{\alpha u_n^{\alpha-1}}{u_n^{2\alpha}} \rightarrow \alpha.$$

Par le théorème de Cesaro, $\frac{1}{nu_n^\alpha} \rightarrow \alpha$ et donc

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}$$

avec $\lambda > 0$.

Si $\alpha \in]0; 1[$, $\sum u_n$ converge et si $\alpha \geq 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 84 : [énoncé]

Posons $v_n = u_n^\beta$. La suite (v_n) vérifie $v_n \in]0; 1[$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque la fonction sinus laisse stable l'intervalle $]0; 1[$, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0; 1[$.

De plus, pour $x \geq 0$, $\sin x \leq x$ donc la suite (v_n) est décroissante.

Puisque décroissante et minorée, (v_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.

Finalement (v_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

On a

$$\frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2} = \frac{(v_n - v_{n+1})(v_{n+1} + v_n)}{v_n^2 v_{n+1}^2} \sim \frac{\frac{1}{6} v_n^3 \times 2v_n}{v_n^4} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{k+1}^2} - \frac{1}{v_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3}$$

et donc $\frac{1}{nv_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$. On en déduit $v_n \sim \frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}}$ puis

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/(2\beta)}}$$

avec $\lambda > 0$.

Pour $\beta \in]0; 1/2[$, $\sum v_n$ converge et pour $\beta \geq 1/2$, $\sum v_n$ diverge.

Exercice 85 : [énoncé]

- (a) Notons la suite (u_n) est bien définie, strictement positive et croissante. Si $\alpha > 1$, on a

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^\alpha u_1}$$

puis par récurrence

$$u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha u_1}.$$

Ainsi (u_n) converge.

Si (u_n) converge. Posons $\ell = \lim u_n$, on observe $\ell > 0$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$$

or la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente donc $\alpha > 1$.

- (b) On suppose $\alpha \leq 1$. On a

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha} u_n^2} \sim \frac{2}{n^\alpha}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs divergentes

$$u_n^2 \sim 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

or par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ quand } \alpha < 1$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ quand } \alpha = 1.$$

On conclut alors

$$u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } u_n \sim \sqrt{2 \ln n} \text{ si } \alpha = 1.$$

(c) On suppose $\alpha > 1$. Posons $v_n = u_n - \ell$. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs convergentes

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k = -v_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\ell n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

puis

$$v_n = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 86 : [énoncé]

On observe que $u_{n+1}^n - u_n^{n-1} = n$.

Puisque $\sum n$ une série à termes positifs divergente on peut, par sommation de relation de comparaison, affirmer

$$u_{n+1}^n \sim \sum_{k=1}^n k \sim \frac{1}{2} n^2.$$

En composant avec le logarithme népérien cet équivalent de limite infini, on obtient

$$n \ln u_{n+1} \sim 2 \ln n$$

puis

$$\ln u_{n+1} \sim 2 \frac{\ln n}{n}.$$

Par suite $u_{n+1} \rightarrow 1$ puis

$$u_{n+1} = 1 + 2 \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Posons

$$v_n = u_{n+1} - 1 - 2 \frac{\ln n}{n}.$$

L'égalité

$$u_{n+1}^n = \exp\left(n \ln\left(1 + 2 \frac{\ln n}{n} + v_n\right)\right)$$

donne

$$u_{n+1}^n = \exp(2 \ln n + n v_n + O((\ln n)^2/n)).$$

Or $\frac{2u_{n+1}^n}{n^2} \rightarrow 1$ donc

$$\exp(\ln(2) + n v_n + O((\ln n)^2/n)) \rightarrow 1$$

puis $n v_n \rightarrow -\ln(2)$. Ainsi

$$u_{n+1} = 1 + 2 \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 87 : [énoncé]

Posons

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left| \frac{2n-k}{z_n-k} \right|.$$

On a

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{z_n-k}{2n-k} \right|^2.$$

Puisque

$$|z_n - k|^2 = (2n)^2 - 4nk \cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + k^2 = (2n-k)^2 + 8nk \sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$$

on obtient

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{8nk}{(2n-k)^2} \sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)\right).$$

Sachant $\sin^2 u = u^2 + O(u^4)$, on peut écrire

$$\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{t^2}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on a

$$-2 \ln(P_n) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Posons S_n le second membre de cette comparaison. D'une part

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2} O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0.$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k}{(2n-k)^2} = \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{2(2n-\ell)}{\ell^2} = 4n \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{1}{\ell^2} - 2 \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{1}{\ell}$$

avec

$$\sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2} \sim \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Après calculs asymptotiques, on obtient

$$S_n \rightarrow (2 - 2 \ln 2)t^2.$$

Sachant $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$, on a

$$-2 \ln P_n \geq S_n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2.$$

Puisque $0 \leq \frac{k}{(2n-k)^2} \leq \frac{1}{n}$,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 = \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0.$$

Finalement $-2 \ln P_n$ est encadré par deux quantités de limite $(2 - 2 \ln 2)t^2$. On en déduit

$$P_n \rightarrow \exp((\ln 2 - 1)t^2).$$

Exercice 88 : [énoncé]

Soient $\sum u_n$ une série semi-convergente et $\sum v_n$ une série absolument convergente. La série $\sum u_n + v_n$ est convergente et si celle-ci était absolument convergente alors $\sum u_n$ le serait aussi car $|u_n| \leq |u_n + v_n| + |v_n|$. La série $\sum u_n + v_n$ n'est donc que semi-convergente.

Exercice 89 : [énoncé]

Pour

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

on pose

$$u_n = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Ceci définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de sorte que ses premiers termes sont :

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Les termes sommés tendent vers 0 et les sommes partielles oscillent entre 0 et 1.

Exercice 90 : [énoncé]

- (a) Pour $u_n = (-1)^n$, la série de terme général u_n est divergente et puisque ces sommes partielles valent 0 ou 1, elle enveloppe tout réel de l'intervalle $[0; 1]$. Pour $u_n = (-1)^n / (n+1)$, la série de terme général u_n satisfait le critère spécial des séries alternées et donc elle converge et la valeur absolue de son reste est inférieure à son premier terme. Cette série enveloppe donc sa somme, à savoir $\ln 2$. Pour $u_n = 1/2^n$, la série de terme général u_n converge. Puisque $u_n \rightarrow 0$, le seul réel qu'elle peut envelopper est sa somme, or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

n'est pas inférieur à u_{n+1} . Cette série convergente n'enveloppe aucun réel.

- (b) Posons pour la suite de notre étude

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On a

$$\theta_{n+2}u_{n+2} = A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}.$$

Puisque $\theta_{n+2} > 0$ et $\theta_{n+1} - 1 < 0$, on peut affirmer que u_{n+2} et u_{n+1} sont de signes opposés.

Puisque $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ est du signe de u_{n+1} , les réels $A - S_n$ et $A - S_{n+1}$ sont de signes opposés et donc A est encadré par S_n et S_{n+1} .

(c) Puisque $A - S_n$ est du signe de u_{n+1} , on peut écrire $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ avec $\theta_{n+1} \in \mathbb{R}_+$.

Puisque $A - S_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}$ est du signe de u_{n+2} et puisque u_{n+1} et u_{n+2} sont de signes opposés, on a $\theta_{n+1} - 1 \leq 0$ et donc $\theta_{n+1} \in [0; 1]$.

On ne peut rien dire de plus, sauf à savoir que $A - S_n$ est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet pour $u_n = (-1)^n$ et $A = 1$, la série de terme général u_n est alternée et pour n pair : $A - S_n = 1 - 1 = 0$ est du signe de u_{n+1} .

pour n impair : $A - S_n = 1 - 0 = 1$ est du signe de u_{n+1} .

Si en revanche, on suppose $A - S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, obtenir $\theta_{n+1} \in]0; 1[$ est désormais immédiat.

(d) Par l'absurde, supposons $u_{n+1}, u_{n+2} > 0$.

On a $A - S_n \leq u_{n+1}$ donc $A - S_{n+1} \leq 0$ puis $A - S_{n+2} \leq -u_{n+2}$ et donc $|A - S_{n+2}| \geq |u_{n+2}|$. Or $|A - S_{n+2}| \leq |u_{n+3}|$ et $|u_{n+3}| < |u_{n+2}|$, c'est absurde et donc u_{n+1} et u_{n+2} ne sont pas tous deux strictement positifs. Un raisonnement symétrique établit qu'ils ne sont pas non plus tous deux strictement négatifs et donc la série de terme général u_n est alternée à partir du rang 1 (on ne peut rien affirmer pour le rang 0).

Puisque $A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1}$, on a

$$-|u_{n+1}| - u_{n+1} \leq A - S_{n+1} \leq |u_{n+1}| - u_{n+1}.$$

Si $u_{n+1} > 0$ alors $A - S_{n+1} \leq 0$ et donc du signe de u_{n+2} .

Si $u_{n+1} < 0$ alors $A - S_{n+1} \geq 0$ et donc à nouveau du signe de u_{n+2} .

Enfin $A - S_{n+1}$ n'est pas nul, car sinon

$A - S_{n+3} = A - S_{n+1} - (u_{n+2} + u_{n+3}) = -(u_{n+2} + u_{n+3})$ est de signe strict opposé à u_{n+2} et n'est donc pas du signe de u_{n+4} .

On peut alors exploiter le résultat du c) et affirmer que la série de terme général u_n encadre strictement A .

Exercice 91 : [énoncé]

(a) Il est immédiat de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. L'application

$\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ étant un isomorphisme (car un élément de E est déterminé de façon unique par la donnée de ses deux premiers termes), on peut affirmer que l'espace E est de dimension 2.

(b) Il est immédiat de vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont formés d'entiers naturels, qu'elles sont croissantes à partir du rang 1 et qu'elles sont à termes strictement positifs à partir du rang 2.

Ainsi

$$\forall n \geq 2, a_n, b_n \geq 1$$

et donc

$$a_{n+2} \geq n + 1 \text{ et } b_{n+2} \geq n + 1.$$

Ainsi les deux suites (a_n) et (b_n) tendent vers $+\infty$ en croissant (seulement à partir du rang 1 pour la première)

(c) On a

$$w_{n+1} = ((n+1)a_{n+1} + a_n)b_{n+1} - a_{n+1}((n+1)b_{n+1} + b_n).$$

Après simplification, on obtient

$$w_{n+1} = -w_n$$

et donc

$$w_n = (-1)^n w_0 = (-1)^{n+1}.$$

(d) On a

$$c_{n+1} - c_n = \frac{w_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}}.$$

Puisque la suite de terme général $b_n b_{n+1}$ croît vers $+\infty$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et affirmer que la série numérique $\sum (c_{n+1} - c_n)$ converge. Par conséquent la suite (c_n) converge.

(e) On a

$$\ell - c_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (c_{k+1} - c_k).$$

Par le critère spécial des séries alternées, on peut borner ce reste par la valeur absolue de son premier terme

$$|\ell - c_n| \leq \frac{1}{b_n b_{n+1}}.$$

On peut ainsi écrire

$$c_n = \ell + o\left(\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right).$$

On a alors

$$a_n + r b_n = b_n(c_n + r) = b_n(\ell + r) + o\left(\frac{1}{b_{n+1}}\right).$$

Sachant $b_n \rightarrow +\infty$, on peut affirmer

$$a_n + rb_n \rightarrow 0 \iff r = -\ell.$$

Exercice 92 : [énoncé]

- (a) Puisque $|d_n e_n| \leq e_n$ avec convergence de $\sum e_n$, on peut affirmer que les éléments de G sont des sommes de séries absolument convergentes. Les éléments de G sont donc bien définis et puisque

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e_n = s$$

on a $G \subset [-s; s]$. Enfin $s \in G$ avec $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $-s \in G$ avec $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (b) Si e est une base discrète alors $G = [-s; s]$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $e_N > r_N$.
Introduisons

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} e_k \in [-s; s]$$

(comprendre $x = 0$ si $N = 0$).

Soit

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \text{ avec } d_n \in \{-1, 1\}.$$

S'il existe $k \leq N$ tel que $d_k = -1$ alors

$$y \leq \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n - 2e_k = s - 2e_k.$$

Or

$$e_k \geq e_N$$

donc

$$y < s - 2e_N = x + r_N - e_N < x.$$

Si $d_k = 1$ pour tout $k \leq N$ alors

$$y = \sum_{n=0}^N e_k + \sum_{n=N+1}^{+\infty} d_n e_n \geq x + e_N - r_N > x.$$

Dans tous les cas, $y \neq x$ et donc $x \notin G$. C'est absurde.

- (c) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Cas $n = 0$: on a bien

$$|t - t_0| = |t| \leq s = e_0 + r_0.$$

Supposons la propriété vérifiée au rang $n \geq 0$.

Si $t_n \leq t$ alors

$$t - t_{n+1} = t - t_n - e_n \leq r_n$$

et

$$t - t_{n+1} \geq -e_n \geq -r_n.$$

Ainsi

$$|t - t_{n+1}| \leq r_n = e_{n+1} + r_{n+1}.$$

Si $t_n > t$ alors

$$t_{n+1} - t = t_n - t - e_n$$

et l'étude est analogue.

Récurrence établie.

On en déduit que $t_n \rightarrow t$ puis que $t \in G$.

En conclusion

e est une base discrète si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \leq r_n$.

- (d) La condition précédente est vérifiée et, puisque $s = 2$, on obtient $G = [-2; 2]$.

On peut écrire

$$0 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1) \frac{1}{2^n}, 1 = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1) \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et

$$2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

En remarquant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

on peut proposer

$$\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}.$$

Il peut y avoir unicité de la suite (d_n) (c'est le cas pour $x = s$) ou non (c'est le cas pour $x = 0$ où lorsque (d_n) convient, $(-d_n)$ convient aussi).

Exercice 93 : [énoncé]

On remarque

$$v_n \geq u_{2^n} + u_{2^{n+1}} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^n v_k \geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k.$$

Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Aussi

$$u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1} \geq \frac{1}{2} v_{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n v_k.$$

Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 94 : [énoncé]

(a) On remarque

$$p^n(p-1)u_{p^{n+1}} \leq \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leq p^n(p-1)u_{p^n}$$

et donc

$$\frac{p-1}{p} \sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell \leq \sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq (p-1) \sum_{\ell=0}^n v_\ell.$$

Si $\sum u_n$ converge alors la première inégalité donne

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell \leq \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum v_n$ car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

Si $\sum v_n$ converge alors la deuxième inégalité de l'encadrement précédent donne

$$\sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq (p-1) \sum_{\ell=0}^{+\infty} v_\ell$$

et puisque les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont croissantes et que ce qui précède permet de les majorer, on peut conclure à la convergence de la série $\sum u_n$.

(b) Prenons $p = 2$ et

$$u_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

La suite (u_n) est décroissante positive et

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{n \ln 2}.$$

Puisque $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge aussi.

Prenons toujours $p = 2$ et cette fois-ci

$$u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

La suite (u_n) est décroissante positive et

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{n \ln 2 \ln(n \ln 2)} \sim \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{n \ln n}$$

et à nouveau nous pouvons conclure à la divergence de $\sum u_n$.

Exercice 95 : [énoncé]

On remarque

$$(2n+1)u_{(n+1)^2} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq (2n+1)u_{n^2}$$

et donc

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} (2\ell-1)u_{\ell^2} \leq \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} u_k \leq \sum_{\ell=0}^n (2\ell+1)u_{\ell^2}.$$

Si $\sum u_n$ converge alors la première inégalité donne

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell u_{\ell^2} \leq \sum_{\ell=1}^{n+1} (2\ell-1)u_{\ell^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum v_n$ car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

Si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_{n^2}$ converge aussi car

$$0 \leq u_{n^2} \leq n u_{n^2} = v_n.$$

On en déduit la convergence de $\sum (2n+1)u_{n^2}$ et la deuxième inégalité de l'encadrement précédent donne

$$\sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1)u_{\ell^2}.$$

Puisque les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont croissantes et que ce qui précède permet de les majorer, on peut conclure la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 96 : [énoncé]

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour $n^2 \leq k < (n+1)^2$,

$$0 \leq u_k \leq u_{n^2} \leq \frac{v_n}{n^2}$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq v_n \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$$

ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ sont majorées et donc $\sum u_n$ converge. Inversement, pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ on a $v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Exercice 97 : [énoncé]

Commençons par justifier l'existence des produits infinis introduits.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les facteurs étant tous strictement positifs, on peut considérer le logarithme du produit

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n (1+q^k) \right) = \sum_{k=1}^n \ln(1+q^k) \quad \text{avec} \quad \ln(1+q^k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} q^k \quad \text{car} \quad q^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La série géométrique $\sum q^k$ converge absolument et donc $\sum \ln(1+q^k)$ aussi¹¹. On en déduit

$$\prod_{k=1}^n (1+q^k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^S \quad \text{avec} \quad S = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^k).$$

11. On raisonne par convergence absolue et non par équivalence de séries à termes positifs pour gérer le cas où q est négatif.

De la même façon, on obtient

$$\prod_{k=1}^n (1-q^{2k-1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{S'} \quad \text{avec} \quad S' = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^{2k-1}).$$

Dans le premier produit, on écrit $1+q^k = \frac{1-q^{2k}}{1-q^k}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^n (1+q^k) \prod_{k=1}^n (1-q^{2k-1}) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1-q^{2k}}{1-q^k} \right) \prod_{k=1}^n (1-q^{2k-1}).$$

En réorganisant les facteurs

$$\prod_{k=1}^n (1+q^k) \prod_{k=1}^n (1-q^{2k-1}) = \frac{\prod_{k=1}^n (1-q^{2k}) \prod_{k=1}^n (1-q^{2k-1})}{\prod_{k=1}^n (1-q^k)}.$$

Au numérateur, on trouve le produit des $1-q^\ell$ pour tous les indices ℓ allant de 1 à $2n$ et, après simplification,

$$\prod_{k=1}^n (1+q^k) \prod_{k=1}^n (1-q^{2k-1}) = \prod_{k=n+1}^{2n} (1-q^k).$$

Or

$$\ln \left(\prod_{k=n+1}^{2n} (1-q^k) \right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(1-q^k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1-q^k) - \sum_{k=2n+1}^{+\infty} \ln(1-q^k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

car le reste d'une série convergente¹² est de limite nulle.

On en déduit

$$\prod_{k=1}^n (1+q^k) \prod_{k=1}^n (1-q^{2k-1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et donc} \quad \prod_{k=1}^{+\infty} (1+q^k) \prod_{k=1}^{+\infty} (1-q^{2k-1}) = 1.$$

12. On acquiert l'absolue convergence de la série par les mêmes démarches qu'au-dessus.

Exercice 98 : [énoncé]

On transforme le produit (P_n) en une somme par la fonction logarithme.
On prend garde cependant à n'appliquer celle-ci qu'aux facteurs strictement positifs.

Puisque la série $\sum a_n$ converge, son terme général tend vers 0. Il existe donc un rang n_0 au delà duquel $|a_n| < 1$. On applique la fonction logarithme aux facteurs du produit d'indices supérieurs à n_0

$$\ln\left(\prod_{k=n_0}^n (1+a_k)\right) = \sum_{k=n_0}^n \ln(1+a_k).$$

La suite (a_n) étant de limite nulle, le développement limité $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ quand u tend vers 0 permet d'écrire

$$\ln(1+a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2) = a_n - b_n \quad \text{avec} \quad b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2).$$

La série $\sum a_n$ étant convergente, la nature de la série de terme général $\ln(1+a_n)$ se déduit de la nature de la série $\sum b_n$.

Cas: La série $\sum a_n^2$ converge. Par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général b_n converge et donc aussi celle de terme général $\ln(1+a_n)$. On en déduit

$$P_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^S \cdot \prod_{k=0}^{n_0-1} (1+a_k) \in \mathbb{R}^* \quad \text{avec} \quad S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \ln(1+a_k).$$

Cas: La série $\sum a_n^2$ diverge. Par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général b_n diverge.

Les sommes partielles d'une série à termes positifs divergente croissent vers $+\infty$.

Les sommes partielles de la série $\sum b_n$ tendent vers $+\infty$ et, par différence, les sommes partielles de la série de terme général $\ln(1+a_n)$ tendent vers $-\infty$. Par opérations sur les limites, on conclut que la suite (P_n) tend vers 0.